REALISATIONS DES COMPLEXES MOTIVIQUES DE VOEVODSKY

Florence LECOMTE et Nathalie WACH

Strasbourg

ABSTRACT.
Over a number field k, we construct realizations of Voevodsky motivic complexes, realizations as presented by Fontaine and Perrin-Riou [FPR94]. Our realization functors are defined from the category $\mathbf{DM}^{-}(k)$ *constructed by Voevodsky and are obtained as cohomological functors which are, up to some limits, representable. The De Rham realization is represented by the De Rham motivic complex defined in [LW09]. We obtain integral Betti and l-adic realizations. Our realization functors are related by comparison arrows, which become isomorphisms when restricted to the category of geometrical motives. Furthermore, on geometrical motives, the realizations are endowed with Bondarko's weight filtration [Bo09], the Hodge realization is constructed and all these realizations coïncide rationally with those defined by A. Huber [H00].*

Introduction

En introduisant la notion de motif dans les années 60, Grothendieck a conjecturé l'existence d'un objet qui ne serait visible qu'à travers ses réalisations ([Ma68], p.442). Les réalisations du motif associé à un schéma lisse sur un corps sont ses différentes cohomologies : cohomologie de De Rham, cohomologie l-adique et, pour un sous-corps de $\mathbf{C}$, cohomologie de Betti. Dans les années 70, Deligne ([D70], [D71]) a introduit la catégorie abélienne des structures de Hodge mixtes qui rassemble les réalisations de de Rham, de Betti et leurs filtrations. Dans les années 90, Voevodsky ([V-TCM]) a construit la catégorie $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}$ des motifs géométriques et Annette Huber a montré que, pour un sous-corps de $\mathbf{C}$, les réalisations des schémas lisses projectifs s'étendent en un foncteur de $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}\,\mathbf{Q}}$ des motifs géométriques rationnels vers la catégorie des réalisations mixtes construites en [H95].

L'objet de cet article est de proposer des réalisations sur la catégorie plus grosse $\mathbf{DM}^{-\,-}(k)$ des complexes motiviques de Voedvodsky, réalisations qui sont représentables dans un sens que nous préciserons ultérieurement et qui sont à coefficients entiers dans les cas de Betti et l-adique, à savoir

i) la *réalisation de De Rham* $\mathbf{H}_{DR}(.,q)$ vers la catégorie des k-espaces vectoriels filtrés;

ii) pour chaque place $\sigma : k \hookrightarrow \mathbf{C}$, la *réalisation de Betti* à coefficients entiers $\mathbf{H}_\sigma(.,\mathbf{Z}(q))$ vers la catégorie des groupes abéliens;

iii) pour chaque premier l, la *réalisation l-adique* $\mathbf{H}_l(.,\mathbf{Z}_l(q))$ vers la catégorie des $\mathbf{Z}_l[G_k]$-modules continus,

et des classes de Chern de la cohomologie motivique vers les différentes réalisations qui induisent des flèches de comparaison.

Se restreindre aux motifs géométriques permet d'affiner les structures et d'y inclure les filtrations par le poids à la Bondarko ([Bo09],[Bo]). Ces filtrations comme la filtration de Hodge sont représentées par des foncteurs de troncature. Nous obtenons des structures de Hodge mixtes et prouvons

Theoreme 0.1.
A tout motif géométrique $\mathbf{M}$ *et tout entier* $q \geq 0$, *on associe*

(i) *un k-espace vectoriel de dimension finie* $\mathbf{H}^\bullet_{DR}(\mathbf{M},q) = \oplus_{p\in\mathbf{Z}}\mathbf{H}^p_{DR}(\mathbf{M},q)$, *muni d'une filtration décroissante finie* $F^\bullet$ *par des sous-espaces vectoriels, appelée filtration de Hodge;*

(ii) *pour chaque place infinie* $\sigma : k \hookrightarrow \mathbf{C}$, *un* $\mathbf{Z}$*-module de type fini*

$$\mathbf{H}^\bullet_\sigma(\mathbf{M},\mathbf{Z}(q)) = \oplus_{p\in\mathbf{Z}}\mathbf{H}^p_\sigma(\mathbf{M},\mathbf{Z}(q))$$

muni d'une involution si la place est réelle;

(iii) *pour chaque nombre premier l, un* $\mathbf{Z}_l$*-module de type fini*

$$\mathbf{H}^\bullet_l(\mathbf{M},\mathbf{Z}_l(q)) = \oplus_{p\in\mathbf{Z}}\mathbf{H}^p(\mathbf{M},\mathbf{Z}_l(q)),$$

tel que

$$\mathbf{H}_l^\bullet(\mathbf{M}, q) = \mathbf{Q}_l \otimes \mathbf{H}_l^\bullet(\mathbf{M}, \mathbf{Z}_l(q))$$

soit une une représentation l-adique pseudo-géométrique du groupe de Galois $G_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$;
et des isomorphismes de comparaison

(i') pour chaque place infinie σ, chaque entier $q \geq 0$ et chaque entier p, un isomorphisme de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels, compatible avec l'action de la conjugaison complexe si la place est réelle

$$i_\sigma : \mathbf{C} \otimes_k \mathbf{H}^p_{DR}(\mathbf{M}, q) \simeq \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{H}^p_\sigma(\mathbf{M}, \mathbf{Z}(q));$$

(ii') pour chaque premier l, chaque entier $q \geq 0$, chaque place infinie σ et chaque entier p un isomorphisme de $\mathbf{Q}_l$-espaces vectoriels

$$i_{l,\sigma} : \mathbf{H}^p_l(\mathbf{M}, q) \simeq \mathbf{Q}_l \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{H}^p_\sigma(\mathbf{M}, \mathbf{Z}(q)).$$

Les réalisations sont toutes munies d'une filtration croissante $(W.)$, appelée filtration par le poids; les isomorphismes de comparaison sont compatibles avec la filtration.
De plus, pour toute place infinie σ, l'objet

$$(\mathbf{H}^p_\sigma(\mathbf{M}, \mathbf{Z}(q)), \mathbf{H}^p_{DR}(\mathbf{M}, q), \mathbf{C} \otimes_k \mathbf{H}^p_{DR}(\mathbf{M}, q), W., F^\cdot, \bar{F}^\cdot)$$

est une structure de Hodge mixte sur k.

Parmi les définitions possibles de réalisations [J88],[D89],[H95], [FPR94] nous avons choisi la formulation de Fontaine et Perrin-Riou, en y ajoutant la torsion de Tate et les caractères de Chern. Il nous manque cependant le théorème de comparaison p-adique de Rham que nous espérons montrer, comme nous espérons obtenir une réalisation cristalline. En construisant les foncteurs cohomologiques $\mathbf{H}_{DR}$, $\mathbf{H}_B$ et $\mathbf{H}_l$, nous montrons comment ils se comportent par rapport au produit tensoriel défini par Voevodsky. Il est facile d'en déduire les propriétés de type formules de Kunneth montrées en [H00].

Après les travaux de Huber [H95], [H00], plusieurs auteurs ont indépendamment défini des foncteurs de réalisation. Ivorra [I07] a construit des réalisations l-adiques entières à partir de la catégorie des motifs géométriques. Cisinski et Déglise ont construit des réalisations rationnelles des complexes motiviques. Comme nous l'a fait remarquer Déglise, on peut par adjonction de nos foncteurs retrouver les différents motifs qui d'après le théorème de représentabilité de Brown [CD07] représentent nos réalisations.

Rappelons qu'un foncteur d'une catégorie triangulée $\mathcal{T}$ vers une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est dit cohomologique [Ver77] s'il transforme tout triangle distingué en suite exacte. En particulier, pour un foncteur cohomologique H et p un entier, nous notons H^p le foncteur de $\mathcal{T}$ vers $\mathcal{A}$ défini par $H^p(M) = H(M[-p])$; ceci permet d'associer à tout triangle distingué une suite exacte longue. Les foncteurs Hom sont des foncteurs cohomologiques.
Dans la catégorie $\mathbf{DM}^-(k)$ des complexes motiviques, la catégorie $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$ des motifs géométriques est la sous-catégorie pleine additive épaisse engendrée par les motifs $\mathbf{M}(X)$ des schémas projectifs lisses [MVW 14.1]. Cela signifie que la catégorie $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$ est construite à partir des sommes finies de motifs de schémas projectifs lisses avec les deux propriétés suivantes :

- les facteurs directs des motifs géométriques sont géométriques;
- pour tout triangle distingué $A \to B \to C \to A[1]$, si deux des trois motifs A, B et C sont géométriques, le troisième l'est aussi.

Une fois construits les différents foncteurs cohomologiques, la démonstration du théorème 0.1 est basée sur le principe simple suivant :

Principe 0.2.
Soit $H : \mathbf{DM}^{-,\mathrm{eff}}(k) \to \mathcal{A}$ un foncteur cohomologique vers une catégorie abélienne $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{B}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$, abélienne, stable par facteur direct et extension. Si $H(\mathbf{M}(X)[n])$ est un objet de $\mathcal{B}$ pour tout schéma X lisse et projectif sur k et tout entier n, alors H induit un foncteur

$$H : \mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k) \to \mathcal{B}.$$

Si de plus la catégorie $\mathcal{B}$ est tensorielle, si H est multiplicatif et $H(\mathbf{Z}(1))$ est inversible dans $\mathcal{B}$, alors H induit un foncteur

$$H : \mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k) \to \mathcal{B}.$$

Dans cet énoncé, l'hypothèse $\mathcal{A}$ abélienne est nécessaire pour considérer un foncteur cohomologique; nous serons amenées à utiliser ce principe en considérant une catégorie auxiliaire $\mathcal{A}'$ dans laquelle $\mathcal{B}$ est pleine.

Modulo quelques limites, nos foncteurs de réalisation sont construits à partir de foncteurs $\mathbf{M} \mapsto \mathrm{Hom}_D(r(\mathbf{M}), \mathbf{P})$ où D est une catégorie triangulée, le foncteur $r : \mathbf{DM}^-(k) \to D$ est exact et $\mathbf{P}$ est un objet (ou une suite d'objets) de D qui, en quelque sorte, représente la réalisation. Dans le cas De Rham, la catégorie D est la catégorie $\mathbf{DM}^-(k)$, le foncteur r est l'identité et l'objet $\mathbf{P}$ est le complexe motivique de De Rham $\mathbf{\Omega}^\bullet$ construit en [LW 09]. Dans le cas Betti, $D = D(Ab)$ est la catégorie dérivée des groupes abéliens, r est le foncteur de réalisation topologique inspiré de [SV96] et $\mathbf{P}$ est le groupe $\mathbf{Z}$ des entiers. Pour la réalisation l-adique, $D = \mathbf{DM}^-_{ét}(k)$ est la catégorie des complexes motiviques étales, r est le foncteur faisceau étale associé et $\mathbf{P}$ est la suite des complexes de faisceaux étales $\mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)$. Pour définir les classes de Chern, il suffit de construire des flèches $r(\mathbf{Z}(q)) \to \mathbf{P}$ et les théorèmes de comparaison consistent à comparer les différents objets $\mathbf{P}$.

Dans une première partie, nous rappelons les définitions des motifs de Voevodsky, quelques notions sur les sites et topos et la construction des poids de Bondarko. La deuxième partie est consacrée à la réalisation de De Rham et de la filtration de Hodge, la troisième partie à la réalisation de Betti et la quatrième à la réalisation l-adique. Dans la cinquième partie, nous comparons les différentes réalisations, en déduisons la réalisation de Hodge et finissons par comparer avec les constructions de A. Huber.

Conventions *Par la suite tous les corps sont supposés de caractéristique* 0 *et les schémas sont séparés de type fini sur un corps. On note* $\mathrm{Sm}(k)$ *la catégorie des schémas lisses sur k, dont les morphismes sont les morphismes de schémas.*

1. Motifs de Voevodsky

La catégorie motivique dans laquelle nous travaillons est la catégorie triangulée $\mathbf{DM}^-(k)$ de Voevodsky ([V-TCM]) dont nous appelons les objets complexes motiviques. Cette catégorie est obtenue par une série de localisations à partir de la catégorie des complexes de faisceaux sur la catégorie $\mathrm{Smcor}(k)$ des correspondances finies.

1.1. Les correspondances finies

Le groupe $Cor(X,Y)$ des correspondances finies entre deux schémas lisses X et Y est le groupe abélien libre engendré par les sous-variétés fermées irréductibles de $X \times_{\mathrm{Spec}(k)} Y$ qui sont finies et surjectives sur une composante irréductible de X. Cette définition reste valable pour un schéma Y quelconque.
Les correspondances finies se comportent mieux que les cycles classiques : il existe des morphismes image inverse et image directe pour tous les morphismes entre schémas lisses et elles se composent comme les correspondances de Grothendieck [Ma68]. Elles permettent de définir la catégorie $\mathrm{Smcor}(k)$ des correspondances finies, dont les objets sont les schémas lisses sur k et les morphismes, les correspondances finies. La catégorie $\mathrm{Smcor}(k)$ est additive, pour l'union disjointe, et tensorielle, pour le produit fibré sur $\mathrm{Spec}\, k$. Le foncteur canonique $\gamma : \mathrm{Sm}(k) \to \mathrm{Smcor}(k)$ qui envoie tout morphisme sur son graphe est compatible à ces structures. On appelle préfaisceau avec transferts un foncteur contravariant de $\mathrm{Smcor}(k)$ vers la catégorie Ab des groupes abéliens; un faisceau de Nisnevich avec transferts est un préfaisceau avec transferts qui est un faisceau pour la topologie de Nisnevich, la topologie totalement décomposée de [N89], intermédiaire entre la topologie de Zariski et la topologie étale.

1.2. Les catégories motiviques

1.2.1. *Faisceaux de Nisnevich avec transferts*
Les catégories motiviques sont construites à partir de la catégorie $\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}(k))$ des faisceaux de Nisnevich avec transferts. Le faisceau $\mathbf{Z}_{tr}(X)$ (noté $L(X)$ dans [V-TCM]) est le faisceau de Nisnevich représenté par le schéma X sur $\mathrm{Smcor}(k)$: pour tout schéma lisse U, on a $\mathbf{Z}_{tr}(X)(U) = Cor(U, X)$. Notons que le faisceau $\mathbf{Z}_{tr}(X)$ est défini pour X quelconque. Le produit des schémas permet de définir le produit tensoriel des faisceaux avec transferts

$$\mathbf{Z}_{tr}(X) \otimes \mathbf{Z}_{tr}(Y) = \mathbf{Z}_{tr}(X \times_{\mathrm{Spec}(k)} Y)$$

pour toute paire de schémas lisses (X, Y). Soulignons une propriété de la topologie de Nisnevich ([V-TCM] Prop 3.1.3) :

Proposition 1.2.1.1. (Voevodsky [V-TCM]) *Soit X un schéma lisse sur k et $\mathcal{U} = \{U_i \to X\}$ un recouvrement de Nisnevich de X. Notons U l'union disjointe $U = \coprod U_i$ et $\check{N}(\mathcal{U}/X)$ le complexe de faisceaux*

$$\cdots \to \mathbf{Z}_{tr}(U \times_X U) \to \mathbf{Z}_{tr}(U) \to \mathbf{Z}_{tr}(X) \to 0$$

avec les différentielles égales à la somme alternée des morphismes induits par les projections.
Alors le complexe $\check{N}(\mathcal{U}/X)$ est acyclique pour la topologie de Nisnevich.

Comme tout schéma lisse de type fini sur un corps peut être recouvert par une famille de schémas lisses quasi-projectifs, cette proposition permet de résoudre les faisceaux $\mathbf{Z}_{tr}(X)$, pour X schéma lisse de type fini par un complexe formé de sommes $\coprod_\alpha \mathbf{Z}_{tr}(X_\alpha)$ où les schémas (X_α) sont quasi-projectifs lisses. C'est pourquoi dans nos constructions nous pourrons supposer que les schémas sont quasi-projectifs.
La proposition (1.2.1.1.) reste valable en topologie étale mais pas en topologie de Zariski (loc. cit.). Néanmoins la topologie de Zariski reprend ses droits quand on introduit l'invariance d'homotopie.

1.2.2. *Invariance par homotopie*
On dit qu'un (pré)-faisceau F est *invariant par homotopie* si pour tout schéma lisse X, la projection $X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathbf{A}^1_k \to X$ induit un isomorphisme $F(X) \simeq F(X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathbf{A}^1_k)$. Un résulat fondamental de Voevodsky est le théorème d'invariance d'homotopie :

Theoreme 1.2.2.1. (Voevodsky [V-TCM] 3.1.12) *Soit F un faisceau de Nisnevich invariant par homotopie. Alors le faisceau de cohomologie associé est également invariant par homotopie et on a pour tout schéma X lisse et tout entier i des isomorphismes*

$$\begin{array}{ccc} H^i_{Zar}(X, F) & \simeq & H^i_{Zar}(X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathbf{A}^1_k, F) \\ \wr| & & \wr| \\ H^i_{Nis}(X, F) & \simeq & H^i_{Nis}(X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathbf{A}^1_k, F). \end{array}$$

La catégorie $\mathbf{DM}^{-,\mathrm{eff}}(k)$ des complexes motiviques effectifs est la localisation de la catégorie dérivée $D^- = D^-(\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}(k))$ des complexes, bornés supérieurement, de faisceaux de Nisnevich avec transferts par la sous-catégorie épaisse engendrée par les complexes du type $\mathbf{Z}_{tr}(X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathbf{A}^1_k) \to \mathbf{Z}_{tr}(X)$. On appelle $\mathbf{A}^1_k$-*équivalence* tout morphisme de $D^-(\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}(k))$ qui induit un isomorphisme sur $\mathbf{DM}^-(k)$.

Le théorème d'invariance d'homotopie (1.2.2.1.) permet d'identifier $\mathbf{DM}^{-,\mathrm{eff}}(k)$ à une sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée $D^-(\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}(k)))$: en effet, $\mathbf{DM}^{-,\mathrm{eff}}(k)$ en est la sous-catégorie formée des complexes, bornés supérieurement, de faisceaux de Nisnevich avec transferts, qui sont à cohomologie invariante par homotopie. On note $\mathbf{M}(X)$ le complexe motivique associé au schéma lisse X : il est représenté dans $\mathbf{DM}^{-,\mathrm{eff}}(k)$ par le complexe singulier simplicial $C_*(\mathbf{Z}_{tr}(X))$ associé à X, aussi appelé *complexe de Suslin* du schéma X. Pour un faisceau F, le complexe $C_*(F)$ est le complexe de faisceaux défini par

$$C_n(F)(X) = F(X \times \Delta^n)$$

où $\Delta^\bullet$ est le schéma cosimplicial standard $\Delta^n = \mathrm{Spec}\, k[z_0, \cdots, z_n]/(\sum_{0 \leq i \leq n} z_i - 1)$ et la différentielle est induite par la somme alternée des morphismes de coface.

Le produit sur Smcor(k) se transporte sur $\mathbf{DM}^{-,\mathrm{eff}}(k)$ et on a pour toute paire (X, Y) de schémas lisses

$$\mathbf{M}(X) \otimes \mathbf{M}(Y) = \mathbf{M}(X \times_{\mathrm{Spec}(k)} Y).$$

Le motif $\mathbf{M}(\mathbf{P}^1)$ de la droite projective se scinde en $\mathbf{M}(\mathbf{P}^1) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}(1)[2]$ où $\mathbf{Z} = \mathbf{M}(\mathrm{Spec}\, k)$ est le motif du point et $\mathbf{Z}(1)$ est le motif de Tate, motif réduit de $\mathbf{G}_m$. La catégorie $\mathbf{DM}^-(k)$ des complexes motiviques est obtenue à partir de la catégorie $\mathbf{DM}^{-,\mathrm{eff}}(k)$ en inversant le motif de Tate. Le théorème de simplification ("cancellation theorem") de Voevodsky (cf [MVW] 16.25) permet d'identifier la catégorie des complexes motiviques effectifs à une sous-catégorie pleine de $\mathbf{DM}^-(k)$. Pour tout entier n et tout complexe motivique $\mathbf{M}$ on note $\mathbf{M}(n)$ le produit $\mathbf{M} \otimes \mathbf{Z}(n)$.

1.2.3. *Motifs géométriques*

La catégorie $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ des motifs géométriques effectifs est la sous-catégorie épaisse de $\mathbf{DM}^{-,\mathrm{eff}}(k)$ engendrée par les motifs $\mathbf{M}(X)$ des schémas lisses. Comme le corps k vérifie la résolution des singularités, la catégorie $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ est engendrée par les motifs des schémas projectifs et lisses et elle contient les motifs de tous les schémas sur k. Cette catégorie est également construite par double localisation (invariance d'homotopie et Mayer-Vietoris) de la catégorie homotopique des complexes bornés de Smcor(k). C'est cette deuxième construction qu'utilise Bondarko [Bo09] pour munir $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ d'une structure différentielle graduée. La catégorie des motifs géométriques $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$ est obtenue par inversion du motif de Tate.

Dans la catégorie des motifs géométriques $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$, Voevodsky définit un Hom interne $\underline{\mathrm{Hom}}$ et une dualité $\mathbf{M}^* = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{M}, \mathbf{Z})$. Il associe également à tout schéma X un motif à support compact $\mathbf{M}^c(X)$, qui vérifie $\mathbf{M}^c(X) = \mathbf{M}(X)$, si X est un schéma projectif. On a, pour tout schéma X lisse de dimension n, la relation ([V-TCM] 4.3.2.)

(1.2.3.1) $$\mathbf{M}(X)^* = \mathbf{M}^c(X)(-n)[-2n].$$

1.2.4. *Triangles remarquables*

Dans la catégorie $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$ des motifs géométriques, nous utiliserons les triangles remarquables ([V-TCM]) suivants :

(1.2.4.1.) *Gysin.* Si Z est un sous-schéma fermé lisse, partout de codimension c, d'un schéma lisse X,

$$\mathbf{M}(X - Z) \to \mathbf{M}(X) \to \mathbf{M}(Z)(c)[2c] \to \mathbf{M}(X - Z)[1].$$

(1.2.4.2.) *Localisation à support compact.* Si Z est un sous-schéma fermé de X,

$$\mathbf{M}^c(Z) \to \mathbf{M}^c(X) \to \mathbf{M}^c(X - Z) \to \mathbf{M}^c(Z)[1].$$

(1.2.4.3.) *Gysin généralisé.* Si X est un schéma lisse équidimensionnel de dimension n et Z est un sous-schéma fermé de X,

$$\mathbf{M}(X - Z) \to \mathbf{M}(X) \to \mathbf{M}^c(Z)^*(n)[2n] \to \mathbf{M}(X - Z)[1].$$

On remarquera que le triangle de Gysin généralisé est obtenu par dualité à partir du triangle de localisation à support compact.

1.2.5. *Complexes $\mathbf{A}^1$-locaux*

Par la suite nous considérons des complexes de faisceaux avec transferts $L^\bullet$ qui sont $\mathbf{A}^1$-locaux, c'est-à-dire tels que pour tout complexe motivique on a

$$\mathrm{Hom}_{D^-(\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}(k)))}(\mathbf{M}, L^\cdot) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^{-,\mathrm{eff}}(k)}(\mathbf{M}, L^\cdot).$$

En travaillant dans la catégorie $D^-(\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}(k)))$ nous nous ramenons à dériver des foncteurs de la catégorie abélienne des faisceaux de Nisnevich avec transferts. Cette catégorie a assez d'injectifs [MVW 6.19] et les foncteurs Ext sont les dérivés des foncteurs Hom. Plus précisément, nous notons $\mathrm{R}^\bullet\mathrm{Hom}$ le bifoncteur dérivé $D^-(\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}(k))) \times D^+(\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}(k))) \to D(\mathcal{A}b)$ défini par $\mathrm{R}^\bullet\mathrm{Hom}(M, N) = \mathrm{Hom}^\bullet(M, I)$ où M (resp. N) est un complexe de faisceaux de Nisnevich avec transferts borné supérieurement (resp. inférieurement), I est une résolution injective de N et $\mathrm{Hom}^\bullet(-,-)$ est le complexe $n \mapsto \mathrm{Hom}(-, -[n])$. Le foncteur Ext est le foncteur cohomologique associé et on a pour tout M de $D^-(\mathrm{Shv}_{Nis}\,\mathrm{Smcor}\, k)$ et tout complexe borné N

$$\mathrm{Ext}^i(M, N) \simeq H^i(\mathrm{R}^\bullet\mathrm{Hom}(M, N)) \simeq \mathrm{Hom}_{D^-(\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}\, k))}(M, N[i]).$$

Nous utilisons abondamment le résultat suivant :

THEOREME 1.2.5.1. (Voevodsky [V-TCM]) *Si $L^{\cdot}$ est un complexe borné $\mathbf{A}^1$-local de $\mathbf{DM}^{-,\mathrm{eff}}(k)$, alors pour tout motif $\mathbf{M}(X)$ d'un schéma X lisse sur k, on a des isomorphismes*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^-(k)}(\mathbf{M}(X), L^{\cdot}[i]) & \simeq & \mathrm{Hom}_{D^-(\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}(k)))}(\mathbf{M}(X), L^{\cdot}[i]) \simeq \mathbb{H}^i_{Nis}(X, L^{\cdot}) \\ & \simeq & \mathrm{Hom}_{D^-(\mathrm{Shv}_{Zar}(\mathrm{Smcor}(k)))}(\mathbf{M}(X), L^{\cdot}[i]) \simeq \mathbb{H}^i_{Zar}(X, L^{\cdot}) \end{array}$$

où $\mathbb{H}^i_{Nis}$ (resp.$\mathbb{H}^i_{Zar}$) désigne l'hypercohomologie de Nisnevich (resp. Zariski) des complexes de faisceaux.

Le lemme ci-dessous permet de passer de la catégorie $D^-(\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}(k)))$ à $\mathbf{DM}^{-,\mathrm{eff}}(k)$.

LEMME d'homotopie 1.2.5.2. *Soit $F : D^-(\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}(k))) \to A$ (resp. $F : D^-(\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}(k))) \to T$) un foncteur cohomologique dans une catégorie abélienne A (resp. foncteur exact dans une catégorie triangulée T) qui vérifie la propriété suivante :*
pour tout schéma X lisse sur k, la première projection $\pi_X : X \times_k \mathbf{A}^1 \to X$ induit un isomorphisme

$$F(\mathbf{Z}_{tr}(X)) \simeq F(\mathbf{Z}_{tr}(X \times_k \mathbf{A}^1)).$$

Alors F se factorise en un foncteur cohomologique $F : \mathbf{DM}^{-,\mathrm{eff}}(k) \to A$ (resp. foncteur exact $F : \mathbf{DM}^-(k) \to T$).

DEMONSTRATION : Il suffit de montrer que si $f : K \to K'$ est une $\mathbf{A}^1$-équivalence de complexes de faisceaux avec transferts, alors l'image $F(Cf)$ du cône de f est nulle. Par définition, le cône Cf est dans la plus petite catégorie épaisse contenant le cône $C\pi_X$ de π_X et stable par somme directe. Le foncteur F étant cohomologique (resp. exact) commute aux sommes finies et facteurs directs et on se ramène à montrer que l'image $F(C\pi_X)$ est nulle, ce qu'implique l'hypothèse. $\square$
Par ailleurs, Voevodsky construit la catégorie $\mathbf{DM}^-_{\acute{e}t}(k)$ des complexes motiviques étales en considérant la topologie étale plutôt que la topologie de Nisnevich.

1.3. Rappels sur les sites et topos

Nous rappelons quelques notions de [SGA4] que nous utiliserons. Un site est une catégorie munie d'une topologie de Grothendieck [SGA4 II 1.15]. Pour un site $\mathcal{C}$, on note $\widehat{\mathcal{C}}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{C}}$) la catégorie des préfaisceaux (resp. faisceaux) d'ensembles du site $\mathcal{C}$. La catégorie $\widetilde{\mathcal{C}}$ est appelée topos associé au site $\mathcal{C}$. Les catégories $\widehat{\mathcal{C}}$ et $\widetilde{\mathcal{C}}$ sont munies de foncteurs canoniques $\mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{C} \to \widetilde{\mathcal{C}}$ qui à un objet C de $\mathcal{C}$ associe respectivement le préfaisceau et le faisceau représentés par l'objet C. Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux sites, un foncteur $u : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ entre les catégories sous-jacentes induit par composition un foncteur $\hat{u}^* : \widehat{\mathcal{C}'} \to \widehat{\mathcal{C}}$. Ce foncteur $\hat{u}^*$ admet un adjoint à gauche $u_! : \widehat{\mathcal{C}} \to \widehat{\mathcal{C}'}$ qui prolonge le foncteur d'origine u dans le sens que le diagramme suivant commute

(1.3.1)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "u"] \arrow[d] & \mathcal{C}' \arrow[d] \\ \widehat{\mathcal{C}} \arrow[r, "u_!"] & \widehat{\mathcal{C}'} \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les foncteurs canoniques.
Le foncteur de prolongement $u_!$ est défini de la façon suivante : pour tout objet C' de $\mathcal{C}'$ on note $I_u^{C'}$ la catégorie des couples (S, f) où S est un objet de $\mathcal{C}$ et f un morphisme $f : C' \to u(S)$ dans $\mathcal{C}'$ [loc. cit. I 5] et$(I_u^{C'})^{\mathrm{op}}$ la catégorie opposée. On pose

$$u_!F : C' \mapsto \varinjlim_{(I_u^{C'})^{\mathrm{op}}} F \circ \mathrm{pr}_{C'}(\ )$$

où $\mathrm{pr}_{C'}$ est le foncteur de $I_u^{C'}$ vers $\mathcal{C}$ qui au couple (S, f) associe l'objet S.

Si de plus, le foncteur u est continu, c'est-à-dire que pour tout faisceau G sur $\mathcal{C}'$ le préfaisceau $C \mapsto G \circ u(C)$ est un faisceau sur $\mathcal{C}$, alors le foncteur u^* induit un foncteur $u_s : \widetilde{\mathcal{C}'} \to \widetilde{\mathcal{C}}$ et ce foncteur u_s admet un adjoint à gauche u^s qui prolonge u

(1.3.2)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{u} & \mathcal{C}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\mathcal{C}} & \xrightarrow{u^s} & \widetilde{\mathcal{C}'} \end{array}$$

Le foncteur u^s est le composé du foncteur de prolongement $u_!$ défini plus haut avec le foncteur faisceau associé. Par construction, il est exact à droite et commute aux limites inductives. S'il est de plus exact à gauche, il est foncteur image inverse $u^s = \Phi^*$ d'un morphisme de topos $\Phi : \widetilde{\mathcal{C}'} \to \widetilde{\mathcal{C}}$ (loc. cit. IV.3.1.). Suivant toujours [SGA4], on note $\widetilde{\mathcal{C}}_{Ab}$ le topos abélien associé au site $\mathcal{C}$, c'est-à-dire la catégorie des faisceaux en groupes abéliens sur $\mathcal{C}$.

1.4. Site des correspondances finies et changements de base

Les topologies de Nisnevich et étale munissent les catégories $\mathrm{Sm}(k)$ et $\mathrm{Smcor}(k)$ ([BV 08]4.3.) de topologie de Grothendieck. Le fait que $\mathrm{Smcor}(k)$ soit un site pour la topologie de Nisnevich provient, comme la proposition 1.2.1.1, de ce que l'image inverse d'un point (anneau hensélien) par une correspondance finie est un point. Suivant Voevodsky, on préférera noter $\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}(k))$ et $\mathrm{Shv}_{\acute{e}t}(\mathrm{Smcor}(k))$ les topos abéliens des correspondances finies. Le foncteur canonique $\mathrm{Sm}(k) \to \mathrm{Smcor}(k)$ est continu (un préfaisceau sur $\mathrm{Smcor}(k)$ est un faisceau si c'est un faisceau sur $\mathrm{Sm}(k)$), cocontinue (les cribles sur $\mathrm{Sm}(k)$ et $\mathrm{Smcor}(k)$ sont les mêmes) et induit un morphisme de topos ([SGA4] IV 3.1.)

$$\gamma = (\gamma_*, \gamma^*, \phi) : \widetilde{\mathrm{Sm}\, k}_{Ab} \to \mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}(k)),$$

où γ_* est le morphisme image directe, $\gamma^* : \mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}(k)) \to \widetilde{\mathrm{Sm}\, k}_{Ab}$ est le morphisme oubli des transferts qui est exact et ϕ est l'isomorphisme d'adjonction.

Proposition 1.4.1. *Toute extension séparable de corps $\sigma : k \hookrightarrow K$ induit un foncteur de changement de base*

$$\begin{array}{cccc} \sigma^s : & \mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}(k)) & \to & \mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}(K)) \\ & F & \mapsto & F_K \end{array}$$

envoyant, pour tout schéma lisse X, le faisceau $\mathbf{Z}_{tr}(X)$ sur le faisceau $\mathbf{Z}_{tr}(X_K)$ avec $X_K = X \times_{\mathrm{Spec}(k)}$ $\mathrm{Spec}(K)$.
Le foncteur σ^s est exact.

Demonstration : le foncteur extension des scalaires $\alpha_K : \mathrm{Sm}(k) \to \mathrm{Sm}(K)$, défini par $X \mapsto X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(K)$ respecte les correspondances finies ([MVW] 1.12), est continu et permet de construire un foncteur changement de base. Par construction, on a pour tout faisceau avec transferts F sur $\mathrm{Sm}(k)$ et tout schéma Y lisse sur K

$$F_K(Y) = \varinjlim_{(X,f)} F(X)$$

où la limite est prise sur la catégorie des couples (X, f), où X est un schéma lisse sur k et f une correspondance de Y vers X_K. Comme l'extension est séparable, un tel Y est limite projective filtrante de variétés lisses de type fini sur k, reliées par des morphismes affines : le foncteur $F \mapsto F_K$ est exact. $\square$

Comme le foncteur σ^s préserve l'invariance d'homotopie, le motif de Tate et est compatible au produit, il induit un foncteur de changement de base

$$\begin{array}{rccc}\sigma_K : & \mathbf{DM}^-(k) & \to & \mathbf{DM}^-(K) \\ & \mathbf{M} & \mapsto & \mathbf{M}_K\end{array}$$

envoyant pour tout schéma X le motif $\mathbf{M}(X)$ sur le motif $\mathbf{M}(X_K)$.

REMARQUE 1.4.2. Si l'extension $\sigma : k \hookrightarrow K$ est finie, alors $\operatorname{Spec} K$ définit un objet de $\mathbf{DM}^-(k)$ et le foncteur de changement de base admet un adjoint à gauche σ_K^* induit par le foncteur de $\mathrm{Sm}(K)$ dans $\mathrm{Sm}(k)$, qui à Y associe Y; plus précisément, si $\mathbf{M}$ est un objet de $\mathbf{DM}^-(k)$, alors $\sigma_K^* \circ \sigma_K(\mathbf{M}) \simeq \mathbf{M} \otimes \mathbf{M}(\operatorname{Spec} K)$, que l'on note plus simplement $M \otimes K$.

En [LW 09] nous avons défini pour tout corps de caractéristique 0 un ind-motif de De Rham, limite inductive de complexes motiviques. Nous avons besoin du résultat suivant

LEMME 1.4.3. *Si $k \hookrightarrow K$ est une extension de corps de caractéristique 0, le foncteur changement de base respecte les motifs de De Rham.*

DEMONSTRATION : le foncteur de changement de base respectant les faisceaux avec transferts, il suffit de vérifier que le foncteur de changement de base $\widetilde{\mathrm{Sm}\, k}_{Ab} \to \widetilde{\mathrm{Sm}\, K}_{Ab}$ envoie le faisceau des k-différentielles de Kähler sur le faisceau des K-différentielles de Kähler. Localement, c'est la formule de changement de base des différentielles ([EGA IV] 16.6.4). □

1.5. La filtration par les poids de Bondarko

Utilisant la construction de la catégorie des motifs géométriques à partir de la catégorie des complexes bornés de schémas projectifs de $\mathrm{Smcor}(k)$, Bondarko munit la catégorie $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$ d'une structure différentielle graduée [Bo09], la graduation sur les morphismes étant induite par celle du complexe de Suslin, plus précisément par le complexe cubique de Suslin ([Bo09] Ch.1). Cela lui permet de munir $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$ d'une structure à poids ou pondérale ("weight structure"), à savoir

THEOREME 1.5.1. ([Bo] 1.1.1. et 6.5.3.)
Il existe deux sous-catégories $\mathbf{D}^{\mathbf{w}\geq \mathbf{0}}$ et $\mathbf{D}^{\mathbf{w}\leq \mathbf{0}}$ de $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$ telles que

(i) $\mathbf{D}^{\mathbf{w}\geq \mathbf{0}}$ *et* $\mathbf{D}^{\mathbf{w}\leq \mathbf{0}}$ *sont additives et Karoubiennes;*

(ii) semi-invariance par translation : $\mathbf{D}^{\mathbf{w}\geq \mathbf{0}} \subset \mathbf{D}^{\mathbf{w}\geq \mathbf{0}}[\mathbf{1}]$ *et* $\mathbf{D}^{\mathbf{w}\leq \mathbf{0}}[\mathbf{1}] \subset \mathbf{D}^{\mathbf{w}\leq \mathbf{0}}$*;*

(iii) orthogonalité : pour tout objet $\mathbf{M}$ *de* $\mathbf{D}^{\mathbf{w}\geq \mathbf{0}}$ *et tout objet* $\mathbf{L}$ *de* $\mathbf{D}^{\mathbf{w}\leq \mathbf{0}}[\mathbf{1}]$*, on a*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k)}(\mathbf{M}, \mathbf{L}) = \{0\};$$

(iv) décomposition en poids : pour tout motif géométrique $\mathbf{M}$*, il existe un triangle distingué*

$$\mathbf{M} \to \mathbf{A} \to \mathbf{B} \to \mathbf{M}[1]$$

avec $\mathbf{A}$ *objet de* $\mathbf{D}^{\mathbf{w}\leq \mathbf{0}}$ *et* $\mathbf{B}$ *objet de* $\mathbf{D}^{\mathbf{w}\geq \mathbf{0}}$*.*

REMARQUES :
1.5.2. Les catégories $\mathbf{D}^{\mathbf{w}\geq \mathbf{0}}$ et $\mathbf{D}^{\mathbf{w}\leq \mathbf{0}}$ sont construites respectivement à partir des classes de complexes bornés de schémas projectifs lisses de $\mathrm{Smcor}(k)$ qui sont concentrés en degrés positifs ou négatifs. Plus précisément, si l'on note $\mathbf{D}^{\mathbf{w}=\mathbf{0}} = \mathbf{D}^{\mathbf{w}\leq \mathbf{0}} \cap \mathbf{D}^{\mathbf{w}\leq \mathbf{0}}$, la catégorie des motifs de poids 0, Bondarko l'identifie à la catégorie de Grothendieck des motifs de Chow ([Bo] 6.2) en utilisant les résultats de Friedlander et Voevodsky [FV]. Ainsi les sommes finies de motifs de schémas projectifs lisses et leurs facteurs directs, comme les $\mathbf{Z}(i)[2i]$, sont de poids 0. Sur un corps qui vérifie la résolution des singularités, on montre en utilisant les triangles de Gysin que les schémas lisses sont de poids positifs ([Bo09] 6.2.1).

1.5.3. La décomposition en poids (iv) n'est pas unique. Néanmoins Bondarko montre que l'on peut fixer a priori pour chaque motif géométrique $\mathbf{M}$ des décompositions

$$\mathbf{M}[i] \to \mathbf{M}^{w\leq i} \to \mathbf{M}^{w\geq i+1} \to \mathbf{M}[i+1]$$

et construire un complexe ([Bo] 2.2) dit complexe des poids

$$\dots \mathbf{M}^{(i-1)} \xrightarrow{p_{i-1}} \mathbf{M}^{(i)} \xrightarrow{p_i} \mathbf{M}^{(i+1)} \to \dots$$

avec ([Bo] 1.5.6.)

$$\begin{array}{rclcccc} \mathbf{M}^{(i)} & \simeq & \text{cône} & (& \mathbf{M}^{w\leq i}[-1] & \to & \mathbf{M}^{w\leq i-1} &) \\ & \simeq & \text{cône} & (& \mathbf{M}^{w\geq i+1}[-1] & \to & \mathbf{M}^{w\geq i} &) \end{array}$$

et $\mathbf{M}^{(i)}$ est un motif de poids 0. Un tel complexe n'est pas unique et la construction n'est donc pas fonctorielle, mais il permet de construire une suite spectrale qui est fonctorielle à partir de E_2 (cf ci-dessous 1.5.9.).

Il est possible de donner une description explicite d'un complexe des poids du motif $\mathbf{M}(X)$, lorsque X est un schéma lisse et quasi-projectif sur k. Les notations sont celles de [D71], Ch.3.

Proposition 1.5.4. *Soit X un schéma lisse et quasi-projectif sur k, plongé dans un schéma projectif lisse $\overline{X}$, tel que le schéma complémentaire $Y = \overline{X} - X$ soit un diviseur à croisements normaux et à composantes irréductibles lisses $Y = \cup_{i=0}^{N-1} Y_i$. Désignons par Y^j (resp. $\widetilde{Y^j}$) la réunion (resp. somme disjointe) des intersections j à j des Y_i. On pose $\widetilde{Y^0} = Y^0 = \overline{X}$ et $\widetilde{Y} = \widetilde{Y^1} = \coprod_{0\leq i\leq N-1} Y_i$.*
Le complexe $(\mathbf{M}(X)^{(j)})$ tel que, en degré j,

$$\mathbf{M}(X)^{(j)} = \begin{cases} \mathbf{M}(\widetilde{Y^j})(j)[2j] & \textit{si } \ 0 \leq j \leq N \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

et dont les différentielles sont les sommes alternées des morphismes induits par les inclusions de $\widetilde{Y^{j+1}}$ dans $\widetilde{Y^j}$ est un complexe des poids de $\mathbf{M}(X)$.

Demonstration : on a, pour l'inclusion $X \hookrightarrow \overline{X}$, le triangle de Gysin généralisé, où $n = \dim(X)$

$$\mathbf{M}(X) \to \mathbf{M}(\overline{X}) \to \mathbf{M}(Y)^*(n)[2n] \to \mathbf{M}(X)[1]. \tag{1.5.5.}$$

Le motif $\mathbf{M}(\overline{X})$ est de poids 0 et si l'on prouve que le motif $\mathbf{M}(Y)^*(n)[2n]$ est de poids positif, alors le triangle (1.5.5) est une décomposition en poids de $\mathbf{M}(X)$ et des manipulations élémentaires dans les catégories pondérales ([Bo], lemme 1.5.4) prouvent que l'on peut choisir comme complexe des poids de $\mathbf{M}(X)$ un complexe des poids de $\mathbf{M}(Y)^*(n)[2n]$ décalé d'un degré et augmenté de $\mathbf{M}(\overline{X})$ en degré 0. Plus précisément, on obtient

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}(X)^{(j)} = (\mathbf{M}(Y)^*(n)[2n])^{(j-1)} \quad \text{si } 1 \leq j \\ &\mathbf{M}(X)^{(0)} = \mathbf{M}(\bar{X}). \end{aligned}$$

Ainsi il est équivalent de calculer les poids de $\mathbf{M}(X)$ ou de $\mathbf{M}(Y)^*(n)[2n]$. Tout repose sur le lemme

Lemme 1.5.6. *Soit $Q = \cup_{i=0}^{N-1} Q_i$ un diviseur à croisements normaux, à N composantes irréductibles lisses, d'une variété lisse P de dimension n. Un complexe des poids de $\mathbf{M} = \mathbf{M}(Q)^*(n)[2n]$ est*

$$\mathbf{M}^{(i)} = \begin{cases} \mathbf{M}(\widetilde{Q^{i+1}})(i+1)[2i+2] & \text{si } 0 \leq i \leq N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Demonstration : on procède par récurrence sur le nombre N de composantes de Q. Si $N = 1$, le schéma Q est projectif lisse de dimension $n-1$ et le motif $\mathbf{M}(Q)^*(n)[2n] = \mathbf{M}(Q)(1)[2]$ est de poids 0.
Supposons le lemme démontré pour N composantes et considérons le schéma $Q = \cup_{i=0}^{N} Q_i \hookrightarrow P$. Soit $Z = \cup_{i=0}^{N-1} Q_i$ le diviseur à croisements normaux à N composantes. Le triangle de localisation à support compact (1.2.4.2.) pour l'inclusion $Z \hookrightarrow Q$ est

$$\mathbf{M}(Z) \to \mathbf{M}(Q) \to \mathbf{M}^c(Q - Z) \to \mathbf{M}(Z)[1]. \tag{1.5.7.}$$

Le schéma $Q - Z = Q_N - (Q_{N0} \cup \ldots \cup Q_{NN-1})$, avec $Q_{Ni} = Q_N \cap Q_i$, est lisse et son complexe des poids est connu par récurrence. Par dualité, on a

$$\mathbf{M}^c(Q - Z)^* = \mathbf{M}(Q - Z)(-n+1)[-2n+2].$$

Le dual du triangle (1.5.7) devient après torsion par $\mathbf{Z}(n)[2n]$

$$\mathbf{M}(Q - Z)(1)[2] \to \mathbf{M} \to \mathbf{M}(Z)^*(n)[2n] \to \mathbf{M}(Q - Z)(1)[3]. \tag{1.5.8}$$

En appliquant à nouveau le lemme 1.5.4.de [Bo], le triangle (1.5.8.) fournit en chaque poids un triangle distingué qui est scindé, car chacune des extrémités est somme de motifs purs de poids 0 ([Bo] Prop. 1.3.1.(7)). Par conséquent le complexe des poids de $\mathbf{M}$ est la somme des deux complexes des poids de $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}(Q - Z)(1)[2]$ et de $\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}(Z)^*(n)[2n]$. On a en degré i les intersections $(i+1)$ à $(i+1)$ des Q_i, tordues par $\mathbf{Z}(i+1)[2i+2]$; dans $\mathbf{M}_1$ viennent celles où apparaît Q_N, dans M_2 celles où la composante Q_N n'apparaît pas. $\square$

1.5.9. Pour tout foncteur cohomologique H de $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$ vers une catégorie abélienne A et tout entier i, on pose

$$(W_i H)(\mathbf{M}) = \mathrm{Im}(H(w_{\leq i}\mathbf{M}) \to H(\mathbf{M}))$$

où l'on a noté $w_{\leq i}\mathbf{M} = \mathbf{M}^{w \leq i}[-i]$. On obtient ainsi une filtration croissante sur $H(\mathbf{M})$, qui ne dépend pas du choix de $\mathbf{M}^{w \leq i}$, appelée *filtration par le poids*. D'autre part, on dispose de la suite spectrale associée au complexe des poids de $\mathbf{M}$

$$E_1^{pq}(\mathbf{M}) = H^q(\mathbf{M}^{(-p)}) \Rightarrow H^{p+q}(\mathbf{M}).$$

Le terme E_1 dépend du choix du complexe des poids, mais pas le terme E_2 et la suite est fonctorielle en $\mathbf{M}$ à partir de E_2 (cf [Bo], Th 2.4.1).
Pour un motif $\mathbf{M}$, notons $\mathrm{Gr}_i^W H(\mathbf{M}) = W_i H(\mathbf{M}) / W_{i-1} H(\mathbf{M})$; on constate que

$$\begin{aligned} W_i H(\mathbf{M}[-p]) &= \mathrm{Im}(H(w_{\leq i}(\mathbf{M}[-p])) \to H(\mathbf{M}[-p])) \\ &= \mathrm{Im}(H((w_{\leq i-p}\mathbf{M})[-p]) \to H^p(\mathbf{M})) \\ &= W_{i-p} H(\mathbf{M}[-p]) = W_{i-p} H^p(\mathbf{M}), \end{aligned}$$

d'où le décalage habituel $\mathrm{Gr}_i^W H(\mathbf{M}[-p]) = \mathrm{Gr}_{i-p}^W H^p(\mathbf{M})$ (cf [D71]).
Une transformation naturelle entre deux foncteurs cohomologiques préserve les filtrations par le poids.

2. Réalisation de De Rham

2.1. Construction

En [LW 09], nous avons muni les faisceaux $X \mapsto \Omega^n_{X/k}(X)$ de transferts et défini un ind-complexe motivique $\mathbf{\Omega}^\bullet$ qui représente la cohomologie de De Rham, dans le sens que pour tout schéma X lisse sur k de dimension inférieure ou égale à n, on a

$$\mathbb{H}^p_{Zar}(X, \Omega^{\cdot}_{X/k}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^-(k)}(\mathbf{M}(X), \tau_{\leq n}\,\mathbf{\Omega}^\bullet[p])$$

où $\Omega^{\cdot}_{X/k}$ est le complexe de De Rham de X et $\tau_{\leq n}$ le foncteur de troncature à droite. On généralise la cohomologie de de Rham à tous les motifs en posant

Definition 2.1.1. La *réalisation de De Rham* de tout complexe motivique $\mathbf{M}$ est le k-espace vectoriel gradué

$$\mathbf{H}^\bullet_{DR}(\mathbf{M}) = \oplus_{p\geq 0}\mathbf{H}^p_{DR}(\mathbf{M}) = \oplus_{p\geq 0}\mathbf{H}_{DR}(\mathbf{M}[-p])$$

associé au foncteur cohomologique $\mathbf{H}_{DR}$ de $\mathbf{DM}^-(k)$ dans la catégorie des k-espaces vectoriels

$$\mathbf{H}_{DR}(\mathbf{M}) = \varinjlim_n \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^-(k)}(\mathbf{M}, \tau_{\leq n}\,\mathbf{\Omega}^\bullet).$$

Comme la cohomologie de de Rham des schémas projectifs lisses est de dimension finie, le principe (0.2.) implique que, restreinte aux motifs géométriques, la réalisation de De Rham est un k-espace vectoriel de dimension finie .

Lemme 2.1.2. *Le morphisme de faisceaux de Nisnevich* $d\log : O^* \to \Omega^1$ *commute aux transferts.*

Demonstration : en [LW09], nous avons défini le transfert sur le faisceau des différentielles Ω^1 en passant aux différentielles de Zariski Ω^{Zar}, au sens de [K73]. Soit Z une correspondance d'un schéma lisse irréductible X vers un schéma lisse Y. Comme chez Suslin et Voedvodsky [SV96] on se ramène au cas où Z est la normalisée de X dans une extension galoisienne finie du corps des fonctions $K(X)$ de X, de groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(K(Z)/K(X))$. On doit démontrer la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} O^*_Z(Z) \arrow[r, "d\log"] \arrow[d, "N"] & \Omega^1_Z(Z) \arrow[d, "T_{Z/X}"] \\ O^*_X(X) \arrow[r, "d\log"] & \Omega^1_X(X) \end{tikzcd}$$

où N est la norme $N(f) = \prod_{\sigma\in G}\sigma(f)$ et $T_{Z/X}$ le transfert qui a été défini en (loc. cit) comme la composée

$$\Omega^1_Z(Z) \xrightarrow{\alpha_Z} \Omega^{Zar}_Z(Z) \xrightarrow{\sum_{\sigma\in G}\sigma^*} \Omega^{Zar}_X(X) \xrightarrow[\simeq]{\alpha_X^{-1}} \Omega^1_X(X).$$

Ici, pour tout schéma U, on désigne par Ω^{Zar}_U le faisceau bidual (au sens de O_U-module dans la topologie de Zariski sur U) de Ω^1_U et $\alpha_U : \Omega^1_U \to \Omega^{Zar}_U$ l'application canonique qui consiste à quotienter par la torsion. Le morphisme α_U est un isomorphisme quand le schéma U est lisse.

Si le schéma Z est lisse, le transfert coïncide avec la trace $Tr = \sum_{\sigma\in G}\sigma^*$ et le lemme est la traduction de la propriété $d\log\circ N = Tr\circ d\log$.

Si le schéma Z n'est que normal, il suffit de vérifier que cette propriété n'est pas altérée par le passage au bidual. En remarquant que pour toute fonction inversible f de $O^*_Z(Z)$, la forme $\omega = d\log f$ vérifie la propriété caractéristique des différentielles de Zariski sur un schéma normal, à savoir

$$P(Z) : \forall x \in Z, \forall D \in Der_k(O_x, O_x), \tilde{D}(\omega) \in O_x$$

où $Der_k(O_x, O_x)$ est l'espace des k-dérivations de l'anneau local O_x dans lui-même et $\tilde{D} : \Omega^1_{O_x/k} \to O_x$ est le morphisme O_x- linéaire canoniquement associé à la différentielle D.

Or on a, pour toute fonction $f \in O^*_Z(Z)$ et tout point x de Z,

$$\tilde{D}(d\log f) = \tilde{D}(\frac{df_x}{f_x}) = \frac{Df_x}{f_x} \in O_x.$$

$\square$

Ce morphisme $d\log$ induit le morphisme de $\mathbf{DM}^-(k)$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbf{Z}(1) & : & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^* & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle d\log} & & \\
\tau_{\leq 1}\,\mathbf{\Omega}^\bullet & : & 0 & \longrightarrow & \mathcal{O} & \xrightarrow{d} & \mathbf{\Omega}^1 & \xrightarrow{d} & \mathrm{Ker}(d)
\end{array} \tag{2.1.3}$$

qui produit un générateur de $\mathbf{H}^0_{DR}(\mathbf{Z}(1))$.
Un générateur de $\mathbf{H}^0_{DR}(\mathbf{Z}(n))$, lorsque n est un entier positif, est induit par le morphisme issu du produit sur $\mathbf{\Omega}^\bullet$ [LW09]

$$\mathbf{Z}(n) = \mathbf{Z}(1)^{\otimes n} \xrightarrow{d\log^{\otimes n}} (\tau_{\leq 1}\,\mathbf{\Omega}^\bullet)^{\otimes n} \to \tau_{\leq n}\,\mathbf{\Omega}^\bullet\,. \tag{2.1.4}$$

Ces morphismes induisent des classes de Chern

$$c^{p,q}_{DR} : H^{p,q}(\mathbf{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^-(k)}(\mathbf{M}, \mathbf{Z}(q)[p]) \to \mathbf{H}^p_{DR}(\mathbf{M})$$

définies pour tout complexe motivique $\mathbf{M}$ de $\mathbf{DM}^-$.
Le produit de [LW09] fournit aussi pour toute paire de complexes motiviques $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$ de $\mathbf{DM}^-(k)$ un accouplement

$$\mathbf{H}^{p_1}_{DR}(\mathbf{M}_1) \otimes \mathbf{H}^{p_2}_{DR}(\mathbf{M}_2) \to \mathbf{H}^{p_1+p_2}_{DR}(\mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_2).$$

Remarque 2.1.5. : les lecteurs familiers avec la catégorie des complexes motiviques non bornés $DM(k)$ de Cisinski et Déglise [CD 08] éviteront de tronquer le complexe de De Rham en posant pour tout entier p

$$\mathbf{H}^p_{DR}(\mathbf{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}(k)}(\mathbf{M}, \mathbf{\Omega}^\bullet[p])$$

Il est clair que les deux définitions coïncident sur les motifs $\mathbf{M}(X)$ des schémas lisses X et donc sur les motifs géométriques; mais également sur la catégorie $\mathbf{DM}^-$ en vertu de la proposition suivante.

Proposition 2.1.6. *Pour tout complexe motivique* $\mathbf{M}$ *de* $\mathbf{DM}^-(k)$, *on a pour tout entier* i, *les isomorphismes*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}(k)}(\mathbf{M}, \mathbf{\Omega}^\bullet[i]) \simeq \varinjlim_n \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^-(k)}(\mathbf{M}, \tau_{\leq n}\,\mathbf{\Omega}^\bullet[i]).$$

Demonstration : la propriété ci-dessus étant stable par quasi-isomorphisme, décalage et cône, il suffit par le lemme 9.3 de [MVW] de vérifier que pour toute famille de schémas lisses $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ on a

$$\prod_{\alpha\in A} \varinjlim_n \mathrm{Hom}_{D^-}(\mathbf{Z}_{tr}(X_\alpha), \tau_{\leq n}\,\mathbf{\Omega}^\bullet[i]) = \varinjlim_n \prod_{\alpha\in A} \mathrm{Hom}_{D^-}(\mathbf{Z}_{tr}(X_\alpha), \tau_{\leq n}\,\mathbf{\Omega}^\bullet[i])$$

ce qui provient du fait que les complexes $\mathbf{Z}_{tr}(X_\alpha)$ sont concentrés en degré zéro, les complexes $\tau_{\leq n}\,\mathbf{\Omega}[i]$ sont bornés et la suite de droite est stationnaire pour $n > i$. □

Definition 2.1.7. Pour $q \in \mathbf{Z}$ et $\mathbf{M}$ un complexe motivique, on définit la réalisation de De Rham $\mathbf{H}_{DR}(\mathbf{M}, q)$ par l'égalité de k-espaces vectoriels

$$\mathbf{H}_{DR}(\mathbf{M}, q) = \mathbf{H}_{DR}(\mathbf{M}).$$

2.2. Filtration par les poids

La filtration par les poids est induite sur le foncteur cohomologique par la structure de poids définie par Bondarko [Bo]

$$W_i\mathbf{H}_{DR}(\mathbf{M}) = \mathrm{Im}(\mathbf{H}_{DR}(w_{\leq i}\mathbf{M}) \to \mathbf{H}_{DR}(\mathbf{M})),$$

qui induit la filtration sur $\mathbf{H}^p_{DR}(\mathbf{M})$

(2.2.1) $$W_i\mathbf{H}^p_{DR}(\mathbf{M}) = W_{i+p}\mathbf{H}_{DR}(\mathbf{M}[-p]).$$

Proposition 2.2.2. *Si X est un schéma lisse quasi-projectif sur k, la filtration W sur $\mathbf{H}^\bullet_{DR}(\mathbf{M}(X))$ coïncide avec la filtration par le poids classique de la cohomologie de X.*

Nous choisissons comme référence les travaux de Deligne en théorie de Hodge, plus précisément ([D71] Ch.3), repris sur un corps k par Jannsen ([J90]). Les calculs, à base de pôles logarithmiques, y sont faits en cohomologie analytique mais s'adaptent en cohomologie de De Rham. Le reste de ce paragraphe consiste en la démonstration de la proposition 2.2.2.
Reprenons les notations de la proposition 1.5.4 : le schéma X étant lisse et quasi-projectif sur k comme dans (loc. cit)(3.2.1), on le plonge dans un schéma projectif lisse $\overline{X}$, tel que le schéma complémentaire $Y = \overline{X} - X$ soit un diviseur à croisements normaux et à composantes irréductibles lisses $Y = \cup_{i=0}^{N-1} Y_i$. Comme en (loc. cit.), on désigne par Y^j (resp. $\widetilde{Y^j}$) la réunion (resp. somme disjointe) des intersections j à j des Y_i. On pose $\widetilde{Y^0} = Y^0 = \overline{X}$ et $\widetilde{Y} = \widetilde{Y^1} = \coprod_{0\leq i\leq N-1} Y_i$. On a vu que $\mathbf{M}(X)^{(0)} = \mathbf{M}(\bar{X})$ et $\mathbf{M}(X)^{(k)} = \mathbf{M}(\widetilde{Y^k})(k)[2k]$ pour $1 \leq k \leq N-1$.
La suite spectrale de Bondarko ([Bo] 2.4.1.)

$$E_1^{pq}(\mathbf{M}(X)) = \mathbf{H}^q_{DR}(\mathbf{M}(X)^{(-p)}) \Rightarrow \mathbf{H}^{p+q}_{DR}(\mathbf{M}(X))$$

coïncide alors avec la suite spectrale de Jannsen ([J90], I3.) ou de Deligne ([D71] 3.2.7) lorsque $k = \mathbf{C}$

$${}_WE_1^{p,q}(X) = \mathbb{H}^{q+2p}(\widetilde{Y^{-p}}, \Omega^\bullet_{Y^{-p}}) \otimes_k \mathbf{H}^0_{DR}(\mathbf{Z}(-p)) \simeq \mathbb{H}^{q+2p}(\widetilde{Y^{-p}}, \Omega^\bullet_{Y^{-p}}),$$

en tant que k-espaces vectoriels. On en déduit qu'elle dégénère en E_2 (cf. corollaire 3.2.13, [De71], lorsque $k = \mathbf{C}$) ainsi que l'isomorphisme

$$E_2^{p,q}(\mathbf{M}(X)) = \mathrm{Gr}_q^W\, \mathbf{H}^{p+q}_{DR}(\mathbf{M}(X)),$$

qui tient compte du décalage. □

Definition 2.2.3. Sur $\mathbf{H}_{DR}(\mathbf{M}, q)$, où $q \in \mathbf{Z}$ et $\mathbf{M}$ est un motif géométrique, on définit la filtration par le poids, indexée par $\mathbf{Z}$, par

$$W_i\mathbf{H}_{DR}(\mathbf{M}, q) = \mathrm{Im}(\mathbf{H}_{DR}(w_{\leq i+2q}\mathbf{M}) \to \mathbf{H}_{DR}(\mathbf{M}, q)) = W_{i+2q}\mathbf{H}_{DR}(\mathbf{M}).$$

2.3. Filtration de Hodge

La réalisation de De Rham est équipée d'une deuxième filtration. La précédente a été obtenue en tronquant, dans la représentation $\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^-}(\mathbf{M},\mathbf{\Omega}^\bullet)$, la première variable ou plus précisément le complexe de poids de la première variable. La seconde filtration est obtenue en tronquant la deuxième variable, à savoir le complexe de De Rham $\mathbf{\Omega}^\bullet$.

Dans la catégorie dérivée $D = D_{Nis}(\mathrm{Smcor}(k))$ des complexes de faisceaux avec transferts, la filtration bête

$$(\sigma_{\geq p}\,\mathbf{\Omega})^q(X) = \begin{cases} \Omega^q_{X/k}(X) & \text{si} \quad p \leq q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

fournit pour tout complexe borné K de $D^-_{Nis}(\mathrm{Smcor}(k))$ une suite spectrale

(2.3.1) $$E_1^{p,q}(K) = \mathrm{Hom}_D(K,\mathbf{\Omega}^p[p+q]) \Rightarrow \mathrm{Hom}_D(K,\mathbf{\Omega}^\bullet[p+q]).$$

Cette suite spectrale est fonctorielle en K mais on a de plus, comme pour la suite spectrale des poids de Bondarko, qu'elle est fonctorielle sur $\mathbf{DM}^-(k)$ à partir du terme E_2 :

Proposition 2.3.2 *Si $f : K \to K'$ est une $\mathbf{A}^1$-équivalence de complexes de faisceaux avec transferts dans $D^-_{Nis}(\mathrm{Smcor}(k))$, alors on a, pour tout $r \geq 2$ et tout couple d'entiers (p,q), des isomorphismes*

$$E_r^{p,q}(K') \simeq E_r^{p,q}(K).$$

Demonstration : il suffit de montrer qu'on a pour tout couple d'entiers (p,q) un isomorphisme

$$E_2^{p,q}(K') \simeq E_2^{p,q}(K)$$

compatible aux différentielles. En adaptant la démonstration du lemme d'homotopie aux bicomplexes, on se ramène à prouver que pour tout schéma X lisse sur k, la projection $\pi_X : X \times_k \mathbf{A}^1 \to X$ induit pour tout couple d'entiers (p,q) un isomorphisme

(2.3.3) $$E_2^{p,q}(\mathbf{Z}_{tr}(X)) \simeq E_2^{p,q}(\mathbf{Z}_{tr}(X \times_k \mathbf{A}^1)).$$

Sur le site X_{Nis}, considérons les complexes de faisceaux $\Omega^{\cdot}_X$ et $\pi_{X*}\Omega^{\cdot}_{X\times_k\mathbf{A}^1}$. Les membres de l'isomorphisme (2.3.3) sont les termes E_2 des suites spectrales associées à la filtration bête des complexes respectifs. D'après [Ver96](4.4.3.), ces suites coïncident à partir de E_2 lorsque les deux complexes sont homotopes. Or la décomposition des formes différentielles et la formule de projection impliquent l'isomorphisme

$$\pi_{X*}\Omega^{\cdot}_{X\times\mathbf{A}^1} \simeq \Omega^{\cdot}_X \otimes_{O_X} \pi_{X*}\pi^{-1}_{\mathbf{A}^1}\Omega^{\cdot}_{\mathbf{A}^1}$$

qui permet de remonter l'homotopie induite par l'intégration

$$\begin{array}{cccc} s: & \Omega^1_{\mathbf{A}^1} & \to & O_{\mathbf{A}^1} \\ & f(t)dt & \mapsto & \int_0^t f(u)du \end{array}$$

en une homotopie entre l'application composée $\Omega^{\cdot}_{X\times_k\mathbf{A}^1} \to \Omega^{\cdot}_X \to \Omega^{\cdot}_{X\times_k\mathbf{A}^1}$ et l'identité. □

On a ainsi une suite spectrale $E_r^{p,q}(\mathbf{M})$, $r \geq 2$ définie pour tout complexe motivique $\mathbf{M}$. Si de plus le motif $\mathbf{M}$ est géométrique, le principe (0.2.) implique que les espaces vectoriels sont de dimension finie et que la suite spectrale (2.3.3) $E_2^{p,q}(\mathbf{M})$ d'aboutissement $\mathbf{H}_{DR}(\mathbf{M})$ dégénère et définit sur $\mathbf{H}_{DR}(\mathbf{M})$ la filtration régulière

(2.3.4.) $$F^q\mathbf{H}^p_{DR}(\mathbf{M}) = \varinjlim_{n\geq q} \mathrm{Im}\left(\mathrm{Hom}_{D^-_{Nis}}(\mathbf{M},\sigma_{\geq q}\tau_{\leq n}\,\mathbf{\Omega}^\bullet[p]) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^-}(\mathbf{M},\tau_{\leq n}\,\mathbf{\Omega}^\bullet[p])\right).$$

Cette filtration est appelée *filtration de Hodge* en vertu de la proposition suivante, immédiate, puisque la filtration est induite par la filtration bête de $\Omega^{\cdot}_X$

Proposition 2.3.5 *Si $\mathbf{M} = \mathbf{M}(X)$ est le motif associé à un schéma X lisse projectif, la filtration F définie par la suite spectrale (2.3.3) est la filtration de Hodge du schéma X.*

Definition 2.3.6. La définition de la filtration de Hodge s'étend aux réalisations $\mathbf{H}_{DR}(\mathbf{M},q)$, où $q \in \mathbf{Z}$ et $\mathbf{M}$ est un complexe motivique, en posant

$$F^p\mathbf{H}_{DR}(\mathbf{M},q) = F^{p+q}\mathbf{H}_{DR}(\mathbf{M}).$$

3. Réalisation de Betti

Cette partie est largement inspirée des travaux de Suslin et Voevodsky [SV96] et a été résumée en [L08].

3.1. Réalisation topologique des motifs sur C.

Nous travaillons sur le site $\mathrm{Sm}(\mathbf{C})$ des schémas lisses sur le corps des nombres complexes, muni de la topologie de Nisnevich, et sur le site CW des espaces topologiques réels admettant une triangulation, muni de la topologie des homéomorphismes locaux.
Le foncteur $\theta : \mathrm{Sm}(\mathbf{C}) \to CW$ qui à un schéma X associe la variété $X(\mathbf{C})$ des points complexes est continu. Il induit un foncteur $\theta^s : \widetilde{\mathrm{Sm}\,\mathbf{C}} \to \widetilde{CW}$ prolongeant θ.

Proposition 3.1.1. *Si X est un schéma projectif lisse, l'image $\theta^s(\mathbf{Z}_{tr}(X))$ est le faisceau*

$$U \mapsto \mathrm{Hom}(U, \coprod_{d\geq 0} S^d X(\mathbf{C}))^+$$

où le schéma S^dX est la puissance symétrique du schéma X et pour tout monoïde M, on désigne par M^+ le groupe groupe de Grothendieck associé.

Demonstration : le résultat repose essentiellement sur le théorème de Suslin et Voevodsky.

Theoreme 3.1.2. (Suslin et Voedvosky [SV96 Theorem 6.8])
Si X est un schéma quasi-projectif sur un corps k, on a, pour tout schéma (normal et connexe) S, un isomorphisme de groupes

$$\mathbf{Z}_{tr}(X)(S) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}\,k}(S, \coprod_{d\geq 0} S^d(X))^+ \ ,$$

où la catégorie $\mathrm{Sch}\,k$ *est celle des schémas de type fini sur k.*

Le foncteur θ^s respectant les foncteurs représentables, il envoie, pour tout entier positif d et tout schéma lisse X, le faisceau représenté par X^d sur le faisceau représenté par $X^d(\mathbf{C})$. Par ailleurs, le foncteur θ^s commute aux colimites finies (comme le quotient par les groupes de permutation) mais également aux colimites quelconques ([SGA4] III 1.3.) : il envoie le faisceau représenté par le ind-schéma lisse $\coprod_{d\geq 0} S^dX$ sur le faisceau représenté par l'espace $\coprod_{d\geq 0} S^d(X(\mathbf{C}))$. Comme le foncteur est compatible aux structures algébriques, la proposition (3.1.1.) s'en déduit. □

Composant le foncteur θ^s avec le foncteur exact oubli de transferts, nous obtenons un foncteur exact à droite qui se factorise dans les faisceaux abéliens en un foncteur monoïdal

$$\Phi : \mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}\,\mathbf{C}) \to \widetilde{CW}_{Ab}$$

de la catégorie des faisceaux de Nisnevich avec transferts vers le topos abélien $\widetilde{CW}_{Ab}$. En composant de plus avec le foncteur complexe de Suslin C_* qui est exact, nous obtenons un foncteur, toujours exact à droite,

$$\Psi : \mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}\,\mathbf{C}) \to C^-(\widetilde{CW}_{Ab})$$

où $C^-(\widetilde{CW}_{Ab})$ est la catégorie abélienne des complexes bornés supérieurement de faisceaux abéliens. C'est ce foncteur que nous dérivons en utilisant la classe Σ des sommes de faisceaux $\oplus_\alpha \mathbf{Z}_{tr}(V_\alpha)$ où les V_α parcourent les schémas lisses quasi-projectifs tels que la variété des points complexes $V_\alpha(\mathbf{C})$ soit à composantes connexes contractiles. Cette classe Σ d'objets est bien sûr stable par somme directe et permet via la proposition 1.2.1.1 de construire des résolutions à gauche de tout faisceau avec transferts. Pour que le foncteur Ψ admette un foncteur dérivé à gauche, il suffit par [Ver77] de vérifier que les objets de Σ sont acycliques à gauche en montrant

Lemme 3.1.3. *Soit N un complexe acyclique et borné supérieurement d'objets $\oplus_\alpha \mathbf{Z}_{tr}(V_\alpha)$ de Σ. Alors $\Psi(N)$ est acyclique.*

Demonstration : pour tout entier i, nous devons montrer que le faisceau de Nisnevich associé au préfaisceau $H_i(\Psi(N))$ est nul. Cela revient à montrer que pour tout préfaisceau F tel que le faisceau associé F_{Nis} soit nul, les dérivés $L^n\Phi(F)$ sont nuls. Comme en [MVW] 8.15 on se ramène au cas d'un complexe de recouvrement de Cech et nous devons montrer le lemme suivant :

Lemme 3.1.4. *Si $\mathcal{U} = \{U_i \to X\}$ est un recouvrement de Nisnevich d'un schéma X lisse quasi-projectif sur $\mathbf{C}$ par des ouverts dont les points complexes sont à composantes contractiles, alors l'image par le foncteur Φ du complexe de Cech $\check{N}(\mathcal{U}/X)$ est acyclique.*

Ce lemme repose sur les travaux de Suslin et Voevodsky en [SV96] section 10 qui ont réinterprété le théorème de Dold-Thom en

Proposition 3.1.5. *Si X est un schéma lisse quasi-projectif sur $\mathbf{C}$, l'image $\Phi(\mathbf{Z}_{tr}(X))$ est quasi-isomorphe au complexe des chaînes singulières de la variété topologique $X(\mathbf{C})$.*

Demonstration : par dualité il est équivalent de montrer que le bicomplexe de cochaînes

$$Sing^{\cdot}(X(\mathbf{C})) \to Sing^{\cdot}(\check{N}\mathcal{U}(\mathbf{C}))$$

est acyclique. D'après la proposition 3.1.5 le bicomplexe $Sing^{\cdot}(\check{N}\mathcal{U}(\mathbf{C}))$ calcule la cohomologie de Cech $\check{H}^*(X(\mathbf{C}))$ de $X(\mathbf{C})$ qui est égale à la cohomologie singulière de $X(\mathbf{C})$) par un théorème de Cartan [Go 58]5.9.2.

$\square$

Nous en déduisons un foncteur $L\Psi : D^-(\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}\,\mathbf{C})) \to D(Ab)$ qui par le lemme d'homotopie (1.2.5.2) se factorise en un foncteur dit de réalisation topologique $t_{\mathbf{C}} : \mathbf{DM}^{-,\mathrm{eff}}(\mathbf{C}) \to D(\mathcal{A}b)$.

Par le théorème d'Eilenberg-Zilber, le foncteur Ψ est compatible au produit et son dérivé $t_{\mathbf{C}}$ commute au produit de $\mathbf{DM}^{-,\mathrm{eff}}(\mathbf{C})$ également défini à partir des résolutions par les $\mathbf{Z}_{tr}(X)$.

L'image de $\mathbf{Z}(1) = C_*\mathbf{Z}_{tr}(\mathbf{G}_m^{\wedge 1})[-1]$ est le complexe calculant l'homologie singulière réduite de $\mathbf{C}^*$, décalé de -1, d'où $t_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z}(1)) \simeq 2i\pi\mathbf{Z}$, complexe concentré en degré 0, par le théorème des résidus. Comme le foncteur $t_{\mathbf{C}}$ est tensoriel et envoie le motif de Tate $\mathbf{Z}(1)$ sur un objet inversible, il s'étend en un foncteur de $\mathbf{DM}^-(\mathbf{C})$ et les résultats de ce paragraphe se résument en

Theoreme 3.1.6. *Il existe un foncteur tensoriel de réalisation topologique*

$$\begin{array}{rccc} t_{\mathbf{C}} : & \mathbf{DM}^-(\mathbf{C}) & \to & D(\mathcal{A}b) \\ & \mathbf{M} & \mapsto & \mathbf{M}(\mathbf{C}), \end{array}$$

qui pour le motif $\mathbf{M} = \mathbf{M}(X)$ associé à un schéma X quasi-projectif lisse sur $\mathbf{C}$ permet de représenter la cohomologie singulière de $X(\mathbf{C})$, c'est-à-dire

$$H^p(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}_{D^-(\mathcal{A}b)}(t_{\mathbf{C}}(\mathbf{M}(X)), \mathbf{Z}[p]).$$

La compatibilité du foncteur de réalisation au produit impose

$$t_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z}(n)) = (2i\pi)^n\mathbf{Z}.$$

3.2. Réalisation topologique des motifs sur R.

Si le schéma X est défini sur $\mathbf{R}$, la variété analytique $X(\mathbf{C}) = (X \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbf{R}} \mathrm{Spec}\,\mathbf{C})(\mathbf{C})$ est munie d'une action continue de la conjugaison complexe F_∞. En suivant cette action dans la construction précédente, on montre que le foncteur de réalisation topologique se factorise en un diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{DM}^-(\mathbf{R}) \arrow[r, "t_{\mathbf{C},F_\infty}"] \arrow[d, "\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}"] & D(\mathcal{A}b^{\sigma_2}) \arrow[d] \\ \mathbf{DM}^-(\mathbf{C}) \arrow[r, "t_{\mathbf{C}}"] & D(\mathcal{A}b) \end{tikzcd}$$

où $\mathcal{A}b^{\sigma_2}$ est la catégorie abélienne des groupes abéliens munis d'une involution et la flèche de droite est induite par l'oubli de l'involution.

Le motif de Tate $\mathbf{Z}(1)$ est réel et, sur sa réalisation $t_{\mathbf{C}}(\mathbf{Z}(1))$, l'involution est induite par le changement d'orientation de $\mathbf{S}^1$ dans $\mathbf{C}^*$ et agit par multiplication par -1.

3.3. Réalisation de Betti des motifs

Pour toute place $\sigma : k \to \mathbf{C}$ du corps de nombres k, l'extension des scalaires $\sigma_{\mathbf{C}} : \mathbf{DM}^-(k) \to \mathbf{DM}^-(\mathbf{C})$ construite en 1.4, composée avec la réalisation topologique, définit un foncteur

$$\begin{array}{cccc} t_\sigma & : & \mathbf{DM}^-(k) & \to & D(\mathcal{A}b) \\ & & \mathbf{M} & \mapsto & \mathbf{M}_\sigma(\mathbf{C}) := t_{\mathbf{C}} \circ \sigma_{\mathbf{C}}(\mathbf{M}). \end{array}$$

Si la place σ est réelle, le foncteur t_σ se factorise dans la catégorie des groupes abéliens munis d'une involution (3.2).
On pose alors $\mathbf{H}_\sigma(\mathbf{M}, q) = \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A}b)}(\mathbf{M}_\sigma(\mathbf{C}), (2i\pi)^q\mathbf{Z})$ et l'on définit

Definition 3.3.1. *Pour tout complexe motivique* $\mathbf{M}$ *de* $\mathbf{DM}^-(k)$*, toute place* $\sigma : k \to \mathbf{C}$ *et tout entier* $q \geq 0$*, la réalisation entière (resp. réalisation) de Betti* $\mathbf{H}^\bullet_\sigma(\ , \mathbf{Z}(q))$ *(resp.* $\mathbf{H}^\bullet_\sigma(\ , q)$*) est le groupe abélien (resp.* $\mathbf{Q}$*-espace vectoriel) gradué sur* $\mathbf{Z}$

$$\mathbf{H}^\bullet_\sigma(\mathbf{M}, \mathbf{Z}(q)) = \oplus_{p\in\mathbf{Z}} \mathbf{H}^p_\sigma(\mathbf{M}, \mathbf{Z}(q)),$$

et

$$\mathbf{H}^p_\sigma(\mathbf{M}, q) = \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{H}^p_\sigma(\mathbf{M}, \mathbf{Z}(q)).$$

Si la place σ *est réelle, le complexe* $\mathbf{M}_\sigma(\mathbf{C})$ *est muni d'une involution induite par la conjugaison complexe et les réalisations* $\mathbf{H}^\bullet_\sigma(\ , \mathbf{Z}(q))$ *et* $\mathbf{H}^\bullet_\sigma(\ , q)$ *héritent de cette structure.*

Le foncteur t_σ induit directement des classes de Chern, pour des entiers p et q et tout complexe motivique $\mathbf{M}$ de $\mathbf{DM}^-(k)$

$$c^{p,q}_\sigma : H^{p,q}(\mathbf{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^-(k)}(\mathbf{M}, \mathbf{Z}(q)[p]) \to \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A}b)}(\mathbf{M}_\sigma(\mathbf{C}), (2i\pi)^q\mathbf{Z}[p]) = \mathbf{H}^p_\sigma(\mathbf{M}, \mathbf{Z}(q)).$$

Si le complexe motivique $\mathbf{M} = \mathbf{M}(X)$ est le motif d'un schéma quasi-projectif lisse sur k, les groupes de réalisation de Betti coïncident d'après (3.1.4) avec les groupes de cohomologie singulière

$$\mathbf{H}^p_\sigma(\mathbf{M}(X), \mathbf{Z}(q)) = H^p(X(\mathbf{C}), (2i\pi)^q\mathbf{Z}).$$

3.3.2. *Filtration par le poids*
Par ailleurs, la réalisation de Betti $\mathbf{H}_\sigma(, \mathbf{Z})$, pour $q = 0$, étant un foncteur cohomologique, elle hérite de la filtration par le poids décrite en 1.5.9, à savoir, pour $i \in \mathbf{Z}$,

$$W_i\mathbf{H}_\sigma(\mathbf{M}, \mathbf{Z}) = \mathrm{Im}(\mathbf{H}_\sigma(w_{\leq i}\mathbf{M}, \mathbf{Z}) \to \mathbf{H}_\sigma(\mathbf{M}, \mathbf{Z})).$$

Le calcul fait en 2.2 dans le cadre de la réalisation de De Rham montre que cette filtration coïncide avec celle de Deligne après avoir tensorisé par $\mathbf{C}$. En particulier, pour un schéma lisse X que l'on plonge dans $\overline{X}$, la suite spectrale de Bondarko associé à $\mathbf{H}_\sigma$ est isomorphe (à renumérotation près) à la suite spectrale de Leray de la cohomologie singulière pour l'inclusion $X(\mathbf{C}) \hookrightarrow \overline{X}(\mathbf{C})$.

Definition 3.3.3. Pour tout $q \in \mathbf{Z}$ et tout motif géométrique $\mathbf{M}$, on appelle *filtration par le poids* de la réalisation de Betti $\mathbf{H}_\sigma(\mathbf{M}, \mathbf{Z}(q))$, la filtration croissante indexée par $\mathbf{Z}$ déduite par la filtration par le poids de Bondarko

$$W_i\mathbf{H}_\sigma(\mathbf{M}, \mathbf{Z}(q)) = \mathrm{Im}(\mathbf{H}_\sigma(w_{\leq i+2q}\mathbf{M}, \mathbf{Z}(q)) \to \mathbf{H}_\sigma(\mathbf{M}, \mathbf{Z}(q))).$$

Le principe (0.2.) se traduit en

Proposition 3.3.4. *Pour chaque place infinie* σ*, et chaque entier positif* q *les foncteurs réalisations de Betti* $\mathbf{H}_\sigma(, \mathbf{Z}(q))$ *induisent des foncteurs cohomologiques de la catégorie des motifs géométriques sur* k *vers la catégorie des* $\mathbf{Z}$*-modules filtrés de type fini. Si de plus la place est réelle, la réalisation est munie d'une involution induite par la conjugaison complexe.*

4. Réalisation l-adique

Pour un premier l fixé, nous définissons la cohomologie étale à coefficients dans $\mathbf{Z}_l$.

4.1.Cohomologie l-adique des complexes motiviques étales

Nous travaillons dans la catégorie $\mathbf{DM}^-_{ét}(k)$ des complexes motiviques étales de Voevodsky ([V-TCM]p.214). Pour tout entier positif n et tout complexe motivique étale $\mathbf{M}$, les groupes

$$\mathrm{R}^p \operatorname{Hom}(\mathbf{M}, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{DM}^-_{ét}(k)}(\mathbf{M}, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)[p])$$

fournissent un système projectif dans la catégorie des complexes de groupes abéliens et on pose en s'inspirant de [J88]

$$R_l(\mathbf{M}, q) = \mathrm{R}\varprojlim_n \mathrm{R}^\bullet \operatorname{Hom}_{\mathbf{DM}^-_{ét}(k)}(\mathbf{M}, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q))$$

où $\mathrm{R}^\bullet \operatorname{Hom}$ est le foncteur (ici en version étale) discuté en 1.2 et $\mathrm{R}\varprojlim$ désigne le foncteur dérivé de $\varprojlim$ dans la catégorie des groupes abéliens.

Proposition 4.1.1. *Si le motif $\mathbf{M}(X)$ est le motif étale associé à un schéma X lisse sur k, on retrouve la cohomologie étale continue de X définie par Jannsen en [J88]*

$$H^p(R_l(\mathbf{M}(X), q)) = H^p_{\mathrm{cont}}(X, \mathbf{Z}_l(q)).$$

Demonstration : la version étale du théorème 1.2.5.1 [MVW] (theorem 10.2) et le fait que le complexe de faisceaux étales $\mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)$ est quasi-isomorphe au faisceau étale $\mu_{l^n}^{\otimes q}$ (loc. cit. theorem 10.3) impliquent

$$\mathrm{R}^\bullet \operatorname{Hom}_{\mathbf{DM}^-_{ét}(k)}(\mathbf{M}(X), \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)) = \mathrm{R}\Gamma_{ét}(X, \mu_{l^n}^{\otimes q}).$$

La proposition s'en déduit par la propriété de composition des foncteurs dérivés [Ver77](2.3.1). □

Proposition 4.1.2. *Pour tout complexe motivique étale $\mathbf{M}$, on a la suite exacte courte*

$$0 \to \varprojlim_n{}^1 \mathrm{R}^{p-1} \operatorname{Hom}(\mathbf{M}, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)) \to H^p(R_l(\mathbf{M}, q)) \to \varprojlim_n \mathrm{R}^p \operatorname{Hom}(\mathbf{M}, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)) \to 0.$$

où l'on a choisi la notation standard $\varprojlim_n{}^1 = \mathrm{R}^1 \varprojlim$.

Demonstration : comme on considère la limite projective dans la catégorie Ab qui vérifie l'axiome $AB4^*$ de Grothendieck [Gro57], le foncteur $\mathrm{R}\varprojlim$ est de dimension cohomologique finie (on a même $\mathrm{R}\varprojlim^2 = 0$ pour un système dénombrable filtrant [Gob70]). Pour M fixé on choisit un représentant K du motif étale M dans la catégorie $C^-(\mathrm{Shv}_{ét}(\mathrm{Smcor}\, k))$ des complexes (bornés supérieurement) des faisceaux étales avec transferts. On applique le résultat de Jannsen [J88](Proposition 1.6) au foncteur $h : \mathcal{A} = \mathrm{Shv}_{ét}(\mathrm{Smcor}) \to Ab$, $A \mapsto \operatorname{Hom}_{C^-(\mathrm{Shv}_{ét}(\mathrm{Smcor}\, k))}(K, A)$, où le faisceau A est vu comme le complexe concentré en degré 0 et au système projectif $n \mapsto A_n = \mu_{l^n}^{\otimes q}$. On conclut en remarquant que les A_n sont des objets A^1-locaux et que l'on a

$$\mathrm{R}^p \operatorname{Hom}_{C^-(\mathrm{Shv}_{ét}(\mathrm{Smcor}\, k))}(K, A_n) = \mathrm{R}^p \operatorname{Hom}_{\mathbf{DM}^-_{ét}(k)}(\mathbf{M}, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{DM}^-_{ét}(k)}(\mathbf{M}, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)[p]).$$

□

4.2. Réalisation l-adique des motifs

Où les représentations galoisiennes entrent en jeu. On fixe une clôture algébrique $\bar{k}$ de k et un plongement $\bar{k} \hookrightarrow \mathbf{C}$. Disposant des foncteurs de changement de topologie ([V-TCM] 3.3.)

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{DM}^-(k) & \to & \mathbf{DM}^-_{\acute{e}t}(k) \\ \mathbf{M} & \mapsto & \mathbf{M}_{\acute{e}t} \end{array}$$

et de la multiplication par le motif $\mathbf{M}(\operatorname{Spec} K)$ pour toute extension finie K de k

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{DM}^-(k) & \to & \mathbf{DM}^-(k) \\ \mathbf{M} & \mapsto & \mathbf{M}_K = \mathbf{M} \otimes^{tr} \mathbf{M}(\operatorname{Spec} K), \end{array}$$

on pose

$$\begin{aligned} \mathrm{R}^p \operatorname{Hom}(\mathbf{M}_{\bar{k},\acute{e}t}, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)) &= \varinjlim_K \mathrm{R}^p \operatorname{Hom}_{\mathbf{DM}^-_{\acute{e}t}(k)}(\mathbf{M}_{K,\acute{e}t}, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)) \\ &= \varinjlim_K \operatorname{Hom}_{\mathbf{DM}^-_{\acute{e}t}(k)}(\mathbf{M}_{K,\acute{e}t}, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)[p]), \end{aligned}$$

la limite, sur les extension K de k finies contenues dans $\bar{k}$, étant prise dans la catégorie dérivée des groupes abéliens. Les résolutions injectives des faisceaux $\mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)$ permettent de construire non seulement les complexes $\mathrm{R}^\bullet \operatorname{Hom}_{\mathbf{DM}^-_{\acute{e}t}(k)}(\mathbf{M}_{K,\acute{e}t}, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q))$ mais aussi $\varprojlim_n{}^1 \mathrm{R}^{p-1} \operatorname{Hom}(\mathbf{M}_{\bar{k},\acute{e}t}, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q))$ ([J88](1.5), voir aussi [HU95] (10.1.2)), qui sont munis d'une action continue du groupe de Galois absolu $G_k = \operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$ de k.

Definition 4.2.1. *Pour tout complexe motivique $\mathbf{M}$ de $\mathbf{DM}^-(k)$, tout entier $q \geq 0$, la réalisation étale l-adique à coefficients dans $\mathbf{Z}_l$ (respectivement réalisation l-adique) de $\mathbf{M}$ est le $\mathbf{Z}_l$-module (respectivement $\mathbf{Q}_l$-espace vectoriel) gradué sur $\mathbf{Z}$ par*

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^p_l(\mathbf{M}, \mathbf{Z}_l(q)) &= H^p(\mathrm{R}\varprojlim_n \varinjlim_K \mathrm{R}^\bullet \operatorname{Hom}_{\mathbf{DM}^-_{\acute{e}t}(k)}(\mathbf{M}_{K,\acute{e}t}, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)) \\ \mathbf{H}^p_l(\mathbf{M}, q) = \mathbf{H}^p_l(\mathbf{M}, \mathbf{Q}_l(q)) &= \mathbf{H}^p_l(\mathbf{M}, \mathbf{Z}_l(q)) \otimes_{\mathbf{Z}_l} \mathbf{Q}_l. \end{aligned}$$

Comme précédemment, on a une suite exacte courte

$$0 \to \varprojlim_n{}^1 \mathrm{R}^{p-1} \operatorname{Hom}(\mathbf{M}_{\bar{k},\acute{e}t}, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)) \to \mathbf{H}^p_l(\mathbf{M}, \mathbf{Z}_l(q)) \to \varprojlim_n \mathrm{R}^p \operatorname{Hom}(\mathbf{M}_{\bar{k},\acute{e}t}, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)) \to 0 \tag{4.2.1}$$

dont tous les termes sont munis d'une action du groupe de Galois G_k, continue pour la topologie l-adique.

Proposition 4.2.2. *Pour le motif $\mathbf{M} = \mathbf{M}(X)$ d'un schéma lisse de type fini X sur k, on a*

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^p_l(\mathbf{M}(X), \mathbf{Z}_l(q)) &= H^p_{\acute{e}t}(X_{\bar{k}}, \mathbf{Z}_l(q)) \\ \mathbf{H}^p_l(\mathbf{M}(X), \mathbf{Q}_l(q)) &= H^p_{\acute{e}t}(X_{\bar{k}}, \mathbf{Z}_l(q)) \otimes \mathbf{Q}_l. \end{aligned}$$

Demonstration : l'équivalent étale du théorème 1.2.5.1 et le comportement de la cohomologie étale vis à vis des limites projectives de schémas impliquent l'isomorphisme

$$\varprojlim_K \mathrm{R}^p \operatorname{Hom}_{\mathbf{DM}^-_{\acute{e}t}(k)}(\mathbf{M}(X)_{K,\acute{e}t}, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)) \simeq H^p_{\acute{e}t}(X_{\bar{k}}, \mu_{l^n}^{\otimes q}).$$

Par le théorème de finitude ([SGA4 1/2] Cor.1.10) les groupes $H^p_{\acute{e}t}(X_{\bar{k}}, \mu_{l^n}^{\otimes q})$ sont finis et forment un système de Mittag-Leffler pour lequel le foncteur $\varprojlim^1$ s'annule. La proposition est une conséquence de la suite exacte (4.2.1.). $\square$

Lemme 4.2.3. *Pour toute paire de complexes motiviques* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{M}'$ *il existe un accouplement*

$$\mathbf{H}_l^p(\mathbf{M}, \mathbf{Z}_l(q)) \otimes \mathbf{H}_l^{p'}(\mathbf{M}', \mathbf{Z}_l(q')) \to \mathbf{H}_l^{p+p'}(\mathbf{M} \otimes^{tr} \mathbf{M}', \mathbf{Z}_l(q+q'))$$

Demonstration : les produits dans $\mathbf{DM}^-_{ét}$

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{M}_{K,ét} & \otimes^{tr} & \mathbf{M}'_{K,ét} & \to & (\mathbf{M} \otimes^{tr} \mathbf{M}')_{K,ét} \\ \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q) & \otimes^{tr} & \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q') & \to & \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q+q') \end{array}$$

induisent un accouplement

$$\begin{array}{c} \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^-{}_{ét}(k)}(\mathbf{M}_{K,ét}, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^-{}_{ét}(k)}(\mathbf{M}'_{K,ét}, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q')) \\ \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^-{}_{ét}(k)}(\mathbf{M}_{K,ét}{\otimes}\mathbf{M}'_{K,ét}, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q+q')) \end{array}$$

compatible aux limites inductives filtrantes. On obtient ainsi un accouplement de systèmes projectifs dans la catégorie des $\mathbf{Z}_l[G_k]$-modules continus. On conclut par la compatibilité des foncteurs $R\varprojlim$ au produits ([H95] 13.3.1.) □

Le théorème de Faltings [Fal89] assure que, pour tout schéma X lisse sur k et tout couple d'entiers (p, q), la réalisation l-adique $\mathbf{H}_l(\mathbf{M}(X), \mathbf{Q}_l(q))$ est une représentation pseudo-géométrique, c'est-à-dire une représentation l-adique de G_k non ramifiée en un nombre fini de places et de de Rham en toutes les places divisant l ([FPR94] II.2.1.1). La propriété d'être de de Rham n'étant pas stable par extension, il faut une analyse p-adique plus fine pour assurer que la réalisation l-adique d'un motif géométrique est une représentation pseudo-géométrique mais on peut dorénavant conclure du principe 0.2. la proposition suivante

Proposition 4.2.4. *Pour tout nombre entier* p *et tout entier* $q \geq 0$*, la réalisation* l*-adique* $\mathbf{H}_l^p(\ , q)$ *induit un foncteur de la catégorie* DM_{gm} *dans la catégorie des représentations* l*-adiques de* G_k *non ramifiées en dehors d'un nombre fini de places.*

Les classes de Chern

$$c^{p,q}_{ét} : H^{p,q}(\mathbf{M}) \to \mathbf{H}_l^p(\mathbf{M}, \mathbf{Z}(q))$$

sont induites par les morphismes quotient $\mathbf{Z}(q) \to \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)$, le foncteur de changement de topologie $\mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q) \mapsto (\mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q))_{ét} = \mu_{l^n}^{\otimes q}$ et les différents passages à la limite.
Par ailleurs, comme toutes les autres, la réalisation l-adique est équipée d'une filtration par le poids. Elle est induite par passage à la limite par la filtration définie par Bondarko sur les motifs étales [Bo09] sur un corps de dimension cohomologique finie.

5. Isomorphismes de comparaison

D'après les théorèmes de comparaison classiques toutes nos réalisations sont isomorphes sur les schémas projectifs lisses. Pour généraliser ces isomorphismes aux motifs géométriques, nous devons trouver des flèches entre les différentes réalisations qui induisent les isomorphismes : elles proviennent des classes de Chern.

5.1. Comparaison des réalisations de De Rham et de Betti

Fixons une place $\sigma : k \to \mathbf{C}$ du corps de nombres k. Pour comparer $\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A}b)}(\mathbf{M}_\sigma(\mathbf{C}), \mathbf{Z}(q))$ et $\varinjlim_n \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^-(k)}(\mathbf{M}, \tau_{\leq n}\,\mathbf{\Omega}^\bullet)$ pour tout motif $\mathbf{M}$, nous partons des classes de Chern (2.1.4) $\mathbf{Z}(q) \to \tau_{\leq q}\,\mathbf{\Omega}^\bullet$ et appliquons le foncteur de réalisation topologique t_σ (3.3) pour obtenir les flèches

$$(2i\pi)^q\mathbf{Z} \to t_\sigma(\tau_{\leq q}\,\mathbf{\Omega}^\bullet) \to \varinjlim_{n\geq q} t_\sigma(\tau_{\leq n}\,\mathbf{\Omega}^\bullet) =: t_\sigma(\mathbf{\Omega})$$

dans la catégorie des complexes de groupes abéliens. En tensorisant avec le corps de nombres complexes, nous obtenons

Lemme 5.1.1. *Le morphisme $\mathbf{C} \to t_\sigma(\mathbf{\Omega})$ est un quasi-isomorphisme de complexes de groupes abéliens.*

Demonstration : au niveau des faisceaux, le foncteur de réalisation topologique se factorise à travers le site $\widetilde{\mathrm{Sm}\,\mathbf{C}}_{ana}$ des variétés algébriques complexes munies de la topologie analytique. D'après [GAGA], ce foncteur est exact, envoie le faisceau structural $X \mapsto \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ sur le faisceau structural des fonctions holomorphes et les différentielles de Kähler sur les différentielles holomorphes. Le lemme de Poincaré implique que dans la catégorie dérivée des faisceaux abéliens analytiques, le complexe des différentielles holomorphes $\mathbf{\Omega}_h$ est une résolution du faisceau constant $\mathbf{C}$. Le quasi-isomorphisme $\mathbf{C} \simeq \mathbf{\Omega}_h$ se transporte sur un isomorphisme de $D(\widetilde{CW})$ puis $D(\mathcal{A}b)$. $\square$

On en déduit, pour tout complexe motivique $\mathbf{M}$, une flèche

$$\mathbf{H}^\bullet_{DR}(\mathbf{M}, q) \otimes_k \mathbf{C} \to \mathbf{H}^\bullet_\sigma(\mathbf{M}, q) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}.$$

Par le théorème de De Rham, cette flèche est un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués de dimension finie pour tout motif $\mathbf{M}(X)$ d'un schéma lisse projectif X, isomorphisme compatible par construction avec l'action de la conjugaison complexe si la place σ est réelle. Comme nous l'avons déjà remarqué, les filtrations par le poids coïncident pour $q = 0$ (cf 3.3.2), donc également pour tout $q \in \mathbf{Z}$ par décalage. Les motifs $\mathbf{M}(X)$ engendrant la catégorie des motifs géométriques, on a

Proposition 5.1.2. *Pour tout motif géométrique $\mathbf{M}$ de $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}$, tout entier q positif et tout entier p, on a un isomorphisme de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels filtrés (par la filtration par le poids) de dimension finie*

$$\mathbf{H}^p_{DR}(\mathbf{M}, q) \otimes_k \mathbf{C} \simeq \mathbf{H}^p_\sigma(\mathbf{M}, q) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$$

compatible avec l'action de la conjugaison complexe si la place est réelle.

5.2. Théorie de Hodge

Rappelons que trois filtrations $(W., F^{\cdot}, \bar{F}^{\cdot})$ sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel H, où $W.$ est croissante et les deux autres filtrations sont décroissantes, sont dites opposées lorsque $Gr_F^p Gr_{\bar{F}}^q Gr_n^W H = 0$ pour $n \neq p+q$.
Une structure de Hodge mixte sur un sous-corps k de $\mathbf{C}$ est la donnée d'un $\mathbf{Z}$-module de type fini $H_{\mathbf{Z}}$, d'une filtration croissante W_n sur $H_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} H_{\mathbf{Z}}$, d'une filtration décroissante F^p sur $H_k = k \otimes_{\mathbf{Z}} H_{\mathbf{Z}}$, tels que le système des trois filtrations $(W, F, \bar{F})$ qui en découle sur $H_{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} H_{\mathbf{Z}}$ soit un système de trois filtrations opposées [D70](1.2.13). La catégorie des structures de Hodge mixtes est une catégorie abélienne (loc. cit. 2.3.5).
La filtration par le poids de Bondarko sur $\mathbf{H}_\sigma^p(\mathbf{M}, \mathbf{Z}(q))$, la filtration de Hodge sur $\mathbf{H}_{DR}^p(\mathbf{M}, q)$ et l'isomorphisme de comparaison De Rham-Betti permettent d'associer à un complexe motivique, objet de $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$, une structure de Hodge mixte sur k.

Theoreme 5.2.1. *Pour chaque plongement $\sigma : k \hookrightarrow \mathbf{C}$ et tout entier q positif, la donnée du $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{H}_\sigma(\mathbf{M}, \mathbf{Z}(q))$, de la filtration W par le poids de Bondarko sur $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{H}_\sigma(\mathbf{M}, \mathbf{Z}(q))$, du k-espace vectoriel filtré par la filtration de Hodge $(\mathbf{H}_{DR}(\mathbf{M}, q), F^{\cdot})$, du complexifié $\mathbf{H}_{\mathbf{C}}(\mathbf{M}) = \mathbf{C} \otimes \mathbf{H}_{DR}(\mathbf{M}, q)$, muni des trois filtrations $W.$, $F^{\cdot}$ et de sa complexe conjuguée $\bar{F}^{\cdot}$, pour tout motif géométrique $\mathbf{M}$, induit un foncteur cohomologique, appelé réalisation de Hodge, de la catégorie $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$ des motifs géométriques vers la catégorie des structures de Hodge mixtes sur k.*

Demonstration :
Plaçons-nous dans la catégorie $\mathcal{A}'$ dont les objets sont les données $h = (H_{\mathbf{Z}}, H, H_{\mathbf{C}}, W., F^{\cdot}, \bar{F}^{\cdot})$ où
- $H_{\mathbf{Z}}$ est $\mathbf{Z}$-module de type fini;
- $H \simeq k \otimes H_{\mathbf{Z}}$ est un k-espace vectoriel de dimension finie;
- $H_{\mathbf{C}} \simeq \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} H_{\mathbf{Z}}$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie;
- $W.$ est une filtration croissante sur $H_{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \otimes H_{\mathbf{Z}}$;
- $F^{\cdot}$ est une filtration décroissante sur H;
- $\bar{F}^{\cdot}$ est la filtration conjuguée de $F^{\cdot}$ sur $H_{\mathbf{C}}$.

Les morphismes de $\mathcal{A}'$ sont les morphismes respectant toutes les structures. Un facteur direct h' d'un objet h de $\mathcal{A}'$ est un sous-objet h' de h tel que l'application $u : h' \to h$ admette une rétraction $r : h \to h'$. Dans ces conditions, on a $r \circ u = id_{h'}$ et $u \circ r$ est un projecteur de h.
La catégorie $SHM(k)$ est une sous catégorie pleine de $\mathcal{A}'$, car les morphismes respectant les 3 filtrations entre deux structures de Hodge mixtes sont nécessairement stricts (loc. cit. 2.3.5. (iii)).

Il suffit de considérer le cas où $q = 0$. Le foncteur réalisation de Hodge, noté h, est un foncteur de la catégorie des motifs géométriques $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(k)$ dans $\mathcal{A}'$. Pour avoir une structure de Hodge mixte, il faut montrer que sur le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{H}_{\mathbf{C}}(\mathbf{M})$, les trois filtrations $W_{\mathbf{C}}$, F et $\bar{F}$ sont opposées. C'est connu pour tout motif $\mathbf{M}(X)$ d'une variété projective lisse (2.3.6.) et [D70]. Par le principe (0.2.) légèrement modifié, il reste à vérifier les deux points suivants :
- pour $\mathbf{M}'$ facteur direct de $\mathbf{M}$ dans $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(k)$ où $h(\mathbf{M})$ est une structure de Hodge mixte, alors $h(\mathbf{M}')$ en est une;
- pour tout triangle distingué $M' \to M \to M'' \to M[1]$ de $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(k)$ où $h(\mathbf{M}')$ et $h(\mathbf{M}'')$ sont des structures de Hodge mixtes, alors $h(\mathbf{M})$ en est une.

Commençons par montrer qu'un facteur direct $h' = (H'_{\mathbf{Z}}, H', H'_{\mathbf{C}}, W', F', \bar{F}')$ dans $\mathcal{A}'$ d'une structure de Hodge mixte $h = (H_{\mathbf{Z}}, H, H_{\mathbf{C}}, W, F, \bar{F})$ est une structre de Hodge. Les espaces $H'_{\mathbf{Z}}, H', H'_{\mathbf{C}}$ sont respectivement facteurs directs des espaces $H_{\mathbf{Z}}, H, H_{\mathbf{C}}$ et les rétractions respectant les filtrations, pour tout triplet d'entiers (p, q, n) l'espace vectoriel $Gr_{F'}^p Gr_{\bar{F}'}^q Gr_n^{W'} H'_{\mathbf{C}}$ est un facteur direct de $Gr_F^p Gr_{\bar{F}}^q Gr_n^W H_{\mathbf{C}}$ par fonctorialité. La propriété pour les trois filtrations d'être opposées est stable par facteur direct.

Tout triangle distingué $M' \to M \to M'' \to M'[1]$ dans $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}^{\mathrm{eff}}(k)$ induit une longue suite exacte

$$\cdots \to \mathbf{H}_{DR}^r(M'') \to \mathbf{H}_{DR}^r(M) \to \mathbf{H}_{DR}^r(M') \to \mathbf{H}_{DR}^{r+1}(M'') \to \cdots \tag{5.2.2.}$$

Grâce à Bondako, [Bo] (Prop.2.5.1. III 2), on sait que le foncteur Gr_n^W est cohomologique et la suite exacte (5.2.2) se scinde en suites exactes courtes

$$0 \to Gr_n^W \mathbf{H}_{DR}^r(M'') \to Gr_n^W \mathbf{H}_{DR}^r(M) \to Gr_n^W \mathbf{H}_{DR}^r(M') \to 0,$$

où les termes de droite et de gauche sont des structures de Hodges pures de poids n.
On est ramené à montrer

LEMME 5.2.3. *Soit* $0 \to H_2 \to H \to H_1 \to 0$ *une suite exacte de* $\mathbf{C}$*-espaces vectoriels trifiltrés, chacun par une filtration croissante* W *et deux filtrations décroissantes* F *et* $\bar{F}$*. On suppose les morphismes compatibles aux filtrations.*
Si H_1 *et* H_2 *sont des structures de Hodge pures de poids* n*, alors* H *est une structure de Hodge pure de poids* n*.*

DEMONSTRATION : on utilise l'identification du groupe d'extensions des structures de Hodge mixtes $Ext(H_1, H_2)$ avec le quotient (modulo des changements de bases) du groupe $W^0 H\,\mathrm{Hom}(H_1, H_2)$ des morphismes linéaires de H_1 dans H_2 respectant la filtration W [PS08](3.31). Comme les morphismes respectent la filtration F, la suite exacte du lemme fournit un morphisme linéaire $H_1 \to H_2$ qui respecte automatiquement la filtration W puisque les structures H_1 et H_2 sont pures de même poids.

On a ainsi construit un foncteur de la catégorie $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}_{\mathrm{gm}}(k)$ dans la catégorie des structures de Hodge mixtes. Pour conclure la démonstration du théorème, il suffit de préciser que le foncteur est multiplicatif et que les structures de Hodge des motifs de Tate sont inversibles, en rappelant

PROPOSITION 5.2.4. *La réalisation de Hodge des motifs de Tate* $\mathbf{Z}(n)$ *est la structure de Hodge pure de poids* $2n$ *suivante*

$$h^i(\mathbf{Z}(n)) = 0 \quad si\ i \neq 0,$$
$$h^0(\mathbf{Z}(n)) = (\mathbf{Z}, k, \mathbf{C}, W_{\cdot}, F^{\cdot}, \bar{F}^{\cdot})$$

avec pour filtration par le poids

$$W_i \mathbf{H}^0_\sigma(\mathbf{Z}(n)) = 0 \quad pour\ i \leq 2n-1$$
$$W_i \mathbf{H}^0_\sigma(\mathbf{Z}(n)) = k \quad pour\ i \geq 2n$$

et pour filtration de Hodge

$$F^p \mathbf{H}^0_{DR}(\mathbf{Z}(n)) = 0 \quad pour\ p \geq n+1$$
$$F^p \mathbf{H}^0_{DR}(\mathbf{Z}(n)) = k \quad pour\ p \leq n.$$

DEMONSTRATION : cela provient du triangle exact scindé [MVW Chap.15]

$$\mathbf{M}(\mathbf{P^{n-1}}) \to \mathbf{M}(\mathbf{P^n}) \to \mathbf{Z}(n)[2n] \to \mathbf{M}(\mathbf{P^{n-1}})[1]$$

et du fait que l'espace projectif $\mathbf{P^n}$ a comme nombres de Hodge non nuls $h^{p,p}$ pour $0 \leq p \leq n$. □

5.3. Comparaison des réalisations de Betti et l-adique

Pour tout motif géométrique $\mathbf{M}$ et toute place $\sigma : k \to \mathbf{C}$, il nous faut comparer

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A}b)}(t_\sigma(\mathbf{M}), \mathbf{Z}(q)) \otimes \mathbf{Q}_l$$

et $R \varprojlim_n \varinjlim_K R^\bullet \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^-_{\acute{e}t}(k)}(\mathbf{M}_{K,\acute{e}t}, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)) \otimes \mathbf{Q}_l$.
La topologie étale étant intermédiaire entre la topologie de Nisnevich et la topologie usuelle des points complexes, le foncteur $t_{\mathbf{C}}$ se factorise à travers la catégorie des complexes motiviques étales. Mais ce foncteur se factorise également, pour toute extension finie K de k

$$\begin{tikzcd} k \arrow[rr, "\sigma"] \arrow[dr] & & \mathbf{C} \\ & K \arrow[ur, "\sigma_K"'] & \end{tikzcd}$$

à travers

$$t_{\sigma_K} : \mathbf{DM}^-(K) \to \mathbf{DM}^-(\mathbf{C})$$

et son équivalent étale

$$t_{\sigma_K, \acute{e}t} : \mathbf{DM}^-_{\acute{e}t}(K) \to \mathbf{DM}^-_{\acute{e}t}(\mathbf{C}).$$

La propriété d'adjonction (cf 1.4.2), pour $\mathbf{M} \in \mathbf{DM}^-(k)$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^-_{\acute{e}t}(k)}(\mathbf{M}_{\acute{e}t} \otimes K, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^-_{\acute{e}t}(K)}(\sigma_K(\mathbf{M}_{\acute{e}t}), \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q))$$

composée avec le foncteur $t_{\sigma_K, \acute{e}t}$ permet de définir des flèches

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^-_{\acute{e}t}(k)}(\mathbf{M}_{\acute{e}t} \otimes K, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)) \to \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A}b)}(t_\sigma(\mathbf{M}), \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q))$$

et, par passage à la limite sur les extensions finies K de k, un morphisme de groupes abéliens

$$\varinjlim_K \mathrm{Hom}_{\mathbf{DM}^{-,\mathrm{eff}}(k)}(\mathbf{M}_{K,\acute{e}t}, \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)) \to \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A}b)}(t_\sigma(\mathbf{M}), \mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}(q)),$$

le terme de droite s'identifiant à $\mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A}b)}(t_\sigma(\mathbf{M}), \mathbf{Z}(q)) \otimes \mathbf{Z}_l$ puisque la catégorie des groupes abéliens vérifie l'axiome AB4*.
On en déduit, pour tout complexe motivique $\mathbf{M}$, tout entier q positif et tout entier p les flèches

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{H}^p_l(\mathbf{M}, \mathbf{Z}_l(q)) & \to & \mathbf{H}^p_\sigma(\mathbf{M}, \mathbf{Z}(q)) \otimes \mathbf{Z}_l \\ \mathbf{H}^p_l(\mathbf{M}, q) \otimes \mathbf{Q}_l & \to & \mathbf{H}^p_\sigma(\mathbf{M}, q) \otimes \mathbf{Q}_l. \end{array}$$

Le théorème de comparaison des cohomologies étale et complexe à coefficients finis [SGA 4 , XI] implique que cette dernière flèche est un isomorphisme de $\mathbf{Q}_l$-espaces vectoriels gradués filtrés de dimension finie pour tout motif $\mathbf{M}(X)$ d'un schéma projectif lisse X. On en déduit par le principe 0.2.

Proposition 5.3.1. *Pour tout motif géométrique $\mathbf{M}$ de $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}$ et tout entier q positif, on a un isomorphisme de $\mathbf{Q}_l$-espaces vectoriels gradués filtrés de dimension finie*

$$\mathbf{H}^\bullet_l(\mathbf{M}, q) \otimes \mathbf{Q}_l \simeq \mathbf{H}^\bullet_\sigma(\mathbf{M}, q) \otimes \mathbf{Q}_l.$$

5.4. Comparaison avec les constructions de Huber

Annette Huber construit ses réalisations en étendant à la catégorie $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$ des motifs géométriques les foncteurs additifs qu'elle a définis en [H95]

$$\tilde{R} : \mathrm{Sm}(k) \to C^+(\mathcal{A})$$

de la catégorie des schémas lisses sur k dans la catégorie des complexes bornés inférieurement d'une catégorie abélienne $\mathbf{Q}$-linéaire $\mathcal{A}$ (cf [H00], [H04] (theorem B.2.2)). Il est clair que, rationnellement, nos réalisations coïncident avec les siennes pour les motifs des variétés lisses et il reste à vérifier que nos constructions s'étendent de la même façon que la sienne. Comme elle le précise, il est important que les foncteurs $\tilde{R}$ soient à valeurs dans une catégorie de complexes et non dans une catégorie homotopique ou dérivée. Elle-même a construit, pour tout schéma lisse, des complexes [H95] $\tilde{R}_{sing}(X), \tilde{R}_{dR}(X), \tilde{R}_l(X)$. Fixons-nous des résolutions injectives respectives $J^{\cdot}_{DR}$ du complexe de De Rham $\mathbf{\Omega}^{\bullet}$ et $J^{\cdot}_{l^n}$ du faisceau étale avec transferts $\mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z}$ et définissons, pour une place $\sigma \hookrightarrow \mathbf{C}$ fixée, les foncteurs

$$\begin{array}{cccc} R_{DR} & : & \mathrm{Sm}(k) & \to & \mathbf{C}^+(\mathcal{F}_k) \\ & & X & \mapsto & \mathrm{Hom}_{C(\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{Smcor}\,k))}(C_*(\mathbf{Z}_{tr}(X)), J^{\cdot}_{DR}) \end{array}$$

où $\mathcal{F}_k$ est la catégorie des k-espaces vectoriels filtrés,

$$\begin{array}{cccc} R_B & : & \mathrm{Sm}\,k & \to & C^+(\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}) \\ & & X & \mapsto & \mathrm{Hom}_{C(\mathcal{A}b)}(\mathrm{Map}(\Delta^{\bullet}_{\mathrm{top}}, \coprod_{d\geq 0} S^d X(\mathbf{C}))^+, \mathbf{Q}), \end{array}$$

où $\mathcal{E}_{\mathbf{Q}}$ est la catégorie des $\mathbf{Q}$-espaces vectoriels,

$$\begin{array}{cccc} R_{l^n} & : & \mathrm{Sm}\,k & \to & C^+(\mathbf{Z}/l^n\mathbf{Z} - \mathrm{Mod}) \\ & & X & \mapsto & \mathrm{Hom}_{C(\mathrm{Shv}_{\acute{e}t}(\mathrm{Smcor}\,k))}(C_*(\mathbf{Z}_{tr,\acute{e}t}(X_{\bar{k}}), J_{l^n}), \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccc} R_l : & \mathrm{Sm}\,k & \to & C^+(\mathcal{E}_{\mathbf{Q}_l}) \\ & X & \mapsto & \varprojlim_n R_{l^n}(X) \otimes \mathbf{Q}_l, \end{array}$$

où $\mathcal{E}_{\mathbf{Q}_l}$ est la catégorie des $\mathbf{Q}_l$-espaces vectoriels.

Pour tout schéma lisse X le dual du morphisme de Dold-Thom fournit un quasi-isomorphisme

$$R_B(X) \simeq \tilde{R}_{sing}(X),$$

le complexe $\tilde{R}_{dR}(X)$ construit à partir des différentielles à pôles logarithmiques est une résolution du motif de De Rham et induit un quasi-isomorphisme

$$R_{DR}(X) \simeq \tilde{R}_{dR}(X)$$

compatible aux deux filtrations par (2.2) et (2.3).

Quant aux réalisations l-adiques, les deux constructions consistent en un même changement de topologie, de Nisnevich à étale et coïncident sur les variétes lisses

$$R_l(X) = \tilde{R}_l(X)$$

et sur les motifs géométriques.

L'essence des constructions de Huber ([H00](2,3)) est d'étendre les foncteurs $\tilde{R}$ de $\mathrm{Sm}\,k$ à la catégorie $\mathrm{Smcor}\,k$, la proposition (loc. cit. Prop.2.1.2) assurant qu'une fois choisie une règle de signes dans les multicomplexes, un foncteur de $\mathrm{Smcor}\,k$ dans $C^+(\mathcal{A})$ vérifiant les bonnes propriétés s'étend naturellement en un foncteur $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k) \to D^+(\mathcal{A})$.

Par construction, nos foncteurs R s'étendent en des foncteurs sur $\mathrm{Smcor}(k)$. Il nous faut montrer que ces derniers coïncident avec les foncteurs étendus par Huber ([H00], theorem 2.1.6 et [H04] B.2.2), ce qui se ramène à vérifier que nous avons défini les mêmes transferts.

Lemme 5.4.1. *Pour toute correspondance α entre les schémas lisses X et Y , on a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{R}_{sing}(Y) & \xrightarrow{\alpha^*_{sing}} & \tilde{R}_{sing}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle u_B(Y)} & & \downarrow{\scriptstyle u_B(X)} \\ R_B(Y) & \xrightarrow{\alpha^*_B} & R_B(X) \end{array}$$

Demonstration : la construction des transferts sur $\tilde{R}_{sing}$ est explicitée dans la démonstration des théorèmes 2.1.3 et 2.1.6 de [H95]. Celle des transferts sur R_B est, avant application du foncteur de réalisation topologique, issue de l'article [SV96] de Suslin et Voevodsky; ils démontrent le théorème 6.8 (cf 1.3.4) après avoir muni les faisceaux qfh de transferts. Dans les deux cas on se ramène à une correspondance élémentaire de support qu'on peut supposer normal, et même un recouvrement génériquement galoisien chez Huber ou pseudo-galoisien chez Suslin et Voevodsky (les deux notions sont équivalentes en caractéristique 0). La même trace permet alors de définir les transferts qui coïncident. □

La démonstration se transpose au cas des réalisations de De Rham et de Hodge puisque les transferts ([LW09]), puis les filtrations, ont été construits au niveau des complexes. La naturalité des isomorphismes de comparaison permet de conclure

Proposition 5.4.2. *Nos foncteurs de réalisations $\mathbf{H}_{DR}$, $\mathbf{H}_\sigma$ et $\mathbf{H}_l$ restreints à la catégorie $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k)$ des motifs géométriques coïncident respectivement avec les composantes de Rham, singulière et l-adique du foncteur de réalisation mixte de Huber [H00].*

Par ailleurs, comme l'a précisé Bondarko ([BO09], 7.4), il n'existe qu'une seule filtration par le poids sur une réalisation de $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}$ vers une catégorie à coefficients rationnels. Nos filtrations par le poids coïncident donc avec celles de [H00], de même que les réalisations de Hodge.

Bibliographie

[SGA4] Artin, M. - Grothendieck, A. - Verdier, J. L. — Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4) Tome 1 : Théorie des topos, *Lecture Notes in Mathematics* **269** Springer-Verlag, Berlin, (1972).

[BV08] Beilinson, Alexander - Vologodsky, Vadim. — A DG guide to Voevodsky's motives, *Geom. Funct. Anal.*, **17**, (2008), no 6, 1709–1787.

[Bo09] Bondarko, Mikhael V. — Differential graded motives : weight complex, weight filtrations and spectral sequences for realizations; Voevodsky versus Hanamura , *J. Inst. Math. Jussieu* , **8**, (2009), no 1, 39–97.

[Bo] Bondarko, Mikhael V. — Weight structures, weight filtrations, weight spectral sequences, and weight complexes (for motives and spectra) , *preprint*.

[CD07] Cisinski, Denis-Charles - Déglise, Frédéric. — Mixed Weil cohomologies, *preprint*.

[CD08] Cisinski, Denis-Charles - Déglise, Frédéric. — Triangulated categories of motives, *preprint*.

[D70] Deligne, Pierre. — Théorie de Hodge I , **in** Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, *Lecture Notes in Mathematics*, **8** , Gauthier Villard, Paris, (1971), 425–430.

[D71] Deligne, Pierre. — Théorie de Hodge,II, *Inst. Hautes études Sci. Publ. Math.*, **40**, (1971), no 1, 5–57.

[D89] Deligne, Pierre. — Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, **in** Galois groups over $\mathbf{Q}$ (Berkeley, CA, 1987), *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, **16** , Springer, New York, (1989), 79–297.

[Fal89] Faltings, Gerd. — Crystalline cohomology and p-adic Galois-representations, **in** Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, MD, 1988), *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, **16** , Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, (1989), 25–80.

[FPR94] Fontaine, Jean-Marc - Perrin-Riou, Bernadette. — Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L, **in** Motives (Seattle, WA, 1991), *Proc. Sympos. Pure Math.*, **55** , Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1994), 599–706.

[FV] Friedlander, Eric M. - Voevodsky, Vladimir. — Bivariant cycle cohomology, **in** Cycles, transfers, and motivic homology theories, *Ann. of Math. Stud.*, **143** , Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, (2000), 138–187.

[Gob70] Goblot, Rémi. — Sur les dérivés de certaines limites projectives. Applications aux modules, *Bulletin des Sciences Mathématiques. 2e Série*, **94**, (1970), no 1, 251–255.

[Go58] Godement, Roger. — Topologie algébrique et théorie des faisceaux, *Actualités scientifiques et industrielles 1252. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg* **XIII** Hermann, Paris, (1858).

[Gro57] Grothendieck, Alexander. — Sur quelques points d'algèbre homologique, *The Tohoku Mathematical Journal. Second Series*, **9**, (1957), no 1, 119–221.

[H95] Huber, Annette. — Mixed motives and their realization in derived categories, *Lecture Notes in Mathematics* **1604** Springer-Verlag, Berlin, (1995).

[H00] Huber, Annette. — Realization of Voevodsky's motives, *Journal of Algebraic Geometry*, **9**, (2000), no 4, 755–799.

[H04] Huber, A.. — Corrigendum to : "Realization of Voevodsky's motives" [J. Algebraic Geom. **9** (2000), no. 4, 755–799; MR1775312], *Journal of Algebraic Geometry*, **13**, (2004), no 1, 195–207.

[I07] Ivorra, Florian. — Réalisation l-adique des motifs triangulés géométriques. I., *Doc. Math.*, **12**, (2007), no 1, 607–671.

[J88] Jannsen, Uwe. — Continuous étale cohomology, *Mathematische Annalen*, **280**, (1988), no 2, 207–245.

[J90] Jannsen, Uwe. — Mixed motives and algebraic K-theory, *Lecture Notes in Mathematics* **1400** Springer-Verlag, Berlin, (1990).

[K73] Knighten, Carol M.. — Differentials on quotients of algebraic varieties, *Transactions of the American Mathematical Society*, **177**, (1973), no 2, 65–89.

[L08] Lecomte, Florence. — Réalisation de Betti des motifs de Voevodsky, *Comptes rendus - Mathematique*, **346**, (2008), no 2, 1083–1086.

[LW09] Lecomte, Florence - Wach, Nathalie. — Le complexe motivique de De Rham, *Manuscripta Math.*, **129**, (2009), no 2, 75–90.

[Ma68] Manin, Ju. I. — Correspondences, motifs and monoidal transformations. (Russe), *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* , **32**, (1968), no 2, 1223–1244.

[MVW] Mazza, Carlo - Voevodsky, Vladimir - Weibel, Charles. — Lecture notes on motivic cohomology, *Clay Mathematics Monographs* **2** American Mathematical Society, Providence, RI, (2006).

[Mi] Milne, James S.. — Étale cohomology, *Princeton Mathematical Series* **33** Princeton University Press, Princeton, N.J., (1980).

[MV99] Morel, Fabien - Voevodsky, Vladimir. — **A** Spec 1-homotopy theory of schemes, *Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques*, **33**, (1999), no 90, 45–143(2001).

[N89] Nisnevich, Ye. A. — The completely decomposed topology on schemes and associated descent spectral sequences in algebraic K-theory, **in** Algebraic K-theory : connections with geometry and topology (Lake Louise, AB, 1987), *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, **279** , Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, (1989), 241–342.

[PS08] Peters, Chris A. M. and Steenbrink, Joseph H. M. — Mixed Hodge structures, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]* **52** Springer-Verlag, Berlin, (2008).

[GAGA] Serre, Jean-Pierre. — Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Université de Grenoble. Annales de l'Institut Fourier*, **6**, (1955–1956), no 90, 1–42.

[SV96] Suslin, Andrei - Voevodsky, Vladimir. — Singular homology of abstract algebraic varieties, *Inventiones Mathematicae*, **123**, (1996), no 1, 61–94.

[Ver77] Verdier, Jean-Louis. — Catégories dérivées, état 0, **in** Cohomologie étale, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA $4\frac{1}{2}$, *Lecture Notes in Mathematics*, **569** , Springer-Verlag, Berlin, (1977), 262–311.

[Ver96] Verdier, Jean-Louis. — Des catégories dérivées des catégories abéliennes, *Astérisque*, **569**, (1996), no 239, xii+253 pp. (1997).

[V-CTP] Voevodsky, Vladimir. — Cohomological theory of presheaves with transfers, **in** Cycles, transfers, and motivic homology theories, *Ann. of Math. Stud.*, **143** , Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, (2000), 87–137.

[V-TCM] Voevodsky, Vladimir. — Triangulated categories of motives over a field, **in** Cycles, transfers, and motivic homology theories, *Ann. of Math. Stud.*, **143** , Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, (2000), 188–238.