ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE.
(Extrait du tom. XIII, nº 5, des Bulletins.)

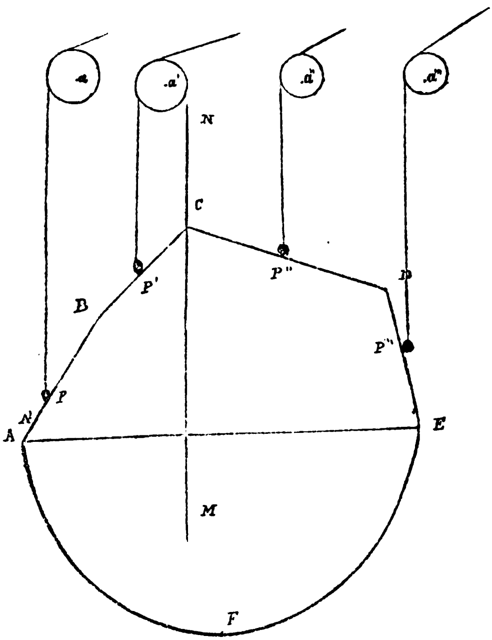
SUR LE PARALLÉLOGRAMME DES FORCES DE SIMON STÉVIN,

PAR

A. Timmermans,

Membre de l'Académie et professeur à l'Université de Gand.

Si l'importance d'une découverte est déterminée par le nombre de conséquences qu'on en a déduites et par l'influence qu'elle a exercée sur les progrès ultérieurs d'une science, on ne peut contester que le plus beau titre de gloire de Simon Stévin, celui qui lui assure un rang distingué parmi les hommes de génie, ne soit la découverte de la loi suivant laquelle se combinent les forces agissant simultanément sur un corps. La découverte de la pesanteur de l'air atmosphérique, les lois de la pression des liquides sur les parois des vases qui les contiennent, la presse hydraulique, la construction des écluses de chasse, la théorie des fractions décimales, ont sans doute puissamment contribué aux progrès de la physique, du calcul, de l'art du constructeur, et à ce titre, chacune suffirait pour immortaliser son nom; mais aucune d'elles n'a eu, comme son théorème du parallélogramme des forces, le privilége de créer en quelque sorte une science nouvelle. Il est vrai que plusieurs géomètres, tout en reconnaissant l'importance des services rendus par notre compatriote à la science du mouvement, ont fait à sa démonstration le reproche d'être fondée sur des considérations trop indirectes. L'illustre Lagrange, dans sa Mécanique analytique (page 9), a même avancé que le principe qui forme son point de départ est insuffisant pour démontrer son théorème dans toute son extension. Ce reproche, s'il était fondé, restreindrait beaucoup l'importance de la découverte de l'illustre Brugeois, à laquelle on attache le plus de prix; mais en examinant attentivement l'esprit de sa méthode, on reconnaît sans peine qu'elle comporte un degré de généralité dont on était loin de se douter, puisqu'elle se prête sans aucun effort à la démonstration d'un principe général qui, à lui seul, résume toute la mécanique, je veux parler du principe des vitesses virtuelles. L'extrême simplicité de cette démonstration, la seule qui jusqu'aujourd'hui, que je sache, soit complétement indépendante de toute notion de statique, et soit par conséquent donnée *a priori*, m'a déterminé à en faire l'objet de cette note.



Soit A B C D E un polygone renfermé dans un plan vertical; sur ce polygone faisons passer une chaîne sans fin uniformément pesante et parfaitement flexible A B C D E F A; celle-ci restera en équilibre, car la cause qui ferait tourner la chaîne serait une cause sans effet, puisque, malgré le mouvement, le système se présenterait toujours dans des circonstances identiques. Supposons de plus A E horizontal, alors la partie pendante A F E de la chaîne sera formée de deux parties symétriques, et les tensions en A et F seront égales; d'où il résulte qu'en la supprimant, la partie de la chaîne A B C D E sera encore en équilibre, quelle que soit la forme du polygone. Réciproquement, si la chaîne A B C D E est en équilibre sur le polygone, on doit en conclure que les extrémités A et E sont placées au même niveau, car si cela n'était pas, si, par exemple, la droite E A′ était horizontale, la chaîne A′ B C D E serait aussi en équilibre, et on serait conduit à cette conséquence absurde, que la partie A A′ devrait se maintenir par son propre poids sur le plan A B. La condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre est donc celle qui exprime que la somme des projections sur une verticale M N, des côtés du polygone inclinés dans un sens est égal à la somme des projections des côtés inclinés dans l'autre sens, c'est-à-dire qu'en désignant par α, α', α''... les angles formés par les côtés l, l', l''... avec une verticale, la condition d'équilibre nécessaire et suffisante est exprimée par l'équation

$$l \cos. \alpha + l' \cos. \alpha' + l'' \cos. \alpha'' + \text{etc.} = o.$$

Lorsque cette somme n'est pas nulle, une valeur positive indique que la projection verticale de la partie A B C l'emporte sur la projection de C D E, ce qui détermine un mouvement de la chaîne dans le sens E D C B A; une valeur négative correspond à un mouvement en sens inverse.

Cela posé, si l'on conçoit les chaînons juxtaposés et traversés par un fil A B C D E, comme le sont les grains d'un chapelet, il est évident que l'équilibre ne sera pas troublé quand tous les chaînons appuyés sur un même côté seront remplacés par des poids uniques P, P′, P″, P‴

égaux à leur somme; d'où il suit que des poids P, P′, P″, P‴, appuyés sur les côtés du polygone A B C D E proportionnels à ces côtés et liés par un fil A B C D E resteront en équilibre. D'une autre part, si dans un système de forces on substitue à celles-ci des poids équivalents au moyen de poulies de renvoi a, a', a'', a''', placées à de grandes distances pour maintenir la verticalité des cordons, on pourra toujours concevoir un polygone A B C D E, tel qu'un mouvement virtuel communiqué au système de forces, produise dans la disposition des poids suspendus librement, le même dérangement que si, étant liés entre eux par un fil A B C D E, on faisait glisser ce fil sur les côtés de ce polygone ; en effet dp, dp', dp'', etc., étant les quantités dont ces poids descendent quand ils sont libres, il suffira de faire en sorte que les cosinus des angles formés par les côtés avec une verticale, soient respectivement égaux à $\frac{dp}{ds}$, $\frac{dp'}{ds}$, $\frac{dp''}{ds}$....., ds étant une quantité quelconque supérieure à la plus grande des valeurs de dp, dp', dp''...; car en supposant les poids liés entre eux, si on fait glisser la chaîne, et par conséquent chaque poids d'une quantité ds, ces poids descendront ou monteront d'une quantité ds cos. α, ds cos. α', etc., ou dp, dp', dp'', etc. Or, on a vu qu'il y a équilibre s'ils sont proportionnels aux côtés l, l', l''... et si l'on a

$$l \cos.\, \alpha + l' \cos.\, \alpha' + l'' \cos.\, \alpha'' + \ldots\ldots = o;$$

en remplaçant donc l, l', l''... par P, P′, P″... et cos. α, cos. α'... par $\frac{dp}{ds}$, $\frac{dp'}{ds}$..., il y aura équilibre dans le système si l'on a

$$\mathrm{P}\,\frac{dp}{ds} + \mathrm{P}'\,\frac{dp'}{ds} + \mathrm{P}''\,\frac{dp''}{ds} + \text{etc.} = o,$$

qui se réduit à l'équation des vitesses virtuelles

$$P\ dp + P'\ dp' + P''\ dp'' + \text{etc.} = o.$$

Réciproquement, s'il y a équilibre, l'équation des vitesses virtuelles doit avoir lieu, puisque l'on a vu que la première de ces trois équations doit alors exister, et, si l'équilibre est rompu, le mouvement de la chaîne aura lieu dans le sens E D C B A ou dans le sens inverse, suivant que cette somme sera positive ou négative.

Observons que l'on a supposé la chaîne libre de glisser dans les deux sens et, par conséquent, le système libre d'effectuer son déplacement virtuel dans les deux sens opposés. Si le déplacement n'était libre que dans le sens A B C D E, par exemple, il suffirait d'exprimer que la partie C D E de la chaîne ne peut entraîner la partie A B C, ou que le point E n'est pas placé plus bas que le point A, ce qui conduit à la condition

$$l \cos. \alpha + l' \cos. \alpha' + l'' \cos. \alpha'' + \text{etc.} > o$$

et, par conséquent,

$$P\ dp + P'\ dp' + P''\ dp'' + \text{etc.} > o.$$

La méthode de Stévin conduit aussi fort simplement au caractère qui distingue un équilibre stable d'un équilibre instantané. On sait qu'un système est dans un état d'équilibre stable lorsque, étant écarté très-peu de la position où les forces s'entre-détruisent, le système tend à y revenir. Ceci admis, si l'on substitue aux forces du système une chaîne pesante appuyée sur un polygone A B C D E, déterminé comme plus haut, et qu'on écarte très-peu le