Simone TROMPLER

L'histoire des logarithmes

centre de documentation pédagogique

UREM

Unité de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

Les Cahiers du CeDoP

PREMIÈRE PARTIE :
Les logarithmes. Histoire de leur développement

1. Avant Neper

La mise en relation d'une suite de puissances d'un nombre avec la suite correspondante des exposants, fondement de la théorie des logarithmes, remonte à l'époque paléobabylonienne (18^{e} siècle av. J.-C.) et non, comme le prétendaient certains historiens, à l'*Arénaire* d'Archimède. La contribution babylonienne a même été, par certains aspects, plus riche que celle d'Archimède, car elle considérait les puissances successives de différents nombres (voir *Complément* n°1 – p. 21). On a retrouvé une tablette didactique, comprenant les puissances de 225 (dans nos notations), de 2 à 7 et où il est demandé de compléter jusqu'à 10. Une autre tablette reprend les puissances de 9. On possède aussi des tablettes pour les puissances de 16 et de 100. Une autre tablette répond à la question : à quelle puissance faut-il élever un certain nombre a pour obtenir un nombre donné ? Malgré le mauvais état de la tablette, on peut clairement traduire :

$$16^{1;4} = 2$$
$$16^{1;2} = 4$$
$$16^{3;4} = 8$$
$$16^{1} = 16$$
$$16^{5;4} = 32$$
$$16^{3;2} = 64$$

Le point de départ de tout le problème traité par les Babyloniens doit probablement être trouvé dans les calculs d'intérêts. Boyer remarque qu'en dépit des grands espaces entre 2 nombres dans leurs tables exponentielles, les Babyloniens n'hésitaient pas à faire une interpolation linéaire pour trouver des valeurs approximatives... On trouve un exemple clair de l'usage pratique d'interpolation avec des tables exponentielles dans un texte-problème qui demande combien de temps il faut pour qu'un capital double si le taux d'intérêt annuel est de 20 %. La réponse est 3;47,13,20, soit 3 ans 47/60 13/3600 20/216000. Il semble très clair que le scribe a utilisé une interpolation linéaire entre les valeurs $(1;12)^3$ et $(1;12)^4$, d'après la formule d'intérêt composé $C(1+r)^n$ où r est 20 %, c'est-à-dire 12/60.

On a trouvé aussi un texte provenant de Mari (18^{e} siècle av. J.-C.) qui met en correspondance la suite de puissances de 2 et celle des exposants :

« 1 grain a fait augmenter 1 grain, soit 2 grains le 1er jour,
4 grains le 2^{e} jour,
8 grains le 3^{e} jour, ... »

et cela continue ainsi, mais les dernières lignes (28, 29, 30) sont fausses, peut-être à cause d'une mauvaise interprétation du résultat du calcul écrit en sexagésimal par le scribe. (Imhotep)

Nous ne connaissons aucun texte entre les Babyloniens et Archimède qui traite des logarithmes. Archimède, dans l'*Arénaire*, va développer de façon extensive la suite des puissances de 2 (voir *Complément* n°2 – pp. 21-22). Il cherche, à partir de ses hypothèses, le nombre de grains de sable qui se trouveraient contenu dans une sphère de la grandeur de notre « Univers » et trouve que c'est plus petit que 1000 unités du 7^{e} ordre de nombres, soit pour nous 10^{51}. Il prend pour diamètre de l'univers 10^{10} stades, 1 stade étant plus petit que 10 000 largeurs de doigt. Les nombres qu'il manipule sont gigantesques, évidemment. Comme il ne dispose pas de symboles pour les exposants, ni de numération positionnelle, il faut tout son génie pour pouvoir classer les nombres et calculer leurs puissances. Il y réussit et énonce la règle $a^m \times a^n = a^{m+n}$, sous une forme un peu différente, que nous pourrions traduire ainsi, dans nos notations modernes : « Dans la suite des nombres proportionnels $1,\ a^1,\ a^2,\ a^3,\ \ldots a^{n-1},\ a^n,\ \ldots a^m,\ a^{m+1},\ \ldots a^{m+n},\ \ldots$ où le rang de chaque nombre est égal à son exposant augmenté de 1, la distance du produit $a^n \times a^m = a^{m+n}$ à a^m est mesurée par (n + 1) nombres et sa distance à l'unité par (m + n + 1) nombres ».

Ensuite, on ne trouve plus rien pendant des siècles et des siècles. Puis, au cours des 13e et 14e siècles, la numération décimale de position, qui vient d'Inde par l'intermédiaire des Arabes, se répand dans toute l'Europe. Grâce à elle, le calcul devient beaucoup plus aisé et un développement nouveau de l'étude des nombres est dès lors possible.

Chuquet, en France, et Stifel, en Allemagne, ne connaissent ni l'œuvre des Babyloniens ni celle d'Archimède. Chuquet, dans sa *Triparty en la Science des Nombres* (1484) manipule les exposants, peu fixés et rarement utilisés à son époque, et introduit même les exposants fractionnaires et négatifs. Il retrouve la règle énoncée par Archimède qui peut s'énoncer « *Dans une progression géométrique, le produit du nombre de rang n par le nombre de rang m donne le nombre de rang n + m* ». Il a tout ce qu'il faut pour introduire les logarithmes, mais il s'arrête là, tout en ajoutant : « *En cette considération est manifestement quelque secret qui appartient aux nombres* ». Il traite le problème du tonneau qui se vide chaque jour de 1/10e de sa capacité, problème où l'on se demande au bout de combien de jours il sera à moitié vide. Il constate que l'interpolation linéaire entre le 6e et le 7e jour, admise par les mathématiciens de son temps, est fausse, mais ne voit pas bien comment la résoudre.

Chuquet n'est pas suivi et il faut attendre Stifel (1486-1567) qui publie à Nuremberg en 1544 un traité de mathématique *Arithmetica Integra*. Il n'hésite pas à utiliser les nombres négatifs et va jusqu'à écrire les progressions arithmétiques et géométriques :

...-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...
...1/32, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, ...

Non seulement il fait correspondre (3 + 5) à (8 × 32), mais aussi (-3 + -5) à (1/4 × 1/8 = 1/32). Ch. Naux conclut : « *Sa pensée de géomètre ne va pas au-delà. Il ne cherche pas à attirer l'attention du lecteur sur l'usage possible de sa remarque... Cet arrêt n'est peut être que la suite d'un manque d'audace, et il se peut que Stifel soit allé beaucoup plus loin, dans la direction de Neper, car il termine son chapitre par ces paroles mystérieuses : on pourrait écrire, en ces circonstances, un livre nouveau presque entièrement consacré aux merveilles de ces nombres ; mais il faut que je me retire d'ici et que je m'en aille les yeux fermés ; cependant, je reprendrai une des questions précédentes, afin que l'on ne puisse pas dire que je suis entré en vain dans ce domaine, j'attaquerai de nouveau la question intouchée parce qu'elle me semble à reprendre.* » Et Ch. Naux ajoute : « *A-t-il entrevu ce livre sur les merveilles des nombres au cours d'un de ses rêves exaltés de mathématiciens, a-t-il réellement pensé à des relations numériques atteignant la forme d'une doctrine logarithmique restant à mettre au point ? Toutes les hypothèses sont permises sans que l'on puisse formuler une conclusion solide sur le fond de sa pensée. Mais une chose demeure certaine. Son « Arithmetica Integra » était un chef-d'œuvre pour son temps. Elle a obtenu un très grand succès auprès du monde savant. Très répandue, elle avait la réputation d'un très grand classique lorsque Neper faisait son éducation, et il se peut qu'elle ait exercé une influence, directe ou par ricochet, sur la découverte finale des logarithmes* ».

Au 17e siècle, le développement de l'astronomie, le désir de plus en plus grand de précision, les découvertes des lois expérimentales de Kepler intensifient le besoin de faciliter les calculs. La multiplication et surtout la division restent des opérations ardues, l'extraction de racines carrées plus difficile encore, bien évidemment. On connaissait toutefois bien un moyen de remplacer une multiplication par une addition, appelé prosthaphérèse et qui revient à faire

$$\cos a \times \cos b = 1/2(\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

Cette relation avait été découverte par un astronome arabe Ibn-Yanus, aux environs de l'an 1000. Tycho Brahé fut le premier astronome latin à en faire usage, mais sans la communiquer à d'autres. Cette règle n'est pas applicable si l'une des lignes trigonométriques est une tangente ou un sinus verse $(1-\cos a)$. Vers la fin du 16e siècle, Christopher Clavius étend la méthode au cas de sécantes et de tangentes ; en fait, il montre comment trouver le produit de 2 nombres quelconques. Il anticipe ainsi le calcul logarithmique.

2. John Napier ou Neper (1550-1617)

Il est né en Écosse, au château de Merchiston, près d'Édimbourg. Il entre à l'Université de Sint Andrews à 13 ans, mais il n'y reste que quelques trimestres, sans y rien faire de remarquable et son père décide de l'envoyer sur le continent. Il en revient, très convaincu par la qualité des savants et fâché contre les « papistes ». De retour en Écosse, il passe beaucoup de temps à préparer un livre qui voit le jour en 1593, dans lequel il arrive à la conclusion que le Pape est l'Antéchrist et que la fin du Monde est prévue pour 1786. Son style est celui d'un mathématicien, avec des propositions et des preuves. Le livre a un succès énorme, est traduit en plusieurs langues et continuera à être vendu et lu même après sa mort. On dit que Napier l'a toujours considéré comme la plus importante de ses œuvres !

Il hérite de la propriété familiale et se livre à toute une série d'activités très variées : il est, entre autres, contrôleur des prix des bottes et chaussures vendues à Édimbourg, il fait de l'expérimentation en agriculture, se préoccupe de la défense de la Grande-Bretagne, en inventant des armes comme un miroir géant et un fusil particulièrement efficace. Mais l'essentiel de son activité est consacré à la théologie et aux mathématiques.

À l'époque, Édimbourg reçoit beaucoup d'intellectuels et Napier les fréquente. Très vite, sa réputation se fait et en 1592, John Craig, physicien du Roi, écrit à Tycho Brahé pour lui annoncer la découverte prochaine d'une nouvelle méthode de simplification des calculs. Son œuvre mathématique comprend une théorie des équations, non publiée. Aucune idée originale ou nouvelle ne s'y trouve, mais il y simplifie au maximum les symboles écrits. Il attache plus d'importance à son livre *Rabdologie*, ouvrage essentiellement pratique destiné aux artisans et commerçants.

Pour la postérité, ce sont ses 2 traités sur les logarithmes qui feront sa gloire. Il édite lui-même son premier traité en 1614 : *Mirifici Logarithmorum canonis descriptio*. Le second traité, posthume, est édité par son fils en 1619 : *Mirifici Logarithmorum canonis constructio*. En fait, le « *constructio* » a été écrit plusieurs années avant le « *descriptio* » et c'est dans le « *descriptio* » que sont expliqués les principes qui ont permis la construction des tables et qui nous éclairent sur sa pensée. Ses motivations sont clairement expliquées dans la préface de son traité de 1614 : « *Très illustre amateur de mathématiques, comme rien n'est aussi pénible que la pratique des mathématiques, parce que la logistique est d'autant plus freinée, retardée que les multiplications, les divisions, et les extractions de racines carrées ou cubiques portent sur des grands nombres ; qu'elle est soumise à l'ennui de longues opérations et beaucoup plus encore à l'incertitude des erreurs, j'ai entrepris de rechercher par quel procédé sûr et rapide on pourrait éloigner ces obstacles. Dans ce but, j'en ai examiné soigneusement une grande quantité, les uns après les autres, et enfin j'en ai trouvé plus d'un, clair et d'un emploi facile... À la vérité, aucun, parmi les autres, n'est plus utile que l'un deux ; par son moyen, on rejette les nombres utilisés dans les multiplications, les divisions et les extractions de racines lorsqu'elles sont difficiles et prolixes, et on les remplace par d'autres nombres, que j'ai pris soin de leur adjoindre, et l'on achève le calcul par des additions, des soustractions, des divisions par deux et par trois seulement... Il m'a plu de communiquer son usage au monde des mathématiciens.* » Dans son « *descriptio* », les logarithmes sont définis ainsi : « *Logarithmi sunt numeri qui proportionalibus adjuncti aequales servant differentias* » (Les logarithmes sont des nombres qui correspondent à des nombres proportionnels et ont des différences égales). Il dit aussi : *« Logarithmi dici possunt numerorum proportionalium comites aequidifferentes* » (Les logarithmes peuvent être appelés compagnons équidifférents de nombres proportionnels).

Le mot logarithme est de lui et signifie « nombre de raisons », de deux racines grecques : *logos* (raison, sous-entendu raison de progression arithmétique) et *arithmos* (nombre, quantité de). Les tables qu'il construit sont des tables de logarithmes de sinus. À cette époque, « sinus » n'avait pas le même sens que maintenant ; il s'agissait de la mesure d'un segment dans un cercle de rayon quelconque et non de son rapport avec le rayon. Par souci de précision, il va choisir un rayon de 10^7. Ce qu'il appelle le « sinus total » vaut donc 10^7 et non 1. Dans son « *constructio* », il nous explique son travail. En voici quelques extraits :

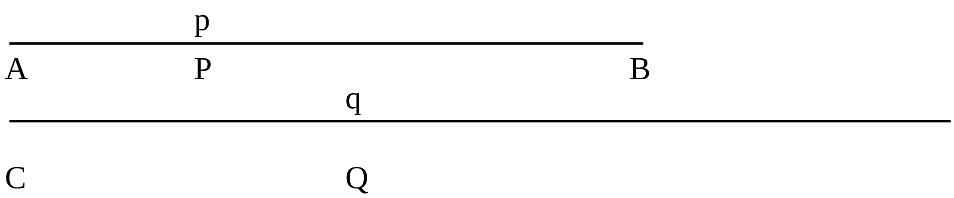
1) « *Une table logarithmique est une petite table par l'usage de laquelle nous pouvons obtenir une connaissance de toutes les dimensions géométriques et mouvements dans l'espace, par un calcul très facile. Elle est tirée de nombres progressant en proportion continue.*
2) *De progressions continues, une arithmétique est une qui procède par intervalles égaux ; une géométrique, une qui avance par des intervalles inégaux et proportionnellement croissants ou décroissants.* » (pour la suite, voir *Complément* n°3 – pp. 22-26).

Il va donc construire une progression géométrique de raison $(1-1/10^7)$, ce qui est facile car il se contente de soustraire la 10^{7} e partie de ce nombre pour obtenir le suivant.

Nombre	Logarithme
10000000 0000000	0
9999999 0000000	1
9999998 0000001	2
...	...
99999900 0004950	100.

Le travail est impeccable mais beaucoup trop long, car la différence entre deux nombres est très petite et s'amenuise à chaque opération. Il faudrait une quantité de calculs invraisemblable pour arriver au bout.

D'autre part, les interpolations ne peuvent se faire que linéairement ; ses logarithmes sont discrets. Aussi va-t-il affiner son concept de logarithme et le rendre continu, par la considération d'un point mobile sur un segment. Cette introduction de la cinématique dans un problème mathématique est totalement d'avant-garde à son époque et vraiment géniale. Il imagine deux lignes. Sur l'une d'entre elles, dont la longueur est celle du rayon d'un cercle (qu'il appelle sinus total), se déplace un point avec une vitesse proportionnelle à la distance qu'il lui reste à parcourir. Sur la seconde, de longueur indéfinie, se déplace un point, parti en même temps que le premier, avec une vitesse constante, égale à celle que le premier point avait en commençant. La distance parcourue par le deuxième point à chaque instant est le logarithme de la distance que le premier doit encore parcourir.



logarithme PB = CQ (voir *Complément* n°3 – pp. 22-26)

« *Le logarithme d'un sinus donné est ce nombre qui a augmenté arithmétiquement avec la même vitesse que celle avec laquelle le rayon a commencé à diminuer jusqu'au sinus donné* ». « *D'où rien est le logarithme du rayon.* »

Par sa définition, il peut encadrer le logarithme entre deux valeurs, l'une plus petite et l'autre plus grande : « *D'où aussi il suit que le logarithme de n'importe quel sinus donné est plus grand que la différence entre le rayon et le dit sinus et plus petit que la différence entre le rayon et la quantité qui l'excède dans le rapport du rayon au sinus donné. D'où le premier nombre de la première table, qui est 9999999 a son logarithme entre les limites 1,0000001 et 1,0000000.* »

Grâce à ce logarithme exprimé avec une très grande précision, il peut continuer la table : « *Quel que soit le nombre de sinus décroissant depuis le rayon en proportion géométrique, si on connaît l'un des logarithmes ou ses limites, on peut trouver les autres. Ceci découle nécessairement des définitions de l'accroissement arithmétique, de la décroissance géométrique et d'un logarithme... De telle sorte que, si le premier logarithme correspondant au premier sinus est donné, le second logarithme sera le double, le troisième le triple, et ainsi de suite ; jusqu'à ce que les logarithmes de tous les sinus sont connus. Les logarithmes de sinus proportionnels diffèrent également. Ceci découle nécessairement des définitions d'un logarithme et des deux mouvements. De quatre proportionnelles géométriques, comme le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, la somme des logarithmes des* *extrêmes est égale à la somme des logarithmes des moyens. D'où, trois quelconques d'entre eux étant connus, le quatrième devient connu.* »

Napier calcule, de proche en proche, le logarithme des sinus, jusqu'au sinus égal à la moitié du rayon. Il déduit les autres logarithmes de formules de trigonométrie et d'un procédé ingénieux.

Joost Bürgi invente les logarithmes indépendamment de Napier, mais il ne publie qu'après que le livre de Napier a fait le tour de l'Europe. Et, quand il publie en 1620, il ne donne pas d'explications, ce qui le rend inintelligible pour un lecteur ordinaire. Comme Napier, il utilise les progressions pour définir les logarithmes et choisit 10^8 comme point de départ. Sa raison est $(1+10^{-4})$.

Nombres	Logarithmes
$10^8(1+10^{-4})$	10
$10^8(1+10^{-4})^2$	20
$10^8(1+10^{-4})^3$	30
...	...

Les concepts logarithmiques de Napier et de Bürgi étaient plus généraux que les nôtres en ce sens qu'en glissant une progression derrière l'autre, ils pouvaient choisir n'importe quel nombre positif comme étant celui dont le logarithme vaut 0. De plus, les termes des 2 séries pouvaient croître dans le même sens (Bürgi) ou dans le sens opposé (Napier). La notion de base est inapplicable à leurs systèmes. Ni chez l'un, ni chez l'autre, le logarithme de 1 n'est égal à zéro. Par conséquent, il n'y a pas d'isomorphisme entre l'ensemble des nombres et l'ensemble de leurs logarithmes : $\log ab$ n'est pas égal à $\log a + \log b$.

3. Après Neper

En 1615, le professeur de mathématiques Henri Briggs vient voir Napier en Écosse et leurs discussions conduisent à la construction par Briggs d'une table de logarithmes « améliorés » pour laquelle le logarithme de 1 est égal à zéro et le logarithme de 10 est égal à 1. Les plus âgés d'entre nous ont encore utilisé ces tables jusqu'à l'avènement des calculettes.

Voici ce que Briggs écrit dans la préface de son *Arithmetica Logarithma* (1624) : « *...Que ces logarithmes diffèrent de ceux que cet homme illustre, le Baron de Merchiston, publia dans son Canon Mirificus ne doit pas vous surprendre. Car moi-même, lorsque j'ai exposé leur doctrine publiquement devant mes auditeurs de Gresham College, je remarquai qu'il serait bien plus commode que zéro soit gardé comme logarithme du sinus total, de même que dans le Canon Mirificus, mais que le logarithme de sa dixième partie soit 10000000000. Et, concernant cette question, j'écrivis immédiatement à l'auteur lui-même ; et aussitôt que la saison de l'année et le loisir de mes devoirs publics me le permirent, je me rendis à Édimbourg, où, reçu très hospitablement par lui, je restai un mois entier.*

Mais comme nous parlions du changement des logarithmes, il dit qu'il avait été de la même opinion depuis quelque temps et qu'il avait souhaité l'accomplir. Il avait cependant publié ceux qu'il avait déjà préparés en attendant d'en construire de plus pratiques quand ces affaires et sa santé le lui permettraient. Mais il était d'avis que le changement devrait être fait de cette manière que zéro soit le logarithme de l'unité et 10000000000 celui du sinus total. Je ne pus qu'admettre que c'était de loin le plus commode... » (voir *Complément* n°4 – pp. 26-27)

Pour faire sa table de logarithmes, Briggs a commencé par calculer les racines carrées répétées depuis 10 :

x	$\log x$
10	1,0000
$10^{(1/2)}$	0,5000
$10^{(1/4)}$	0,2500
$10^{(1/8)}$	0,1250
etc.	

Après 54 racines successives, il obtient un nombre très légèrement supérieur à 1, dont le logarithme vaut $1{:}2^{54}$. Puis, par une application répétée de la loi des logarithmes, il construit une table de logarithmes de nombres très rapprochés, la première table de « logarithmes communs ». Cette fois, les logarithmes ont toutes les propriétés que nous leur connaissons :

$$\log(a \times b) = \log a + \log b$$

$$\log(a / b) = \log a - \log b$$

$$\log a^m = m \log a$$

$$\log \sqrt[m]{a} = 1 / m \log a$$

Un réajustement des logarithmes originaux de Napier est fait dans les *New Logarithms* de John Speidell en 1619, où il remplace le logarithme de Neper par un moins ce logarithme.

Dans les pays étrangers, comme en Angleterre, le retentissement des travaux de Neper est énorme. En Italie, Cavalieri s'en sert pour moderniser la notion de rapport. À son époque, les rapports étaient toujours des rapports de grandeurs et on ne pouvait associer un nombre à un rapport, sauf s'il était entier. Dans le cas de 7 et 3 par exemple, seul un quotient approché aurait pu convenir et la rigueur ne l'admettait pas. Il a alors l'idée de définir tous les rapports égaux par la différence de leurs logarithmes. Il écrit : « *Les logarithmes sont des nombres adjoints à des nombres continuellement proportionnels ; ils conservent des différences égales, qui servent de mesure aux nombres continuellement proportionnels*. » À ses yeux, les logarithmes sont des nombres abstraits, au même titre que les fractions ou les nombres irrationnels. On peut penser aussi qu'il est le premier à remplacer les mesures fractionnaires des intervalles musicaux par des différences logarithmiques.

Aux Pays-Bas, A. Vlacq publie des éditions successives, de 1626 à 1633, qui contribuent à diffuser largement les tables de logarithmes accessibles. Il complète aussi la table de Briggs.

En Allemagne, Kepler, enthousiaste, fait des tentatives pas très heureuses pour améliorer les tables existantes. Mais il nous éclaire sur sa compréhension des logarithmes connus : « *Si on suppose entre 1 et 10 une échelle infinie de Moyennes Proportionnelles, dont le nombre est 100 000, etc. in infinitum ; entre 1 et 2, il y aura 30102 de telles proportionnelles, entre 1 et 3, il y en aura 47712. Ces nombres sont les logarithmes des Rapports de 1 à 10, de 1 à 2, de 1 à 3*. » Il dit aussi : « *Ces rapports peuvent être mesurés par le nombre de petits rapports (ratiunculae) contenus dans chacun. Ce nombre est un logarithme du rapport mais les logarithmes ainsi formés peuvent avoir autant de formes qu'il vous plaît. Si, au lieu de 100 000 proportionnelles entre 1 et 10 nous en prenons 230258, alors au lieu des logarithmes communs, nous avons les logarithmes naturels*. »

Chaque système de logarithmes diffère d'un facteur constant d'un autre choisi comme standard.

4. Les logarithmes et les courbes

Le point de vue théorique du logarithme s'élargit beaucoup durant le 17e siècle par la représentation graphique, en coordonnées cartésiennes et polaires, d'un nombre variable et de son logarithme. Ainsi sont inventées les courbes logarithmiques et les spirales logarithmiques. La courbe logarithmique est sans doute venue à l'esprit de beaucoup de mathématiciens. On ne sait pas avec certitude qui en a été l'inventeur : Torricelli, Descartes ? En tous cas, elle est l'objet d'un grand intérêt et ses propriétés sont étudiées par les plus grands noms.

Huygens, dans « *De la cause de la Pesanteur* », appendice à son *Traité de la Lumière*, l'étudie avec soin (voir *Complément* n°5 – pp. 27-29). Il pense lui avoir donné son nom : « *Dans la supposition, où les résistances (de l'air) sont comme les vitesses, je remarquai que, pour trouver les espaces passés en de certain temps, lorsque les corps tombent ou montent perpendiculairement, et pour connaître les vitesses au bout de ce temps, il y avait une ligne courbe, que j'avais examinée longtemps auparavant, qui était de grand usage en cette recherche. On la peut appeler la logarithmique ou la logistique, car je ne vois pas qu'on lui ait encore donné de nom, quoique d'autres l'aient encore considérée ci-devant*. »

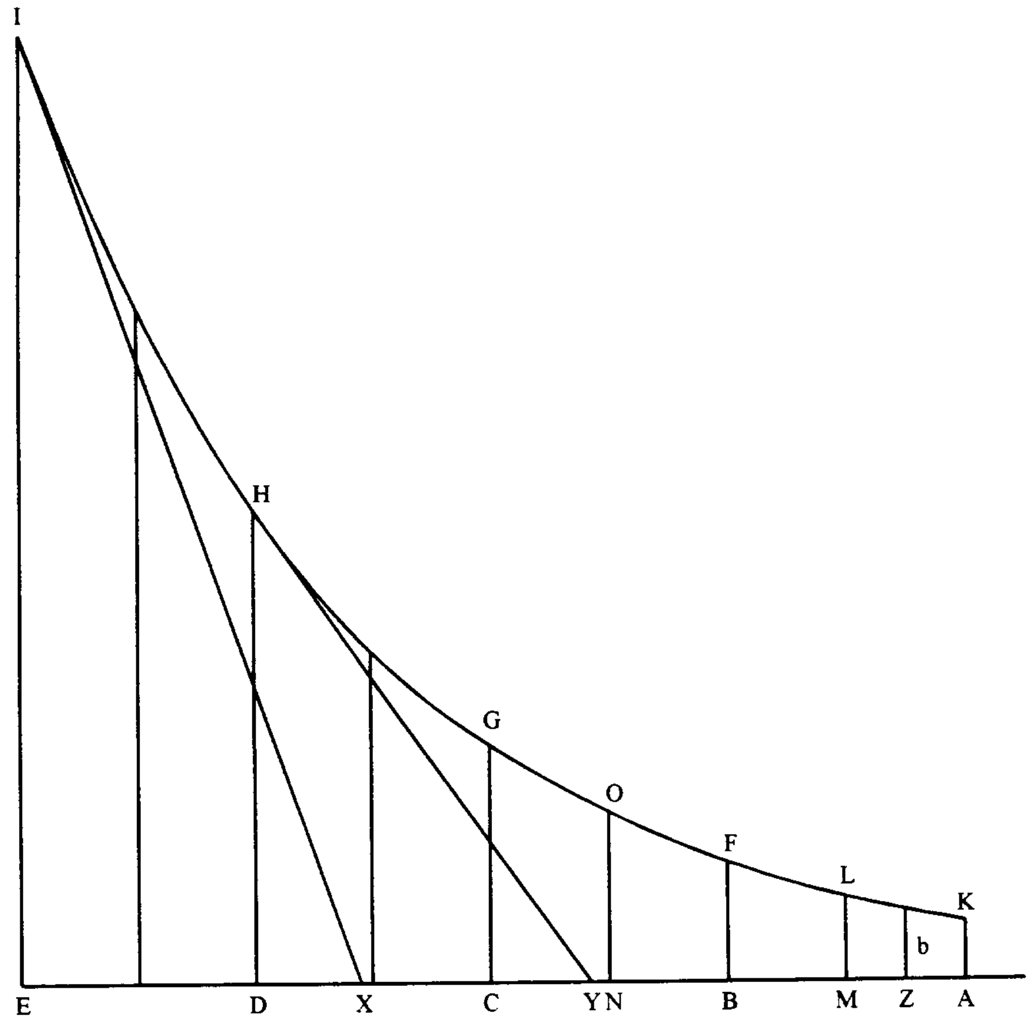


Figure 1 : la logarithmique de Huygens

AB = BC = CD = DE etc.
BF = 2AK, GC = 4AK, HD = 8AK ...
ML est moyen proportionnel entre AK et BF (M milieu de AB),
ND = 2ML (N milieu de BC) ...

EX $= -\dfrac{1}{\ln b}$ = DY (sous-tangente) ; b = ordonnée de AZ, AZ = AK = 1.

Si nous prenons AE comme axe des x et AK comme axe des y, $x = \log_b y$.

La pente de la tangente en y_1 est $x' = \dfrac{-1}{y_1 \ln b}$ et son équation est $x - x_1 = \dfrac{y - y_1}{-y_1 \ln b}$.

La sous-tangente est $x - x_1$ et pour y = 0 (asymptote) $|x - x_1| = \left|\dfrac{1}{\ln b}\right|$

On peut ainsi tracer la tangente en chaque point.

Huygens s'exprime autrement : « *Le rapport de la sous-tangente à la distance entre deux ordonnées dont l'une est le double de l'autre est trouvé égal à celui de* 0,4342944819... ($\log_{10} e$) à $\log_{10} 2$. »

$x_2 - x_1 = \log_b 2 = \dfrac{\ln 2}{\ln b}$ d'où, en prenant pour la sous-tangente la valeur que nous avons trouvée :

$$\frac{\left|\frac{1}{\ln b}\right|}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{\ln b}}{\frac{\ln 2}{\ln b}} = \frac{1}{\ln 2} = \frac{\log_{10} e}{\log_{10} 2}.$$

D'autre part, Torricelli écrit à Cavalieri, en août 1647 : « *Je t'envoie les mesures d'une nouvelle figure, que j'ai appelée demi-hyperbole parce qu'elle n'a qu'une seule asymptote ; mais peut-être pouvait-elle s'appeler avec plus de raison ligne logarithmique ou Népérienne, puisque en elle se comprennent très bien la nature, les propriétés et les démonstrations des logarithmes.* » Suivent des théorèmes qui en justifient les utilisations. Dans une lettre du même mois, adressée à Michelangelo Ricci, il revient sur cette courbe : « *Cette ligne que j'appelais demi-hyperbole n'est en fait pas du tout une nouvelle invention, comme je pense que vous l'aurez reconnu tout de suite, mais est autorisée à porter le nom d'un grand auteur, et d'une invention grandissime dans les mathématiques. Je parle de Neper et des logarithmes de l'une et l'autre espèce, dont la naissance avec leurs propriétés et leurs démonstrations se distinguent manifestement en cette ligne. En somme, ces deux mouvements, un arithmétique et un géométrique qui ne furent considérés par Neper que séparément, ont été contemplés par moi en même temps, et j'en ai tiré une spéculation de géométrie, où lui ne recherchait qu'une pratique arithmétique*. » La courbe a aussi été citée par J. Bernoulli. Sa rectification a été expliquée par l'Hospital dans une lettre à Leibniz.

La courbe qui est la représentation en coordonnées polaires de la relation entre une variable et son logarithme fut inventée par Descartes. Il la décrit en 1638 dans une lettre à Mersenne. Il ne donne pas son équation et il ne la connecte pas avec les logarithmes. Il la décrit comme la courbe qui fait des angles égaux avec tous les rayons tracés depuis l'origine. Elle est la projection sur l'équateur de la Loxodromie, qui coupe les méridiens selon un angle constant.

Peu après, cette spirale est réinventée par Torricelli. Il l'étudie dans *Racconto di alcuni problemi*. « *J'ai trouvé une autre sorte de spirale merveilleuse dont je donne la définition par un mouvement et d'une autre manière. Je négligerai la définition du mouvement, et je donnerai l'autre par des moyennes proportion-nelles*. » Mais, dans une lettre à Ricci, en mars 1646, il donne cette définition par le mouvement : « *Si une ligne droite, immobile à son extrémité, tourne avec une vitesse toujours égale, et que dans le même temps se meut sur cette ligne un point avec une telle loi que dans des temps égaux il parcourt des espaces continûment proportionnels, il décrira une courbe qui peut s'appeler spirale géométrique*. »

Figures 2 et 3. (voir *Complément* n°6 – pp. 29-31)

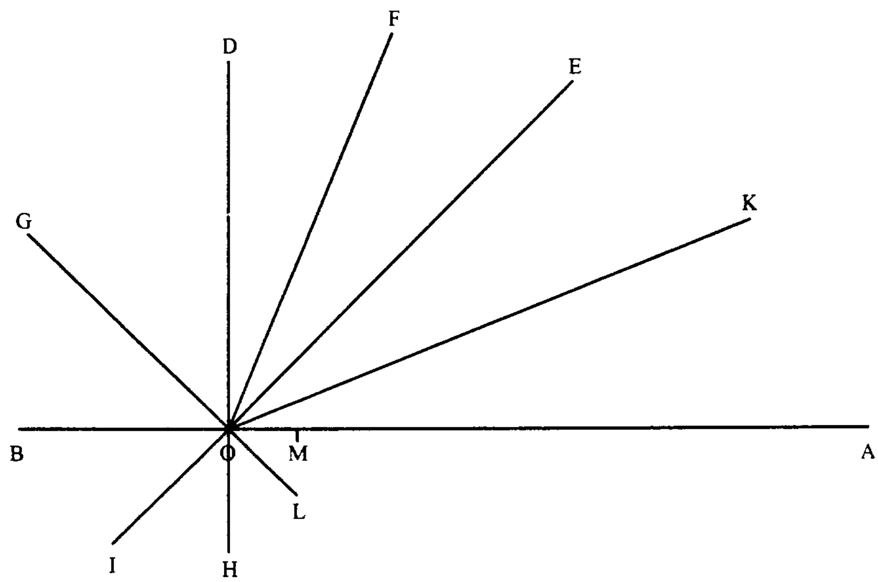


Figure 2

On part de OA, OB.
On construit OD, moyenne proportionnelle entre ces segments.
On prend la bissectrice de OA, OD et on construit OE, moyenne proportionnelle entre OD et OA.
Ainsi de suite.

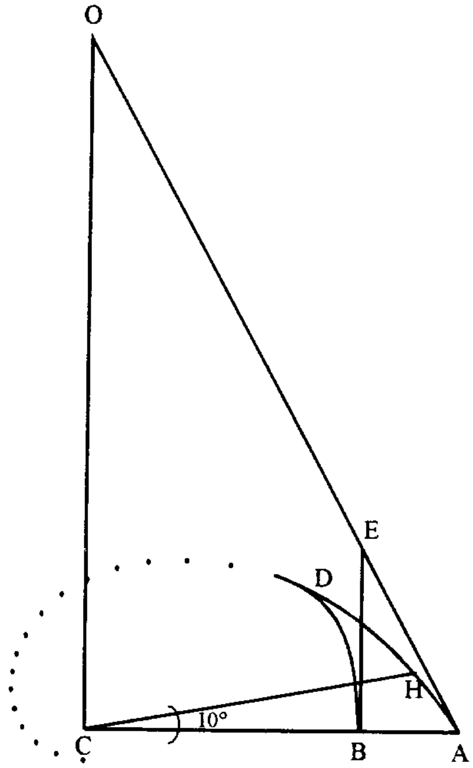
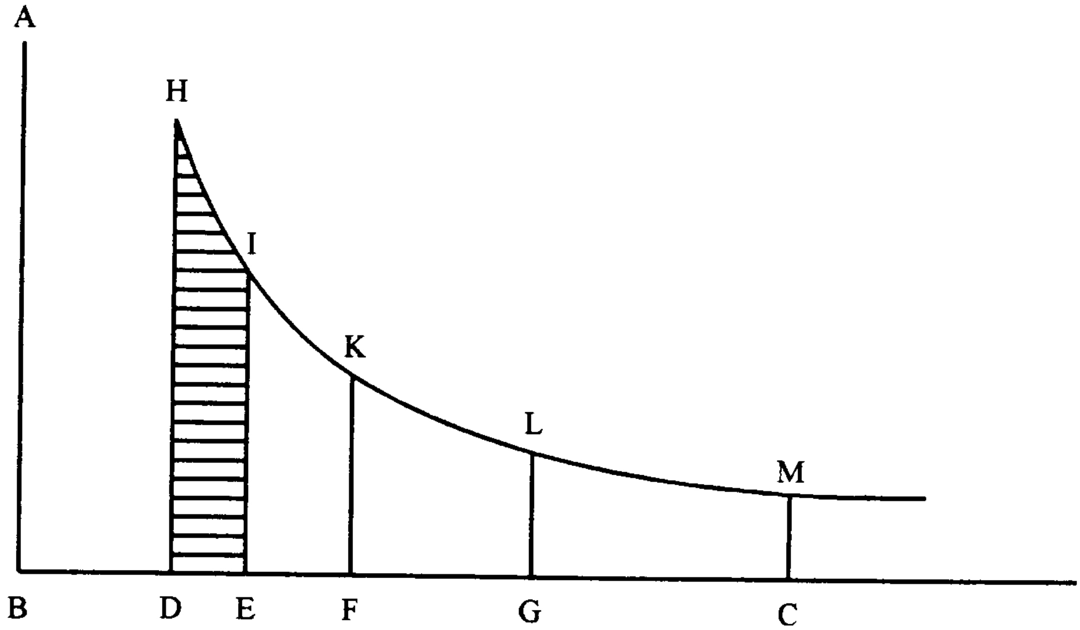


Figure 3

« *Ce qui est admirable dans cette spirale c'est que si C est son centre et que soit pris un arc quelconque AD, si du centre C avec un intervalle CD nous faisons l'arc de cercle BD et que nous tirons deux tangentes BE au cercle et AE à la spirale, la droite AE sera égale à la courbe AD et AO sera égale à toute la spirale depuis A, nonobstant le fait que cette spirale avant d'arriver à C devra nécessairement faire autour de lui un nombre infini de révolutions.* »

Une troisième courbe plus importante encore est l'hyperbole. La quadrature de l'espace entre l'hyperbole et son asymptote a été faite par Grégoire de Saint-Vincent en 1647 dans son *Opus geometricum*. Il ne mentionne pas les logarithmes, son résultat est purement géométrique. Sa proposition 130 établit que, si des parallèles à une asymptote sont tracées entre l'hyperbole et son autre asymptote, de telle manière que les aires successives des quadrilatères mixtilinéaires ainsi formés sont égales, alors les longueurs de ces parallèles forment une progression géométrique.

« *Soient AB, BC asymptotes de l'hyperbole et soient posés DH, EI, FK, GL, CM parallèles à l'asymptote, des segments égaux HE, IF, KG, LC.*[1] *Je dis que les lignes HD, IE, KF, LG sont en continuelle analogie*. »



Le travail de Saint-Vincent serait probablement resté sans grand retentissement, si le Père Mersenne ne l'avait attaqué dans un livre de réflexions sur des sujets mathématiques et physiques et si, d'autre part, il n'avait lancé en défi un problème : « *Étant données trois grandeurs quelconques, rationnelles ou irrationnelles, et les logarithmes de deux d'entre elles, trouver géométriquement le logarithme de la troisième*. »

Le père Alphonse Antoine de Sarasa, ami et admirateur de Grégoire de Saint-Vincent, résout le problème en se servant de sa proposition 130 et lie donc pour la première fois, en 1649, les logarithmes à l'hyperbole, « *Unde haec superficies supplere possunt locum logarithmorum datorum*. » Dans sa préface, Sarasa proteste vigoureusement devant « *les critiques injustifiées et faites de manière indigne à l'œuvre très subtile du R.P. Grégoire de Saint-Vincent, géomètre de grand mérite, dont les travaux incomparables admirés et applaudis par ceux qui en avaient eu connaissance risquent d'être ainsi oubliés*. »

Dès lors, soit on connaît les logarithmes, par les données d'une table, et on mesure les aires, soit un calcul géométrique donne la valeur des aires et on en déduit les logarithmes. Mais, évidemment, il y a une infinité d'hyperboles et par conséquent une infinité de logarithmes correspondants.

C'est Huygens qui calcule les logarithmes hyperboliques (plus souvent appelé logarithmes naturels) en 1666, en même temps que Gregory, à partir de $xy = 1$.

5. Les logarithmes et le calcul infinitésimal

Le calcul infinitésimal a été découvert par Leibniz et Newton suite à l'étude des courbes, des longueurs d'arcs, des aires, des volumes de révolution. Il en résulte des progrès importants dans l'étude des logarithmes et celle-ci, de son côté, fournira des résultats décisifs pour la poursuite de l'étude du calcul infinitésimal.

[1] Les segments HE, IF, etc. signifient les aires DHIE, EIKF, etc.

Nicolas Mercator publie *Logarithmotechnia* (1668). Il y écrit l'équation $\frac{1}{1+a}=1-a+a^2-a^3+\cdots$ et intègre terme à terme. Il n'écrit pas la série log(1 + *a*). Il écrit les valeurs numériques des premiers termes avec a = 0,1; puis avec a = 0,21 et finalement, en se servant des résultats de Saint-Vincent et Sarasa, il connecte ses propres résultats avec les logarithmes. Wallis sera le premier à écrire la série de Mercator en termes généraux.

En 1667, Newton calcule des logarithmes comme aires hyperboliques. Il part de l'hyperbole $y=\frac{1}{1+x}$ et calcule l'aire en dessous de l'hyperbole sur l'inter-valle (0, *x*). Il écrit $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3\cdots$, résultat obtenu par division de polynômes et intègre terme à terme. Il obtient ainsi :

$A(x)=x-x^2/2+x^3/3-x^4/4\cdots$, ce qui est le logarithme naturel de $1+x$.

Il calcule aussi la série réciproque : $x=z+z^2/1\times2+z^3/1\times2\times3+\cdots$ où $z=\log(1+x)$. Si on fait $X=x+1$, on obtient $X=1+\log X+\log^2 X/2+\cdots$

Pietro Mengoli, élève de Cavalieri, publie en 1659 sa *Geometria Speciosa*, dans laquelle il donne une théorie rigoureuse des logarithmes de Napier (voir *Complément* n°7 – p. 32). En 1676, Leibniz dérive l'intégrale $\int dy/y$ et conclut que la courbe est logarithmique. Dès ce moment, les logarithmes vont jouer un rôle primordial en analyse et aussi en physique, en théorie musicale et même en biologie. Mengoli écrit en effet : « *Quelle que soit la raison de la durée des tremblements des tympans externe et interne, l'âme en extrait son logarithme*. »

Wallis, en 1685, dans son *Algebra*, développe la théorie des logarithmes en commençant par deux progressions : 1, 2, 4, 8, etc. et 0, 1, 2, 3, 4, etc. Il généralise en prenant 1, r, rr, r^3, r^4, etc. et 0, 1, 2, 3, etc. et remarque : « *On appelle ces exposants logarithmes. Ce sont des nombres artificiels qui répondent aux nombres naturels de telle manière que leur addition et leur soustraction répondent à la multiplication et à la division des nombres naturels* ». C'est la première fois, semble-t-il, que des logarithmes sont définis comme des exposants, mais l'utilisation systématique de cette définition est longue à venir et elle est surtout due à Euler. On trouve néanmoins le concept de courbe exponentielle et de courbe logarithmique chez quelques mathématiciens, comme Leibniz et Bernoulli. On en trouve trace, entre autres, dans leur correspondance.

J. Bernoulli adresse une lettre à Leibniz en 1694 où il parle de la construction de courbes exponentielles $x^x=y$, par l'intermédiaire de la courbe ordinaire logarithmique dont il dit qu'elle est elle-même une courbe de ce type, puisque son équation est $a^x=y$. Bernoulli suppose tracée la courbe logarithmique et s'en sert pour dessiner $x^x=y$. Il choisit une valeur x_1, mesure $\log x_1$ sur la courbe logarithmique, puis construit géométriquement $x_1\log x_1=\log y_1$. Finalement, il trouve l'antilogarithme y_1 par la même courbe logarithmique. Il a ainsi un point sur la courbe $x^x=y$. La courbe est construite point par point. (Figure 4)

On a CD = log x_1 ; CM = $x_1\log x_1$; CM = $\frac{\mathrm{CI}\times\mathrm{CD}}{\mathrm{CA}}$; MN = IH.

Le point H sera sur la courbe demandée.

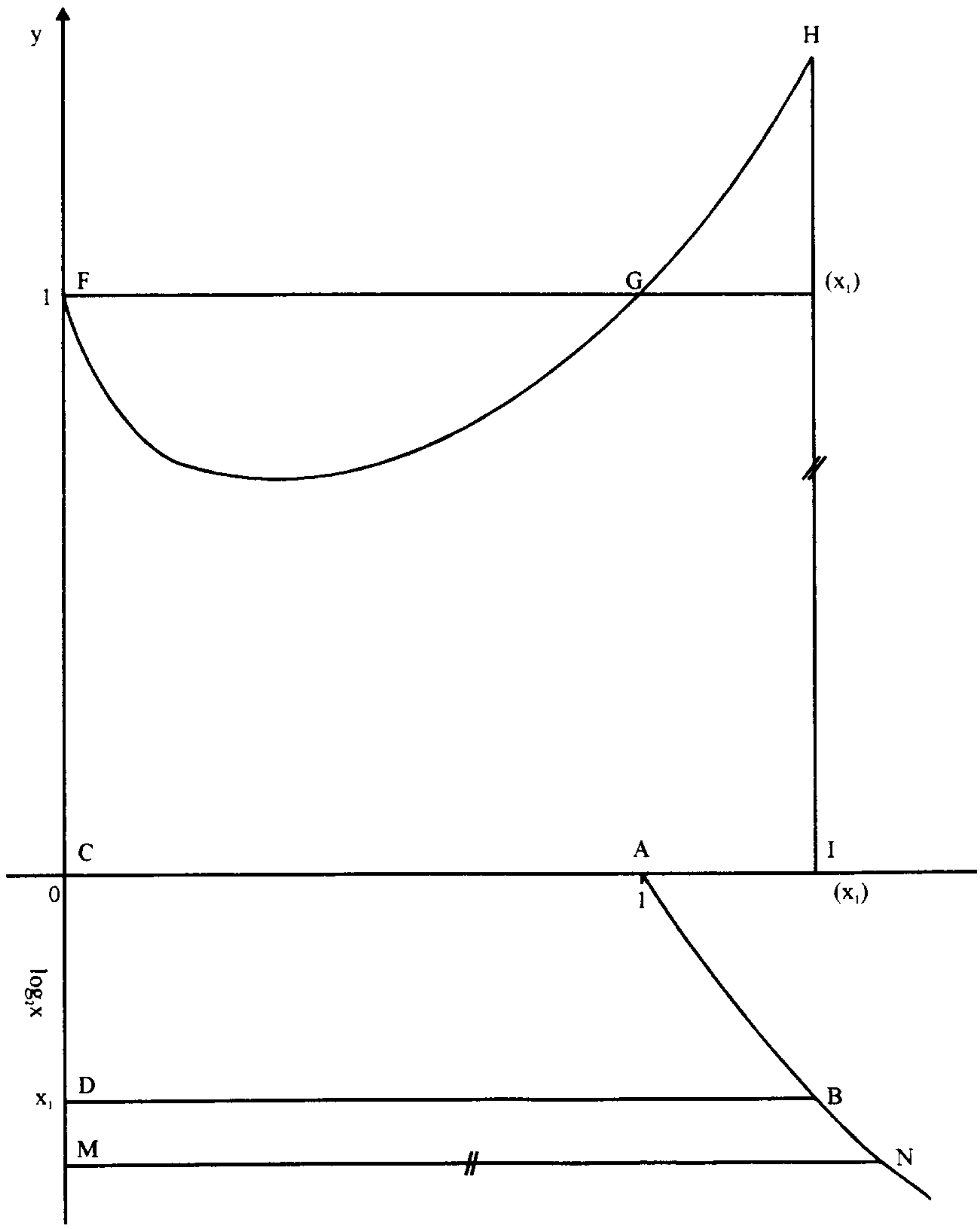


Figure 4

Bernoulli utilise la propriété $x\log x = \log y$ sans l'exprimer. Leibniz, dans sa réponse, écrit $x^x = y$ et $x\log x = \log y$. En dérivant, il en tire $(1+\log x)dx = dy/y$ d'où $dy/dx = y(1+\log x) = y(1+\int dx/x)$ et peut ainsi construire la tangente à la courbe.

Le mot « fonction » apparaît pour la première fois dans la correspondance entre Leibniz et J. Bernoulli (1698). En 1718, Bernoulli le rend public « *On appelle ici fonction d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.* »

Le mot « transcendant », lui, remonte à Leibniz qui écrit « *Les transcendances sont des quantités que l'on ne peut exprimer par le calcul commun, que l'on désigne par des équations finies, mais d'un degré infini, et dans lesquelles l'inconnue figure à l'exposant.* »

6. Les logarithmes des nombres négatifs et des imaginaires

L'étude des logarithmes semble avoir atteint son sommet, à ce moment, mais une nouvelle question va relancer la généralité de son concept et déboucher sur une synthèse de branches des mathématiques qui semblaient sans lien.

Au 17^e et 18^e siècles, les mathématiciens sont encore assez réticents devant les nombres négatifs, presqu'autant que devant les nombres imaginaires. Leibniz les emploie cependant parce qu'il considère qu'on peut les utiliser avec le même avantage et la même sécurité que d'autres quantités inconcevables. Il écrit à Huygens en 1675 : « *J'ai trouvé le premier qu'on peut former des racines composées non extractibles de tous les degrés pairs, qui contiennent des imaginaires, et dont néanmoins la réalité peut être rendue palpable sans extraction : pour faire juger que la réalité de telles formules n'est pas bornée par l'extrahibilité, dont l'exemple de la formule* $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ *qui vaut* $\sqrt{6}$ *est une preuve très considérable.* » Et Huygens lui répond : « *La remarque que vous faites touchant les racines inextrahibles et avec des quantités imaginaires, qui pourtant ajoutées ensemble composent une racine réelle est surprenante et tout à fait nouvelle. L'on n'aurait jamais cru que* $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ *fît* $\sqrt{6}$*, et il y a quelque chose de caché là-dessous qui nous est incompréhensible*. » Leibniz lui-même d'ailleurs, en 1702, parlant des facteurs imaginaires de x^4+a^4, les appelle « *un recours merveilleux de l'intelligence divine, une naissance non naturelle dans le royaume de la pensée, presque un amphibium entre l'être et le non-être* ».

Cependant, quelques mathématiciens utilisent sans hésitation les nombres tant complexes que négatifs. Par exemple, Cotes développe en 1714 une formule très importante que nous écririons $ia=\log(\cos a+i\sin a)$, mais il ne fait pas de considérations sur la signification ni surtout sur la valeur de ce logarithme de nombre imaginaire. Il arrive à ce résultat en calculant de deux manières différentes l'aire décrite par un quart d'ellipse tournant autour d'un de ses axes.

Ce sont les nombres négatifs, avant les imaginaires, qui font l'objet de discussions passionnées. La correspondance entre Leibniz et Bernoulli en 1712 est très explicite sur ce point. Leibniz soutient qu'un nombre négatif ne peut avoir de logarithme et Bernoulli soutient le contraire. Chacun a ses arguments et aucun des deux ne convainc l'autre (voir *Complément* n°8 – pp. 32-33). Il faudra attendre Euler pour dénouer la controverse.

7. L'œuvre d'Euler (voir *Complément* n°9 – pp. 33-37)

Trente ans plus tard, Euler met au point la question des logarithmes, élargit leur concept, en le généralisant aux nombres négatifs et complexes. Il reprend le point de vue de Bernoulli, mais en évite les contradictions. Au chapitre XXI, §515 de son *Introduction à l'analyse infinitésimale*, nous lisons : « *Il se présente ici une question à éclaircir, c'est de savoir si la logarithmique entière se trouve décrite de cette manière (par les nombres positifs) ; et si la courbe, outre cette branche n'a pas encore d'autres parties. Car nous avons vu auparavant qu'il y avait toujours deux branches qui convergeaient vers la même asymptote. Aussi quelques auteurs ont-ils avancé que la logarithmique était composée de deux parties semblables situées de chaque côté de l'axe de manière que l'asymptote était en même temps un diamètre. Mais l'équation* $y=ae^{x/b}$ *ne fait nullement connaître cette propriété ; car toutes les fois que x/b est un nombre entier, ou une fraction dont le dénominateur est un nombre impair, y a une valeur réelle et en même temps positive, mais si x/b a un dénominateur pair, alors l'appliquée y aura 2 valeurs, l'une positive et l'autre négative ; ce qui donnera un point de la courbe situé de l'autre côté de l'asymptote.*

Il s'ensuit que la logarithmique aura en dessous de l'asymptote une infinité de points séparés les uns des autres, qui ne constituent plus une courbe continue, quoique par leur rapprochement infiniment grand ils en offrent l'apparence ; ce qui est un paradoxe, qui n'a point lieu dans les courbes algébriques ; mais il s'en présente un autre ici, qui est beaucoup plus surprenant. Les logarithmes (Euler note les logarithmes l.) des nombres négatifs sont imaginaires, on aura donc pour l. - n un nombre imaginaire que je suppose = i, mais le logarithme d'un carré est le double de celui de *sa racine ; donc* $l\cdot(-n^2) = l\cdot n^2 = 2i$ *; d'ailleurs* $l\cdot n^2$ *est aussi une quantité réelle = 2l.n . Il s'ensuivrait donc que la quantité réelle l.n et l'imaginaire i seraient la moitié de la même quantité réelle* $l\cdot n^2$. *Il faudrait donc en conclure que tout nombre aurait 2 sortes de moitiés, l'une réelle et l'autre imaginaire ; qu'il aurait de même 3 tiers, 4 quarts tous différents, et ainsi de suite ; de manière cependant qu'une seule de ces parties serait réelle. On ne voit pas trop clairement comment il est possible de concilier cette assertion avec la coutume qu'on a de se former des quantités.* »

...

§516 ... « *Pour éclaircir ces propositions, qui ne paraissent nullement admissibles, et lever toute espèce de doute, il faut établir un autre paradoxe ; à savoir que tout nombre a une infinité de logarithmes, parmi lesquels il n'y en a qu'UN qui soit réel. Ainsi quoique le logarithme de l'unité soit zéro, elle en a cependant une infinité d'autres qui sont imaginaires, à savoir* 2*l.(-1),* $3l.(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2})$, $4l.(\frac{-1\pm\sqrt{-1}}{2})$ *et d'autres sans nombre que fait connaître l'extraction des racines. Cette opinion est beaucoup plus vraisemblable que la précédente ; car en supposant x = l.a, on aura* $a = e^x$ *et par conséquent* $a = 1 + x + x^2/2! \ + x^3/3! \ldots$ *et comme cette équation a un nombre infini de dimensions, il n'est pas étonnant que x ait de même un nombre infini de racines.* »

Euler estime donc que chaque nombre a une infinité de logarithmes. Parmi ceux-ci, un seul est réel dans le cas des nombres réels positifs et aucun dans le cas des nombres réels négatifs et des nombres imaginaires. Ces logarithmes sont liés aux rapports trigonométriques par la relation $l\cdot(\cos z + i\sin z) = iz$ (*z* est donné mod 2π) ou $e^{\sqrt{-1}z} = \cos z + \sqrt{-1}\sin z$.

(Le nombre *e* a été ainsi nommé par Euler. C'est lui aussi qui définit les sinus comme rapports et non plus comme des segments)

Euler donne le développement en fraction continue de *e*. Il l'écrit sous la forme

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14\ldots}}}}$$

Il affirme que les quotients vont augmenter de 4 chaque fois, et que la fraction continue indéfiniment. D'où il déduit que *e* n'est pas une fraction rationnelle. C'est en 1874 que Hermite prouvera que *e* n'est pas un nombre algébrique.

On peut considérer que la vision du logarithme comme un exposant date d'Euler. « *Le logarithme d'un nombre proposé = y n'est autre chose que l'exposant de la puissance de e qui est égale au nombre y.* » Mais pendant tout le 18e siècle, la conception logarithmique de Neper reste plus courante. L'œuvre d'Euler ne fait pas l'unanimité à son époque et il faut du temps avant que la fonction logarithmique n'atteigne sa définition actuelle.

Une étape importante est franchie, après la représentation des nombres complexes dans le plan de Gauss, par l'introduction des surfaces de Riemann. Un des buts de ces surfaces était la visualisation des différentes valeurs des fonctions de variables complexes. Imaginons 2 plans, l'un représentant les nombres complexes *z*, l'autre les valeurs complexes de *w*, qui est une fonction à *n* ou à une infinité de valeurs de *z*. À chaque point du premier plan correspondent *n* points du deuxième. Le schéma de Riemann crée une représentation qui évite la multiplicité des valeurs de cette fonction et permet de la traiter comme une fonction uniforme. Pour cela, il suppose le deuxième plan formé de n feuillets, qui représentent ensemble les valeurs de *w*. À chaque point d'un feuillet correspond seulement une valeur de *w*. Si, pour certaines valeurs de *z*, plusieurs valeurs de *w* sont égales, les feuillets sont « soudés » aux points correspondant à ces valeurs, formant un point de diramation (« branch-point »). Pour opérer le passage continu d'une valeur de *w* à une autre, des coupures sont faites, qui sont des lignes tracées entre 2 points de diramation ou d'un point de diramation vers l'infini. Les coupures empêchent le passage à travers elles d'un côté du feuillet au côté opposé d'un autre feuillet. En appliquant ce schéma à la fonction $w = \log z$, on voit qu'au plan de z correspond une surface représentant w, constituée d'une infinité de feuillets soudés à 0 et à l'infini, avec une coupure tracée de 0 à l'infini.

La fonction logarithmique Ln z d'un nombre complexe z, est une fonction à un nombre infini de valeurs, définie pour toutes les valeurs de $z \neq 0$,
Ln $z = \ln z + 2k\pi\, i$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ avec $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ où arg z est la valeur principale de l'argument du nombre complexe z, $-\pi < \arg z < \pi$, ln z est appelé valeur principale du logarithme de z. Lorsque le nombre z est un réel positif, la valeur principale de son logarithme $\ln|z| + 0$ est réelle, tous les autres logarithmes $\ln|z| + 2ki\pi$, étant complexes. Lorsque le nombre z est réel négatif, la valeur principale de son logarithme $\ln|z| + i\pi$ est complexe de même que tous ses autres logarithmes. Lorsque le nombre z est complexe, tous ces logarithmes sont évidemment complexes.

Nous voici arrivée au terme (actuel) de cette tentative d'histoire des logarithmes. Nous avons pu constater différentes manières de les appréhender :

- correspondance entre une progression géométrique et une progression arithmétique ;
- exposant de la puissance d'un nombre pris comme base ;
- primitive de $1/x$.

L'histoire ne s'est pas déroulée linéairement. Des ébauches ont avorté, par manque de connaissances, de technique ou de symbolisme dans les autres branches des mathématiques, parce que l'époque n'était pas « mûre » ou pour d'autres raisons qui nous échappent. Les différentes visions se sont chevauchées, éclairées, enrichies l'une l'autre. L'enseignement en spirale ne date pas d'aujourd'hui...

DEUXIÈME PARTIE :
Compléments

1. La période mésopotamienne

Rappelons brièvement le système numérique babylonien pour pouvoir en apprécier les textes mathématiques : il est sexagésimal et positionnel. Deux signes suffisent pour écrire les 59 nombres possibles entre deux puissances de 60, le signe γ pour 1 et le signe $\prec$ pour 10. Ainsi 43 s'écrit $\begin{smallmatrix}\prec\prec\prec\prec\\ \gamma\gamma\gamma\end{smallmatrix}$. Ce système positionnel a 2 caractéristiques. Il est relatif, c'est-à-dire que les puissances de 60 se suivent de la droite vers la gauche, mais que rien n'indique laquelle est représentée comme point de départ. D'autre part, il n'y a pas de zéro. Parfois le scribe de l'époque paléobabylonienne laisse un vide lorsqu'il manque un rang. Ceci se passe en position médiane et non finale.

Reprenons la conclusion de Thureau-Dangin : « *Le système sexagésimal sumérien est né du croisement de 2 nombres, dont l'un* (10) *est la base de la numération la plus généralement utilisée et l'autre* (6) *offre l'avantage d'être divisible à la fois par 2 et par 3. C'est un système hybride et c'est cela sa faiblesse. Mais s'il a été viable, c'est précisément parce qu'il n'était pas homogène et respectait la base imposée de temps immémorial par les dix doigts.* »

Les tables appelées exponentielles, de même que les tables dites logarithmiques attestent, dit Neugebauer « *une connaissance des lois des opérations sur les exposants. En comparaison avec notre concept de logarithme, le seul élément manquant est la sélection d'une base commune et la tabulation pour des intervalles constants, qui seraient nécessaires pour des calculs pratiques en général. Il est donc clair que les mathématiques babyloniennes ont été très près d'une importante découverte mais qu'elles n'ont pas réussi à franchir le pas final, essentiel.* »

2. Archimède : *L'Arénaire*

Archimède part de l'idée suivante : « *Supposons une quantité de sable, pas plus grande qu'une graine de pavot et supposons qu'elle ne contienne pas plus de 10 000 grains. Supposons ensuite que le diamètre de la graine ne soit pas plus petit que 1/40 de la largeur d'un doigt. Je fais ces hypothèses à la suite des observations que voici : des graines de pavot ayant été posées sur une règle polie suivant une ligne droite de manière qu'elles se touchaient l'une l'autre, vingt-cinq graines ont occupé un espace supérieur à la longueur d'un doigt. Supposant donc le diamètre de la graine plus petit, je lui prête environ un quarantième de doigt et pas moins, désirant là aussi mettre la démonstration de la proposition à l'abri de toute contestation.* »

Mais, pour ce faire, il a besoin de manipuler de très grands nombres. Il classe les nombres en périodes : « *Il se trouve que la tradition nous a transmis les noms des nombres jusqu'à dix mille, (une myriade) et nous distinguons suffisamment les nombres dépassant les dix mille en énumérant le nombre des myriades jusqu'à la myriade de myriades. Nous appellerons donc premiers nombres ceux qui, d'après la nomenclature actuelle, vont jusqu'à la myriade de myriades ; nous appellerons unité de nombres seconds la myriade de myriades de premiers nombres, et nous compterons dans les nombres seconds des unités et, à partir des unités, des dizaines, des centaines, des milliers et des myriades des nombres seconds, et nous compterons dans les nombres troisièmes des unités, des dizaines, des centaines, des milliers et des myriades jusqu'à la myriade de myriades... et en progressant ainsi les nombres auront leur dénomination jusqu'à la myriade de myriades des nombres cent millionièmes.* » Il appelle ces nombres, nombres de la première période et recommence une deuxième période, en prenant comme unité le dernier nombre de la première période. Il peut ainsi continuer autant qu'il le veut.

À partir de ses hypothèses, il cherche le nombre de grains de sable qui se trouverait contenu dans une sphère de la grandeur de notre univers et trouve que c'est plus petit que 1 000 unités du 7^{e} ordre de nombres 10^{51}. Il prend pour diamètre de l'univers 10^{10} stades, 1 stade étant plus petit que 10 000 largeurs de doigt. Pour obtenir ce résultat « *Il est utile de connaître aussi ce qui suit. Si des nombres sont en proportion à partir de l'unité et que certains de ceux qui sont dans la même proportion sont multipliés entre eux, le produit sera dans la même proportion éloigné du plus grand des deux facteurs* *d'autant de nombres dont le plus petit facteur est éloigné, en proportion, de l'unité et il sera éloigné de l'unité de la somme moins un des nombres dont les facteurs sont éloignés de l'unité.* » Il énonce donc ici un résultat primordial pour la théorie des logarithmes.

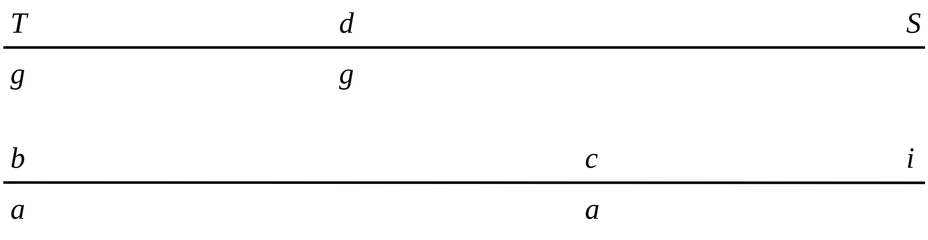
3. John Napier (Neper)

1) « Une table logarithmique est une petite table par l'usage de laquelle nous pouvons obtenir une connaissance de toutes les dimensions géométriques et mouvements dans l'espace, par un calcul très facile. Elle est tirée de nombres progressant en proportion continue.
2) De progressions continues, une arithmétique est une qui procède par intervalles égaux ; une géométrique, une qui avance par des intervalles inégaux et proportionnellement croissants ou décroissants.
3) Dans ces progressions, nous demandons la précision et la facilité dans le travail. La précision est obtenue en prenant pour base de grands nombres ; mais de grands nombres sont obtenus très facilement à partir de petits en ajoutant des zéros.
4) En calculant les tables, ces grands nombres peuvent être rendus encore plus grands, ce, en ajoutant des zéros.
5) Dans les nombres distingués ainsi par un point [2], tout ce qui est écrit après le point est une fraction dont le dénominateur est l'unité, suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres après le point.
6) Lorsque les tables sont calculées, les fractions qui suivent le point peuvent être rejetées sans erreur sensible. Car, dans nos grands nombres, une erreur qui n'excède pas l'unité est comme s'il n'y en avait pas.
7) En plus de cela, il y a une autre règle pour la précision ; c'est-à-dire quand une quantité inconnue ou incommensurable est incluse entre des limites numériques ne différant pas par beaucoup d'unités.

   ...

26) Le logarithme d'un sinus donné est ce nombre qui a augmenté arithmétiquement avec la même vitesse que celle avec laquelle le rayon a commencé à diminuer jusqu'au sinus donné.

Soit la ligne droite *TS* le rayon, et *dS* un sinus donné sur la même ligne ; soit *g* qui se meut géométriquement de *T* à *d* en un certain temps. Soit *bi* une autre ligne droite, infinie vers *i*, le long de laquelle, de *b* se meut *a* arithmétiquement avec la même vitesse que celle que *g* avait au début quand il était à *T* ; et du point *b* dans la direction de *i* faisons avancer *a* en un temps égal à celui de *g* entre *T* et *d*. Le nombre mesurant la ligne *bc* est appelé le logarithme du sinus choisi *dS*.

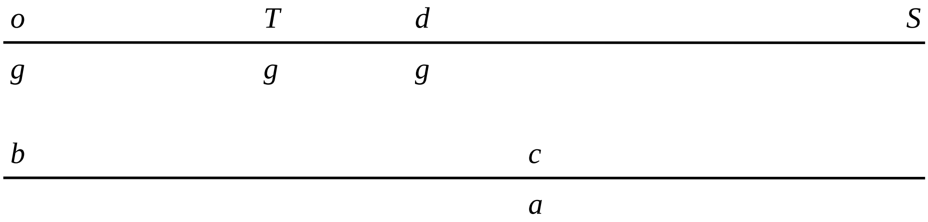


27) D'où rien est le logarithme du rayon.
28) D'où aussi il suit que le logarithme de n'importe quel sinus donné est plus grand que la différence entre le rayon et le dit sinus et plus petit que la différence entre le rayon et la quantité qui l'excède dans le rapport du rayon au sinus donné.

Ainsi la figure précédente étant répétée, et *TS* étant prolongé au-delà de *T* vers *o*, de telle manière que *oS* soit à *TS* comme *TS* est à *dS*, je dis que *bc*, le logarithme du sinus *dS*, est plus grand que *Fd* et plus petit que *oT*. Car, dans le même temps que *g* est porté de *o* en *d*, parce que *oT* est à *oS* comme *Td* est à *TS*, dans le même temps (par la définition du logarithme) *a* est porté de *b* en *c* ; de sorte que *oT*, *Td*, et *bc* sont des distances parcourues dans des temps égaux. Mais, comme *g* lorsqu'il se meut entre *T*

[2] le point décimal des Anglais joue le rôle de notre virgule.

et *o* est plus rapide que *a* en *T* et entre *T* et *d* plus lent, mais à *t* également rapide que *a* ; il s'ensuit que *oT* la distance parcourue par *g* qui va vite est plus grande, et *TD* la distance parcourue par *g* plus lentement, plus petite que *bc* la distance parcourue par le point *a* avec la vitesse intermédiaire, dans exactement le même temps ; le dernier est donc, par conséquent, une certaine moyenne entre les deux précédents. C'est pourquoi *oT* est appelé la limite supérieure et *Td* la limite inférieure du logarithme que *bc* représente.



Ce qui précède prouve que le sinus donné étant soustrait du rayon, il reste la limite inférieure, et le rayon étant multiplié par la limite inférieure et le produit divisé par le sinus, il reste la limite supérieure. »

$$TS - dS < \text{logarithme } dS < (TS - dS) \times TS/dS$$

« *D'où, le premier nombre de la première table, qui est 9 999 999 a son logarithme entre les limites 1,000 000 0 et 1,000 000 1. Les limites différant de manière insensible, elles, ou n'importe quel nombre entre elles, peuvent être prises comme le vrai logarithme.* »

Il est facile de vérifier cette affirmation de Napier :

$$10^7 - 9\ 999\ 999 < \log 9\ 999\ 999 < (10^7 - 9\ 999\ 999) \times 10^7 / 999\ 999\ 999$$

$$1{,}000\ 000\ 0 < \log 9\ 999\ 999 < 1{,}000\ 000\ 1$$

« *Quel que soit le nombre de sinus décroissant depuis le rayon en proportion géométrique, si on connaît l'un des logarithmes ou ses limites, on peut trouver les autres. Ceci découle nécessairement des définitions de l'accroissement arithmétique, de la décroissance géométrique et d'un logarithme... De telle sorte que, si le premier logarithme correspondant au premier sinus est donné, le second logarithme sera le double, le troisième le triple, et ainsi de suite ; jusqu'à ce que les logarithmes de tous les sinus sont connus. Les logarithmes de sinus proportionnels diffèrent également. Ceci découle nécessairement des définitions d'un logarithme et des deux mouvements. Aussi, il y a le même rapport d'égalité entre les différences des limites respectives des logarithmes, c'est-à-dire les différences des limites inférieures entre elles et les différences des limites supérieures entre elles. De quatre proportionnelles géométriques, comme le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, la somme des logarithmes des extrêmes est égale à la somme des logarithmes des moyens. D'où, trois quelconques d'entre eux étant connus, le quatrième devient connu.* »

Neper calcule ainsi une première table des 100 logarithmes de 10^7 à 9 999 900,000 495 0. Comme le calcul, par ce procédé, serait beaucoup trop long, Neper entame ensuite une deuxième table, dans laquelle la raison est $100/10^7$, soit $1/10^5$ et calcule 50 logarithmes. Le premier nombre est 9 999 900, très proche du dernier nombre de la table précédente. Il calcule son logarithme par interpolation à partir de la double inégalité trouvée précédemment, après une transformation ingénieuse :

Soit $\log a$ connu et *b* très proche de *a* et plus petit. On peut écrire $\log b = \log a + (\log b - \log a)$. Il suffit donc de connaître la différence des logarithmes pour connaître $\log b$.

Soit $c = b \times 10^7 / a$ ou $c / b = 10^7 / a$

$$10^7 - c < \log c < 10^7(10^7 - c)/c,$$

or $\log(c/b) = \log(10^7/a)$,

$$\log c - \log b = \log 10^7 - \log a = 0 - \log a$$

et $\log c = \log b - \log a$, d'où

$10^7 - b \times 10^7 / a < \log b - \log a < 10^7(10^7 - b \times 10^7 / a) / (b \times 10^7 / a)$

$10^7(a-b)/a < \log b - \log a < 10^7(a-b)/b$

et 4950/9 999 900,000 495 0 < log 9 999 900-100 <4 950/9 999 900

log 9 999 900 = 100,000 5

Le dernier nombre de cette table (9 995 001,224 8) est proche de 9 995 000, soit $10^7(1-1/2000)$. Il refait une interpolation pour trouver log 9 995 000, mais le procédé déjà utilisé est, cette fois, trop peu précis car la différence est plus grande ; il utilise la méthode de transfert qui consiste à remplacer le nombre à chercher par un autre *x*, très peu différent de 10^7, de telle manière que $10^7 / x =$ 9 995 001,224 8/9 995 000. Il applique à *x* la double inégalité, puis trouve le logarithme demandé.

Les deux tables déjà obtenues lui permettent de faire la troisième, qui consiste en un tableau de 69 colonnes et 20 lignes. La première colonne commence approximativement au point où la deuxième table finit et puisque $(1-1/2000)^{20}$ est très proche de $1-1/100$, la dernière entrée de chaque colonne est approximativement la deuxième entrée de la colonne suivante.

$C_{mn} = 10^7(1-1/2000)^{m-1}(1-1/100)^{n-1}$ pour $1 \le m \le 21$ et $1 \le n \le 69$.

Le dernier nombre de la dernière colonne est $10^7(1-1/2000)^{20}(1-1/100)^{68}$, à peu près $10^7/2$ (cela fait 1600 calculs au lieu de 7 000 000, pour arriver au même résultat !). « *Dans la table, à côté des nombres naturels seront écrits les logarithmes ; de sorte que la troisième table, que dans la suite nous appellerons table radicale, peut être complétée et parfaite. La table radicale étant maintenant complétée, nous prenons les nombres pour la table logarithmique uniquement de là. Car, de même que les deux premières tables servaient à la formation de la troisième, de même la table radicale sert à la construction de la table logarithmique principale, avec une grande facilité et aucune erreur sensible.* »

...

51) Tous les sinus dans la proportion de deux à un ont 693 146 922 comme différence entre leurs logarithmes.
52) Tous les sinus dans la proportion de dix à un ont 2 302 584 234 comme différence entre leurs logarithmes.
55) Comme le demi-rayon est au sinus d'un demi-arc donné, le sinus du complément du demi-arc est au sinus de l'arc complet.
56) Le double du logarithme d'un arc de 45 degrés est le logarithme de la moitié du rayon.
57) La somme des logarithmes de la moitié du rayon et de n'importe quel arc est égale à la somme des logarithmes de la moitié de l'arc et du complément du demi arc. D'où le logarithme du demi arc peut être trouvé si les logarithmes des trois autres sont connus.
59) La table des logarithmes est formée.

Il lui reste à calculer le logarithme des nombres plus petits que $10^7/2$. Voici sa méthode en langage actuel.

Soit *a*, avec $0 < a < \dfrac{10^7}{2}$. En multipliant *a* par $A = 2^m 10^n$, on peut toujours se ramener à $Aa > \dfrac{10^7}{2}$, donc à un nombre dont le logarithme est connu.

Commençons par $A = 2^m$ et prenons un nombre *a*, avec *m* tel que $\dfrac{10^7}{2} < 2^m a < 10^7$. $2^m a$ est donc dans la table radicale.

Appelons *I(A)* = -log *Aa* + log *a*. *I(a)* ne dépend pas de *a*.

On peut écrire : $\log a = \log(2^m a) - \log(2^m a) + \log a$

$= \log(2^m a) + I(2^m)$.

Donc, si nous connaissons $I(2^m)$, nous pouvons calculer log a.

Soit d'abord m = 1. Remarquons que $10^7 a = \frac{10^7}{2}(2a)$, d'où

$$\begin{aligned} 0 + \log a &= \log(\frac{10^7}{2}) + \log 2a \\ &= 693\,146\,922 + \log 2a \end{aligned}$$

et $I(2)$ = 693 146 932. À partir de là, on peut trouver $I(2^m)$ par induction.

Prenons maintenant A = 10. Remarquons que

$$2^3 a 10^7 = \frac{8}{10} \times 10^7 \times 10a = (\frac{8}{10} \times 10^7) \times 10a$$

et $\frac{8}{10} \times 10^7$ est dans la table, d'où $\log(2^3 a) + 0 = \log(\frac{8}{10} \times 10^7) + \log 10a$.

Mais, $\log(2^3 a) = \log a - \log a + \log(2^3 a) = \log a - I(2^3)$.

Donc $\log a - I(2^3) = \log(\frac{8}{10} \times 10^7) + \log 10a$

et $\log a - \log 10a = \log(\frac{8}{10} \times 10^7) + I(2^3)$,

d'où $I(10)$ = 23 024 814. Par induction, on trouve $I(10^m)$.

4. L'appendice au « *Constructio* » de Napier

On y lit : « *Parmi les différentes améliorations des logarithmes, la plus importante est celle qui adopte zéro comme logarithme de l'unité et 10 000 000 comme le logarithme de, soit un dixième de l'unité, soit dix fois l'unité. Alors, ceux-là étant fixés, les logarithmes de tous les autres nombres s'ensuivent nécessairement.*

... Soient deux sinus et leurs logarithmes. Si autant de nombres égaux au plus petit sont multipliés l'un par l'autre qu'il y a d'unités dans le logarithme du plus grand ; et d'autre part qu'autant de nombres égaux soient multipliés entre eux qu'il y a d'unités dans le logarithme du plus petit ; deux nombres égaux seront obtenus, et le logarithme du sinus ainsi obtenu sera le produit des deux logarithmes.

Si un premier sinus divise un troisième autant de fois successivement qu'il y a d'unités dans A ; et si un second sinus divise ce même troisième autant de fois successivement qu'il y a d'unités dans B ; aussi si le premier divise un quatrième autant de fois successivement qu'il y a d'unités dans C ; et si le même deuxième divise le même quatrième autant de fois successivement qu'il y a d'unités dans D : je dis que le rapport de A à B est le même que le rapport de C à D, et que celui du logarithme du second au logarithme du premier.

D'où il suit que le logarithme de n'importe quel nombre donné est le nombre de places ou de chiffres qui sont contenus dans le résultat obtenu en élevant le dit nombre à la 10 000 000 ième puissance. Aussi si l'exposant de la puissance est le logarithme de dix, le nombre de places moins une, dans la puissance ou multiple, sera le logarithme de la racine. »

Et il commente cette dernière phrase, assez obscure, avec un exemple :

« *Supposons qu'il soit demandé quel nombre est le logarithme de 2. Je réponds, le nombre obtenu en multipliant 10 000 000 000 fois le nombre deux. Mais, direz-vous, le nombre obtenu en multipliant 10 000 000 000 fois le nombre 2 est impossible à calculer. Je réponds, cependant son nombre de chiffres, que je cherche, est calculable. Pour cela avec 2 comme racine, et 10 000 000 000 comme exposant, cherchez le nombre de chiffres dans le multiple, et non le multiple lui-même ; et par notre règle vous trouverez que 301029995 etc., est le nombre de chiffres cherché et le logarithme du nombre 2 ;* »

5. Le logarithme de Huygens

Dans son *Discours de la cause de la pesanteur*, Huygens étudie le mouvement d'un corps sous l'effet de la pesanteur, avec résistance de l'air : (Figure 1b)

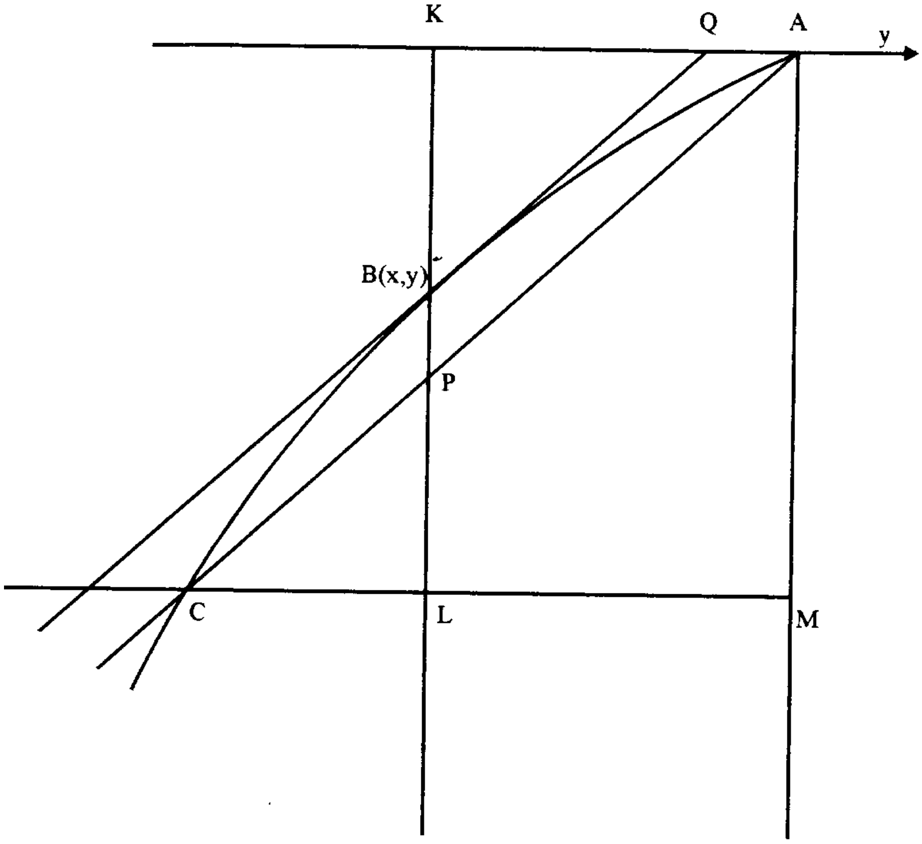


Figure 1b

« *J'appelle vitesse terminale la vitesse qu'il faudrait à l'air à souffler de bas en haut, pour tenir le corps suspendu sans pouvoir descendre ; car alors la force de l'air contre ce corps égale la pesanteur.* »...

« *Si donc un corps pesant est jeté perpendiculairement en haut, avec une vitesse dont la raison à la vitesse terminale soit comme par exemple de la partie AK à KD dans l'ordonnée AD, perpendiculairement à l'asymptote DE ; soit menée KB parallèle à cette asymptote, et qu'au point B la courbe soit touchée par la droite BO, qui rencontre DE en O, et DA en Q. Laquelle tangente se trouve en prenant FO, depuis l'ordonnée BF égale à une certaine longueur, qui pour toutes les tangentes est la même et que je définirai par la suite. Puis, soit AC parallèle à cette tangente, coupant KB prolongée en P ; et du point C où elle rencontre la courbe, soit tirée CLM parallèle à AD, et coupant KB prolongée et AM parallèle à l'asymptote aux points L et M.*

Maintenant, le temps que le corps met à monter à la hauteur où il peut arriver, est au temps de la descente de cette même hauteur comme la ligne KB à BL.

Et le temps qu'il emploie à monter à travers l'air, étant jeté comme il a été dit, est au temps qu'il emploierait sans rencontrer de résistance, comme KB à KP. (**voir *, ci-dessous**)

Et la hauteur à laquelle il montera dans l'air, à celle où il monterait sans résistance, comme l'espace ABK au triangle APK ou comme QA à AX, que je suppose être la moitié d'une troisième proportionnelle aux lignes DK, KA. (**voir **, ci-dessous**)

Et la vitesse, en commençant de monter, à celle qu'il a en retombant à terre, comme ML à LC.

...

La construction de la ligne du jet que Newton donne dans la proposition 4 du deuxième livre, quoique tout autre que la mienne et plus difficile, produit pourtant la même courbe, comme cela se peut prouver par démonstration. »

Huygens ne donne aucune justification à ses affirmations. Rien ne nous permet de savoir comment il y est arrivé. Mais nous pouvons retrouver ses résultats par les équations différentielles.

Soit $\frac{AK}{KD} = r$.

$r = \frac{v_i}{v_t}$ où v_i est la vitesse initiale et v_t la vitesse terminale.

La résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse = kv, $kv_t = mg$.

Si AD = 1, l'équation de la logarithmique est $y = q^x$ et $q^{x_1} = \frac{1}{1+r}$.

***** « Le temps qu'il emploie à monter à travers l'air est au temps qu'il emploie sans rencontrer de résistance comme KB est à KP ».

Appelons t_r le temps avec résistance, t_s le temps sans résistance.

La loi du mouvement avec résistance est

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv,$$

$$\frac{-mdv}{mg+kv} = dt,$$

$$mg + kv = Ce^{-kt/m}.$$

La vitesse initiale $= mg\frac{(1-q^{x_1})}{kq^{x_1}}$.

En remplaçant C par sa valeur, on trouve

$$v = \frac{mg}{k}\left(\frac{e^{-kt/m}}{q^{x_1}} - 1\right).$$

La loi du mouvement sans résistance est

$$v = -gt + \text{vitesse initiale} = -gt + \frac{(1-q^{x_1})mg}{kq^{x_1}}.$$

t_r et t_s correspondent à $v = 0$:

$$t_r = \frac{-m\ln q^{x_1}}{k}$$

$$t_s = \frac{(1-q^{x_1})m}{kq^{x_1}}.$$

La tangente à la courbe en B a comme pente $y'(x_1) = q^{x_1}\ln q$.

L'équation de la parallèle par A est $y - 1 = q^{x_1}\ln q . x$

Elle coupe KB en P :

$$y = q^{x_1}$$

$$x = \frac{q^{x_1} - 1}{q^{x_1} . \ln q}$$

d'où $$\frac{t_r}{t_s} = \frac{KB}{KP}.$$

****** De même, nous pouvons vérifier les autres affirmations. Par exemple, celle qui concerne la hauteur atteinte en partant de la vitesse et en l'intégrant par rapport au temps. Le résultat est bien conforme à celui de Huygens.

6. La spirale géométrique

Les résultats de Torricelli peuvent se retrouver à partir de l'équation polaire de la spirale, avec son centre C comme pôle et CA comme axe. Soit $CA = r_0$ et $q = CA_1 / CA$, rapport du rayon vecteur CA_1 au rayon vecteur CA, lors de la rotation de la demi-droite CA autour de C d'un angle 2π

$$r = r_0 . q^{a/2\pi} \text{ d'où}$$
$$\ln r = \ln r_0 + a \ln q / 2\pi$$
$$\ln r / r_0 = a \ln q / 2\pi$$
$$r = r_0 e^{ka}$$
$$k = \ln q / 2\pi.$$

Torricelli nous dit que l'arc $AD = AE$ et la spirale entière de A à $C = AH$. Pour le démontrer, nous allons faire intervenir l'angle entre la tangente et le rayon vecteur et découvrir ainsi une autre propriété de la spirale : cet angle est constant. La pente de la tangente se trouve plus facilement en passant aux coordonnées cartésiennes.

$$x = r \cos a \,;\, y = r \sin a$$
$$dx / da = \cos a . dr / da - r \sin a; dy / da = \sin a . dr / da + r \cos a$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{k \sin a + \cos a}{k \cos a - \sin a} = \frac{k \tan a + 1}{k - \tan a} = \tan(b + a)$$

avec $k = \text{cotan } b$.
L'angle entre la tangente et le rayon vecteur est donc b, quelle que soit la position du point.

- Longueur de l'arc de spirale AD :

$$ds^2 = ((\frac{dr}{da})^2 + r^2) da^2,$$
$$AD = \int_0^a \sqrt{r_0^2 k^2 e^{2ka} + r_0^2 e^{2ka}}\, da$$
$$= r_0 \sqrt{k^2 + 1} \int_0^a e^{ka} da$$
$$= r_0 \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{k} (e^{ka} - 1)$$
$$= r_0 \frac{\sqrt{\cot^2 b + 1}}{\cot b} (e^{ka} - 1)$$
$$= \frac{r_0}{\cos b} (e^{ka} - 1)$$

Or $AE = \dfrac{BA}{\cos b} = \dfrac{r_0(1 - e^{ka})}{\cos b}$

donc $s = AE$.

- Longueur de la spirale entière :

$$AC = \lim_{n\to\infty} r_0 \csc b \int_0^{2\pi n} e^{ka} da = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{r_0}{\cos b} (e^{2\pi nk} - 1) \right|$$

mais $k = \dfrac{\ln q}{2\pi} < 0$, donc $\lim_{n\to\infty} e^{2\pi nk} = 0$,

$$AC = \frac{r_0}{\cos b} = AH.$$

- Aire du secteur de spirale ADC :

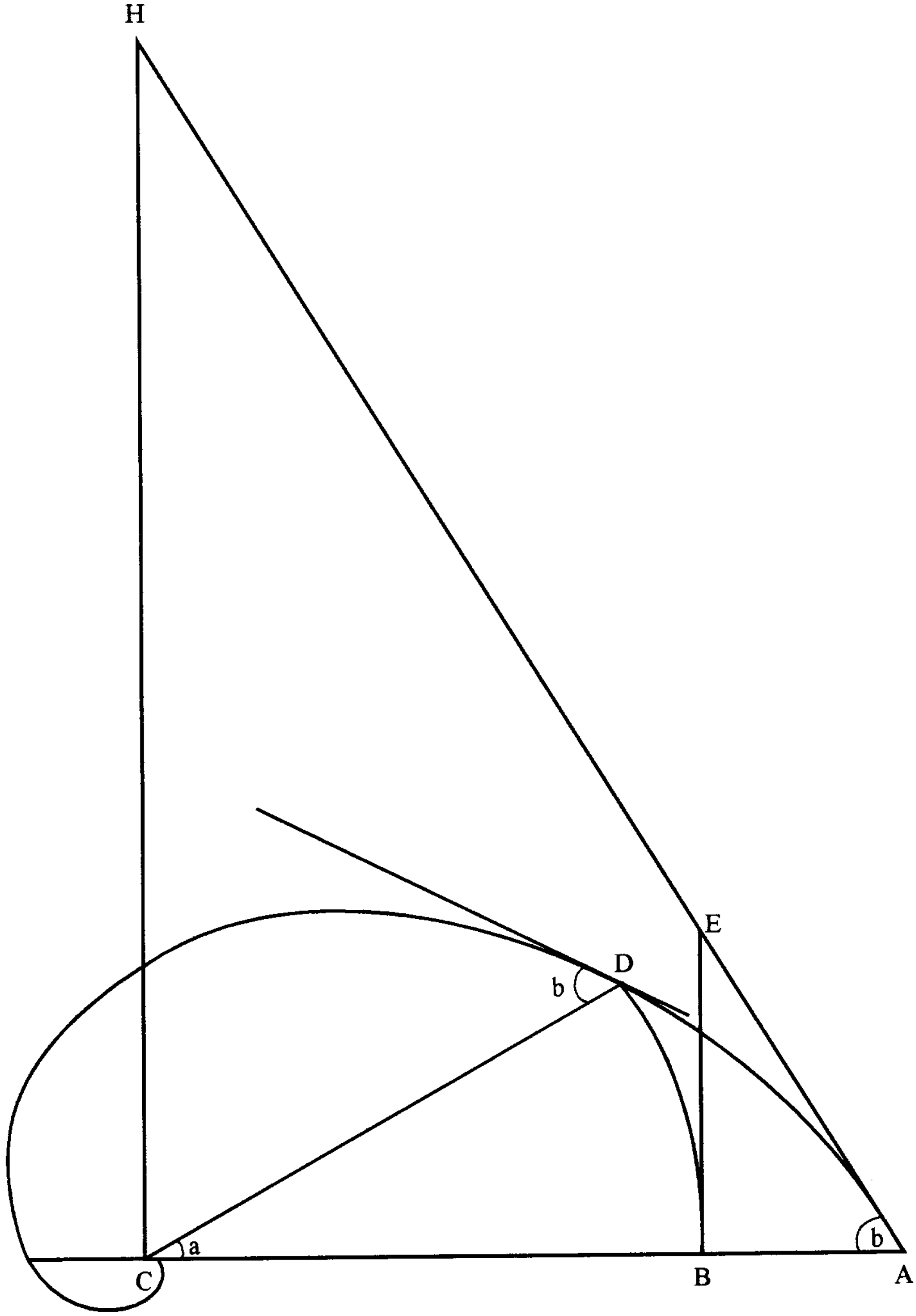
$$\text{Aire } ADC = \frac{1}{2} \int_0^a r_0^{\ 2} e^{2ka} da = \frac{1}{4k} r_0^2 \left| e^{2ka} - 1 \right|.$$

$$\text{Aire } ADC = \frac{1}{4k}(r_0^2 - r^2) = \frac{1}{4}(r_0^2 - r^2) \tan b.$$

- Aire de la spirale :

$$\text{Aire } = \frac{1}{2} \int_0^{2n\pi} r_0^2 e^{2ka} da = \frac{1}{4} r_0^2 \tan b$$

= demi-aire du triangle CAH


H
E
D
b
a
b
C
B
A

7. Mengoli

En langage moderne, voici sa théorie :
Soit un nombre *n*, plus grand que 1. Considérons les deux suites :
1+1/2+...1/*n*-1, 1/2+1/3+...1/2*n*-1, 1/3+1/4+...1/3*n*-1, ...
1/2+1/3+...+1/*n*, 1/3+1/4+...+1/2*n*, 1/4+1/5+...+1/3*n*, ...
La première suite est décroissante ;
car si du *p*-ième terme, 1/*p* + 1/*p* + 1 + ... + 1/*pn* - 1 nous soustrayons le suivant 1/*p* + 1 + 1/*p* + 2 + ... + 1/(*p* + 1)n - 1, nous obtenons
1/p - (1/pn + 1/pn+1 + ... + 1/(p + 1)n - 1). Cette différence est positive puisque chacune des *n* fractions est 1/*np* ou plus petite que 1/*np*.

La seconde suite est croissante, pour une raison similaire. Chaque terme de la première suite est plus grand que le terme correspondant de la deuxième. En augmentant *p* nous pouvons rendre cette différence aussi petite que nous voulons. Les deux suites définissent ainsi un nombre réel que nous appelons log *n*
1/*p* + 1/*p* + 1 + ... + 1/*pn* - 1 > log *n* > 1/*p* + 1 + ... 1/*pn*.
On en déduit que $\log m + \log n = \log(mn)$.

8. Correspondance entre Leibniz et Bernoulli

Lettre CXC de Leibniz à Bernoulli (mars 1712)

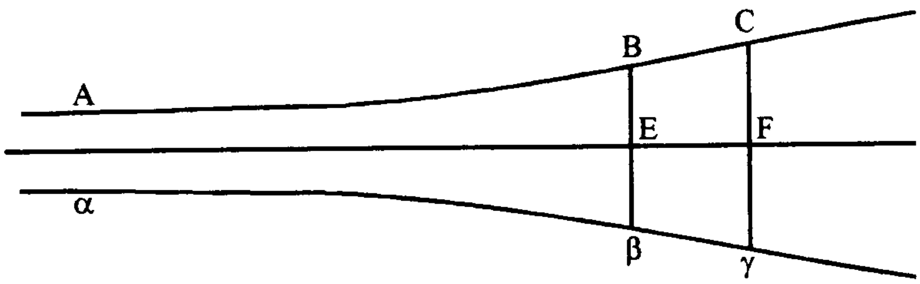
« *... et si on peut dire que -1 et des expressions semblables signifient moins que rien, cependant on ne peut leur donner d'autre rapport qu'imaginaire... De ceci, je prouve entre autres qu'aucun logarithme ne répond à ce rapport ou à un semblable...* »

Lettre CXCIII de Bernoulli à Leibniz

« *... Je ne suis pas entièrement d'accord avec toi lorsque tu dis que le rapport de -1 à 1 ou de 1 à -1 est imaginaire et que tu en déduis que aucun logarithme ne répond à ce rapport. Ainsi, moi je prouve le contraire de cela. Soit x un nombre variable, croissant de manière infiniment petite, dont le logarithme est l.x ; je dis que 1.x lui-même répond à -x de même qu'à x ; on a la différentielle du logarithme d'un nombre en divisant la différentielle de ce nombre par ce même nombre* ;

d*x* : *x* = -d*x* : -*x* = d*l*.-*x*. Donc *l*.*x* = *l*.-*x*.

D'où tu vois que la courbe logarithmique ABC a son égale de même que l'hyperbole a son opposée de telle sorte que ayant choisi BE comme unité, EF est le logarithme non seulement de CF, mais aussi de γ*F qui désigne le nombre précédent, en négatif.* »



Lettre CXCIV de Leibniz à Bernoulli

« *... Je m'étonne que toi, avec ta pénétration d'esprit, tu ne vois pas qu'on ne peut pas donner de logarithme à -2, parce qu'on ne peut pas donner de logarithme à* $\sqrt{-2}$ *, qui est la moitié du précédent. Mais, tu dis, la différentielle du nombre -x, qui est -dx, divisée par le nombre -x donnera un élément logarithmique -dx : -x, ou dx : x. Mais cette règle, que la différentielle divisée par le nombre donne la différentielle du logarithme et n'importe quoi d'autre sur la nature et la construction des logarithmes n'a pas lieu pour les nombres négatifs.* »

9. Euler

Dans la préface de son *Introduction à l'analyse infinitésimale*, il écrit « ... *Je me suis surtout étendu sur les fonctions de variables, parce qu'elles font l'objet de l'analyse infinitésimale... Je les ai d'abord divisées en algébriques et en transcendantes. Les premières sont composées de quantités variables combinées entre elles par les opérations ordinaires de l'algèbre, et les secondes dépendent d'autres opérations, ou des mêmes combinaisons que les précédentes, mais répétées une infinité de fois... Je me suis attaché à découvrir des propriétés et à trouver la somme de plusieurs séries infinies, dont quelques-unes paraissaient de nature à faire croire presque qu'elles ne pourraient être trouvées sans le secours d'un calcul infinitésimal. Telles sont les séries, dont les sommes sont exprimées ou par des logarithmes ou par des arcs de cercle. Ces sortes de quantités qui sont transcendantes, puisqu'elles sont représentées par la surface de l'hyperbole et du cercle, font partie des matières qu'on a coutume de traiter dans l'analyse infinitésimale. Passant ensuite des puissances aux quantités exponentielles, qui sont elles-mêmes des puissances, dont les exposants sont variables, leur développement m'a fourni une idée fort naturelle et à la fois féconde des logarithmes ; d'où il m'a été facile de conclure leurs différents usages, en même temps que j'ai pu en déduire toutes les séries infinies, qui représentent ordinairement ces quantités ; ce qui m'a donné enfin un moyen très expéditif de construire les tables de logarithmes. Je me suis semblablement conduit dans l'examen des arcs de cercle ; genre de quantités qui, quoique très différent des logarithmes leur est cependant si intimement lié, que lorsqu'une de ces quantités paraît devenir imaginaire, elle se change en l'autre.* »

Le chapitre VII de l'*Introduction à l'analyse infinitésimale* traite du développement des quantités exponentielles et logarithmiques en série. En voici un long extrait, choisi parce qu'il est accessible à des élèves de dernière année du secondaire, qui ont choisi le programme fort en mathématique. Cette lecture leur permettrait de suivre la pensée d'un grand mathématicien, par surcroît, excellent pédagogue.

« Puisqu'on a $a^0 = 1$, et qu'à mesure que l'exposant de a augmente, la valeur de la puissance augmente aussi, pourvu que a soit un nombre plus grand que l'unité ; il s'ensuit que si l'exposant surpasse infiniment peu zéro, la puissance surpassera l'unité aussi infiniment peu.

Soit w un nombre infiniment petit, ou une fraction si petite qu'elle diffère peu de zéro, on aura $a^w = 1+\psi$, ψ étant un nombre infiniment petit. ψ sera donc égal à w ou inférieur à w ou supérieur à w, rapport qui dépendra toujours de la valeur de la lettre a.

Comme le rapport est encore inconnu, faisons $\psi = kw,\ a^w = 1+kw$; si nous prenons a pour la base logarithmique, nous aurons $w = l.(1+kw)$.

Exemple : supposons $a = 10$, et cherchons au moyen des tables ordinaires le logarithme d'un nombre qui excède de très peu l'unité, par exemple celui de $1+1/1\,000\,000$. Ici $kw = 1/1\,000\,000$; nous trouverons

$$l.(1+1/1\,000\,000) = l.\frac{1\,000\,001}{1\,000\,000} = 0{,}000\,000\,434\,29 = w\,.$$

Donc, à cause de

$$k = 0{,}000\,001\,000\,00,\ 1/\mathrm{k} = \frac{43\,429}{100\,000} \text{ et } k = \frac{100\,000}{43\,429} = 2{,}302\,58\,.$$

On voit par là que *k* est un nombre fini, dépendant de la valeur de la base *a* ; car si nous eussions pris un autre nombre pour la base *a*, le logarithme du même nombre 1 + *kw* aurait eu un rapport donné avec le premier, et il en serait résulté une autre valeur pour *k*.

Puisque $a^w = 1+kw,\ a^{iw} = (1+kw)^i$, quelque nombre qu'on prenne pour *i*.

Donc $a^{iw} = 1+\frac{i}{1}kw+\frac{i(i-1)}{1.2}k^2w^2+\frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}k^3w^3+\cdots$.

Si l'on fait *i* = *z/w* et que *z* représente un nombre quelconque fini, à cause de *w* infiniment petit, *i* deviendra un nombre infiniment grand et, par conséquent, $w = z/i$ étant une fraction dont le dénominateur est infini, sera une quantité infiniment petite, c telle qu'elle a été supposée. Écrivons donc z/i à la place de w et nous aurons $a^z = (1+\frac{kz}{i})^i = 1 + kz + \frac{i(i-1)}{i \cdot 2i} k^2 z^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{i \cdot 2i \cdot 3i} k^3 z^3 + \ldots$ équation qui sera vraie si l'on prend pour i un nombre infiniment grand et alors k sera un nombre déterminé, dépendant de la valeur de a, comme nous venons de le voir. Comme i est un nombre infiniment grand, il s'ensuit que $\frac{i-1}{i} = 1$; car il est évident que plus le nombre qu'on substituera à i sera grand, plus la valeur de $\frac{i-1}{i}$ se rapprochera de l'unité ; donc si i est un nombre plus grand qu'aucune quantité assignable, la fraction $\frac{i-1}{i}$ égalera l'unité.

Par une raison semblable $\frac{i-2}{i}$, $\frac{i-3}{i}$, $\ldots = 1$.

Concluons de là que

$$\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2} \ldots$$

$$a^z = 1 + kz + \frac{k^2 z^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3 z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ etc. à l'infini.}$$

Cette équation exprime en même temps la relation entre les nombres a et k, car en supposant que $z = 1$, on aura $a = 1 + k + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \cdots$ et pour que $a = 10$, il faudra que k soit environ 2,30258 ; comme nous l'avons trouvé ci-dessus.

Supposons $b = a^n$, en prenant le nombre a pour la base de logarithme, nous aurons $l.b = n$ et puisque $b^z = a^{nz}$ nous obtiendrons pour la série infinie $b^z = 1 + knz + \frac{k^2 n^2 z^2}{1 \cdot 2} + \cdots$ et en écrivant $l.b$ au lieu de n,

$b^z = 1 + kzl.b + \frac{k^2 z^2 (l.b)^2}{1.2} + \cdots$. Ainsi, la valeur de k étant une fois connue par celle de la base a, une quantité exponentielle quelconque b^z pourra être exprimée par une série infinie, dont les termes marchent suivant les puissances de z.

Cela posé, faisons voir à présent comment les logarithmes peuvent être développés en séries infinies.

Comme $a^w = 1 + kw$, $w = l.(1+kw)$ et $iw = l.(1+kw)^i$; or il est visible que plus le nombre substitué à i sera grand, plus la puissance $(1+kw)^i$ surpassera l'unité et qu'en faisant i égal à un nombre infini, la valeur de la puissance $(1+kw)^i$ s'élèvera au-dessus de l'unité.

Donc si l'on suppose $(1+kw)^i = 1 + x$; $1 + kw = (1+x)^{1/i}$ et $kw = (1+x)^{1/i} - 1$; d'où $iw = \frac{i(1+x)^{1/i}}{k} - \frac{i}{k}$, i étant supposé infiniment grand ;

mais $(1+x)^{1/i} = 1 + \frac{x}{i} - \frac{1(i-1)}{i.2i} x^2 + \frac{1(i-1)(2i-1)}{i.2i.3i} x^3 - \text{etc}$. et,

à cause de i infiniment grand $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$ etc.

Donc $i(1+x)^{1/i} = i + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$ et $l.(1+x) = \frac{1}{k}(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots)$

a étant toujours la base de logarithme et k désignant le nombre relatif à cette base, de manière qu'on ait $a = 1 + k + \frac{k^2}{2} + \cdots$

Puisque nous avons trouvé une série égale au logarithme du nombre $1 + x$, nous pourrons à son aide, la base a étant donnée, représenter la valeur du nombre k.

En effet, supposons $1 + x = a$, à cause de $l.a = 1$, nous aurons

$$1=\frac{1}{k}(\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\cdots)$$

et, par conséquent, $k=\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\cdots$.

Si $l.(1+x)=\frac{1}{k}(x-\frac{x^2}{2}+\cdots)$,

en faisant x négatif $l.(1-x)=-\frac{1}{k}(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots)$ et ôtant la seconde suite de la première,

$$l.(1+x)-l.(1-x)=l.\frac{1+x}{1-x}=\frac{2}{k}(\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots)$$

soit maintenant $\frac{1+x}{1-x}=a$, de manière que $x=\frac{a-1}{a+1}$, à cause de $l.a = 1$,

$$k=2(\frac{a-1}{a+1}+\frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3}+\frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5}+\cdots),$$

équation qui donne la valeur de k lorsqu'on connaît celle de la base a. Comme on peut prendre à volonté la base a pour établir un système de logarithmes, nous pouvons la prendre telle que k devienne égal à 1, supposons donc k =1, la série trouvée ci-dessus deviendra $a=1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}$ etc., dont les termes convertis en décimales et ajoutés donnent pour a cette valeur 2,71828182845904523536028 dont le dernier chiffre est encore exact.

Les logarithmes calculés sur cette base s'appellent naturels ou hyperboliques, parce qu'ils peuvent représenter la quadrature de l'hyperbole. Au reste, pour abréger, nous désignerons constamment ce nombre par la lettre e, qui indiquera par conséquent la base des logarithmes naturels ou hyperboliques à laquelle répond la valeur de $k = 1$.

...

Ainsi $e^z=1+z+\cdots$

Quant aux logarithmes hyperboliques, on les calculera au moyen des séries

$$l.(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$$

et

$$l.\frac{1+x}{1-x}=\frac{2x}{1}+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\cdots$$

lesquelles seront très convergentes, si l'on prend pour x une fraction très petite. Ainsi, avec la dernière série on trouve sans peine les logarithmes des nombres qui ne sont pas beaucoup plus grands que l'unité. En effet, en faisant $x = 1/7$, on trouvera $l.(4/3)$ et en faisant $x = 1/9$, on aura $l.(5/4)$. Or, les logarithmes de ces fractions feront trouver ceux des nombres entiers ; car par la nature des logarithmes, $l.(3/2) + l.(4/3) = l.2$; alors $l.(3/2) + l.2 = l.3$ et $2l.2 = l.4$, etc. Puisque $e^z=1+z+\cdots$; si l'on suppose $a^y=e^z$, $yl.a = z$, $a^y=1+yl.a+y^2\frac{(l.a)^2}{2}+\cdots$

Donc une quantité exponentielle quelconque peut être convertie en une série infinie, à l'aide des logarithmes hyperboliques, mais aussi, i désignant un nombre infiniment grand, les quantités exponentielles et les logarithmes peuvent être représentés par des puissances.

En effet, $e^z=(1+\frac{z}{i})^i$ et $a^y=(1+\frac{yl.a}{i})^i$

... »

Chapitre VIII. Des quantités transcendantes qui naissent du cercle.

« Puisque $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)(\cos z - \sqrt{-1}\sin z) = 1$.
Ces facteurs, quoique imaginaires, sont d'un grand usage dans la combinaison et dans la multiplication des arcs. En effet, cherchons le produit de ces facteurs $(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)$, nous trouverons

$\cos z\cos y - \sin z\sin y + \sin z\cos y\sqrt{-1} + \sin y\cos z\sqrt{-1} = \cos(z+y) + \sqrt{-1}\sin(z+y)$. Semblablement

$(\cos y - \sqrt{-1}\sin y)(\cos z - \sqrt{-1}\sin z) = \cos(y+z) - \sqrt{-1}\sin(y+z)$.

De même

$(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x)(\cos y \pm \sqrt{-1}\sin y)(\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z) = \cos(x+y+z) \pm \sqrt{-1}\sin(x+y+z)$.

Il suit de là que...

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2}$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

Donc, en développant ces binômes en séries, nous aurons

$$\cos nz = \cos^n z - \frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2} z\sin^2 z + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4} z\sin^4 z + \cdots$$

et $\sin nz = \frac{n}{1}\cos^{n-1} z\sin z - \frac{n(n-1)n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3} z\sin^3 z + \cdots$

Supposons encore dans les formules précédentes l'arc z infiniment petit et n un nombre infiniment grand noté dorénavant i, afin d'obtenir pour iz une valeur finie v ; nous aurons donc $iz = v$ et $z = \frac{v}{i}$ et par conséquent $\sin z = \frac{v}{i}$ et $\cos z = 1$, ces substitutions faites donneront

$$\cos v = \frac{(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i + (1-\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2} \text{ et } \sin v = \frac{(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i - (1-\frac{v\sqrt{-1}}{i})^i}{2\sqrt{-1}}.$$

Or, dans le chapitre précédent, nous avons vu que $(1+\frac{z}{i})^i = e^z$, e désignant la base des logarithmes hyperboliques ; ayant donc écrit pour z, d'une part $v\sqrt{-1}$ et d'autre part $-v\sqrt{-1}$, on aura

$$\cos v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} \text{ et } \sin v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

On comprend par là comment les quantités exponentielles imaginaires se ramènent à des sinus et des cosinus d'arcs réels.

Supposons à présent dans les mêmes formules n un nombre infiniment petit, ou $n = \frac{1}{i}$, i étant un nombre infiniment grand, nous aurons $\cos nz = \cos\frac{z}{i} = 1$ et $\sin nz = \sin\frac{z}{i} = \frac{z}{i}$; car le sinus d'un arc qui s'évanouit est égal à cet arc et son cosinus = 1.

Cela posé, nous avons $1 = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^{1/i} + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^{1/i}}{2}$ et

$$\frac{z}{i} = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^{1/i} - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^{1/i}}{2\sqrt{-1}}.$$

Or, en prenant les logarithmes hyperboliques, nous avons fait voir que $l.(1+x) = i(1+x)^{1/i} - i$ ou $y^{1/i} = 1 + \frac{1}{i} l.y$, en mettant y à la place de 1 + x. Donc, si nous écrivons à présent au lieu de y, d'une part $\cos z + \sqrt{-1}\sin z$ et de l'autre $\cos z - \sqrt{-1}\sin z$, nous trouverons

$$\frac{z}{i} = \frac{(1/i)l.(\cos z + \sqrt{-1}\sin z) - (1/i)l.(\cos z - \sqrt{-1}\sin z)}{2\sqrt{-1}}$$

et, par conséquent $z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l.\frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)}{(\cos z - \sqrt{-1}\sin z)}$.

On voit d'après cela comment les logarithmes imaginaires se ramènent aux arcs circulaires. »

Bibliographie

- **Ouvrages généraux**

1. Ch. Naux, *La découverte des logarithmes et le calcul des premières tables*, Paris, A. Blanchard, 1966.
2. Ch. Naux, *La promotion des logarithmes au rang de valeur analytique*, Paris, A. Blanchard, 1971.
3. F. Cajori, *The History of the exponential and logarithmic concepts*, The American Mathematical Monthly, Vol. 20, 1913.
4. R. Ayoub, *What is a Napierian Logarithm* ?, The American Mathematical Monthly, April 1993, pp. 351-364.
5. D. E. Smith, *Source Book in Mathematics*.
6. R. Courant and H. Robbins, *What is Mathematics ?*, Oxford University Press, 1977.
7. D. J. Struik, *A Source Book in Mathematics*, 1200-1800, Princeton University Press, 1986.
8. C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley, 1989.
9. B. L. Van der Waerden, *A History of Algebra from Al-Khwarizmi to Emmy Noether,* Springer-Verlag, 1985.
10. J. Stillwell, *Mathematics and its History*, Springer-Verlag, 1989.
11. A. Delachet, *Les Logarithmes*, Coll. Que Sais-je ?, PUF, 1960.
12. A. Dahan et Dalmedico, *Une Histoire des mathématiques. Routes et dédales*, Sciences Point, Le Seuil, 1986.
13. G. Loria, *Storia delle Matematiche*, Torino, Soc. tipografico-editrice nazionale, 1929-1933.
14. F. Enriques, *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Bologna, Zanichelli, 1924.
15. A. Weil, *Number theory. An approach through History. From Hammurapi to Legendre*, Boston, Birkhauser, 1984.
16. M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972.

- **Ouvrages qui se rapportent à une période particulière**

❖ **Antiquité**

17. *D'Imhotep à Copernic*, dans les Cahiers d'Altaïr, 1989.
18. O. Neugebauer et Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts*, 1945.
19. O. Neugebauer, *Les sciences exactes dans l'Antiquité*, trad. Actes Sud, Arles, 1990.
20. K. Vogel, *Vorgriekische Mathematiken*, 1958-1959.
21. Thureau-Dangin, *Esquisse d'une histoire du système sexagésimal*, Paris, P. Geuthner, 1932.
22. Thureau-Dangin, *Textes mathématiques babyloniens*, Leiden, E. J. Brill, 1938.
23. Archimède, *L'Arénaire*, traduction C. Mugler, édition « Les Belles Lettres », 1971.

❖ **Moyen-Âge**

24. Chuquet, *Triparty en la Science des Nombres*, éd. A. Marre, Bull. bibl. storia math. t. XIII, 1880, pp. 555-659 et pp. 693-814.
25. M. Stifel, *Arithmetica Integra*, Nüremberg, 1544.

❖ **J. Napier**

26. Napier, *Tercentenary Volume*.
27. N. T. Gridgeman, *John Napier and the History of Logarithms*, Scripta mathematica Vol. XXIX N° 1-2, 1973.
28. J. W. L. Glaisher, *On early tables of logarithms and early history of logarithms*, Q. J. Appl. Math. Vol. 48, 1920.

❖ **De Napier à Euler**

29. A. A. de Sarasa, *Solutio problematis a RP Marini Mersenno propositi*, précédé de
30. P. Gregorii a Sto Vincentio, *Opus geometricum quadraturae circuli et sectioni coni*, Antverpiae, 1649.
31. C. Huygens, *De la Cause de la pesanteur*, Appendice au Traité de la Lumière, 1690.
32. C. Huygens, *Œuvres complètes*, réédition La Haye, 1920.
33. B. G. Teubsen, *Mathematik und Biologie*, 1922.
34. Torricellius, *Evangelista Opera Geometrica*, Florentiae, 1644.
35. E. Torricelli, *Opere*, éd. G. Loria et G. Vassura, Faenza, 1919.
36. B. Cavalieri, *Centurio di varii problemi per dimostrare l'use e la facilita deLogarithmi nella gnomonica*, Bononiae, 1639.
37. J. L. Coolidge, *The number e*, Am. Math. Monthly, Vol. 57, 1950.
38. The Mathematical Association of America, *Selected papers on calculus*, edited by T. M. Apostel, H. E. Christenson, C. S. Ogilvy, D. E. Richmond, N. J. Schoonmaker.
39. P. Lax, S. Burstein, A. Lax, *Calculus with applications and computing*, New York, Springer-Verlag, 1976.
40. L. Euler, *Introduction à l'analyse infinitésimale*, réédition, NewYork, Springer-Verlag, 1983.
41. G. W. Leibniz, *Correspondence between Euler and John Bernoulli.*