Fonctions exponentielle et logarithme

Jean-Etienne Rombaldi[1]

3 janvier 2006

[1]Professeur agrégé à l'Université d'Aix-Marseille III

Table des matières

1

Fonctions exponentielle et logarithme

1.1 La méthode d'Euler pour l'équation $y' = y$

La méthode d'Euler est basée sur le théorème des accroissements finis qui permet d'écrire, pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage du point x :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h) \backsimeq f(x) + hf'(x),$$

où h est réel non nul destiné à tendre vers 0 et θ (qui dépend de x et h) est dans $]0,1[$.

D'un point de vue géométrique, on remplace au voisinage de x le graphe de f par sa tangente en x.

On s'intéresse ici au problème de Cauchy qui consiste à déterminer une fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} y(0) = 1, \\ \forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) = y(x). \end{array}\right. \tag{1.1}$$

En supposant que ce problème admet une solution (ce que nous dit le théorème de Cauchy-Lipschitz) on se fixe un réel $x > 0$ et on va utiliser la méthode d'Euler pour obtenir une valeur approchée de $y(x)$. Pour ce faire on se donne un entier $n \geq 1$ auquel on associe la subdivision de $[0,x]$ définie par les points :

$$x_k = k\frac{x}{n}\ \ (0 \leq k \leq n)$$

et on va définir une suite $(y_k)_{0\leq k\leq n}$ d'approximations des éléments de la suite $(y(x_k))_{0\leq k\leq n}$.

Pour $k = 0$, on pose $y_0 = y(x_0) = 1$.

En supposant construits $y_0, \ldots, y_{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$, on écrit que :

$$y(x_k) = y\left(x_{k-1} + \frac{x}{n}\right) \backsimeq y(x_{k-1}) + \frac{x}{n}y'(x_{k-1}) = y(x_{k-1})\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

et avec $y(x_{k-1}) \backsimeq y_{k-1}$, on obtient l'approximation :

$$y(x_k) \backsimeq y_k = y_{k-1}\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

La suite $(y_k)_{0\leq k\leq n}$ est donc définie par la relation de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{l} y_0 = 1 \\ y_k = y_{k-1}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)\ \ (1 \leq k \leq n) \end{array}\right.$$

ce qui donne $y_k = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^k$ et en particulier on a l'approximation :

$$y(x) = y(x_n) \backsimeq y_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

1.2 La suite de fonctions $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$

Nous sommes donc amené à étudier la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

et nous allons montrer dans ce paragraphe que cette suite converge vers une fonction f qui est l'unique solution du problème (1.1).

Pour $x=0$, cette suite est stationnaire sur 1.

Le lemme suivant nous sera utile.

Lemme 1.1 *Pour tout réel x, on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x)\, u_n(-x) = 1.$$

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$1 - u_n(x)\, u_n(-x) = 1 - \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n = \frac{x^2}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^k.$$

Pour tout $n > |x|$, on a $0 < 1 - \frac{x^2}{n^2} \leq 1$ et :

$$|1 - u_n(x)\, u_n(-x)| \leq \frac{x^2}{n^2}n = \frac{x^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

■

En notant E la fonction partie entière, on associe à tout réel x l'entier n_x défini par :

$$n_x = \begin{cases} 1 \text{ pour } x \geq 0, \\ E(|x|)+1 \text{ pour } x < 0 \end{cases}$$

et on a $u_n(x) > 0$ pour tout $n \geq n_x$.

Nous allons montrer dans ce qui suit que pour tout réel x, la suite $(u_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers un réel $f(x) > 0$. En utilisant le lemme précédent on voit qu'il suffit de montrer ce résultat pour $x > 0$ ou pour $x < 0$.

Lemme 1.2 *Pour tout entier $n_0 \geq 1$ et tout entier $n \geq n_0$, la fonction $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $]-n_0, 0]$.*

Démonstration. On se fixe un entier $n_0 \geq 1$.

Pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in]-n_0, 0]$, on a $n \geq n_0 > -x$ et $u_n(x) > 0$, cette inégalité étant également vérifiée pour $x > 0$ et $n \geq 1$.

Pour $n \geq n_0$ la restriction de la fonction u_n à $]-n_0, +\infty[$ est dérivable à valeurs strictement positives avec $\frac{u_n'(x)}{u_n(x)} = \frac{n}{n+x}$ et :

$$\forall x \in]-n_0, +\infty[,\ \frac{u_{n+1}'(x)}{u_{n+1}(x)} - \frac{u_n'(x)}{u_n(x)} = \frac{x}{(n+x)(n+1+x)}.$$

En utilisant $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)' = \frac{u'_{n+1}u_n - u_{n+1}u'_n}{u_n^2}$, on en déduit que :

$$\begin{cases} \forall x > 0, \ \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)'(x) > 0, \\ \forall x \in \left]-n_0, 0\right[, \ \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)'(x) < 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire que pour $n \geq n_0$, la fonction $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et strictement décroissante sur $\left]-n_0, 0\right]$. ■

Lemme 1.3 *Pour tout réel x la suite $(u_n(x))_{n\geq n_x}$ est à valeurs strictement positives et pour tout entier $n_0 \geq 1$, tout réel non nul x dans $\left]-n_0, +\infty\right[$, la suite $(u_n(x))_{n\geq n_0}$ est strictement croissante.*

Démonstration. Par définition de n_x, on a $u_n(x) > 0$ pour tout réel x et tout entier $n \geq n_x$. Pour x non nul dans $\left]-n_0, +\infty\right[$ le lemme précédent nous dit que :

$$\forall n \geq n_0, \ \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} > \frac{u_{n+1}(0)}{u_n(0)} = 1,$$

c'est-à-dire que la suite $(u_n(x))_{n\geq n_0}$ est strictement croissante. ■

Remarque 1.1 *La croissance de la suite $(u_n(x))_{n\geq n_x}$ peut aussi se montrer directement en utilisant l'inégalité de Bernoulli à savoir : $(1-a)^n > 1 - na$ pour $a < 1$ non nul.*
Pour $n \geq n_x$ on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} \\ &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(\frac{1+x+n}{1+x+n+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{x}{n^2+(1+x)n+x}\right)^{n+1} \\ &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Pour $x < 0$, on a $\frac{x}{(n+1)(n+x)} < 0$ et pour $x > 0$, $\frac{x}{(n+1)(n+x)} < 1$ (c'est équivalent à $n^2 + (1+x)n > 0$), on peut donc utiliser l'inégalité de Bernoulli pour écrire que :

$$\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} > 1 - \frac{x}{n+x} = \frac{n}{n+x}$$

et donc :

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{x}{n}\right)\frac{n}{n+x} = 1$$

Théorème 1.1 *Pour tout réel x, la suite $(u_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers un réel $f(x)$.*
De plus on a $f(0) = 1$, $f(x) > 0$ et $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ pour tout réel x.

Démonstration. Pour $x = 0$ on a $u_n(0) = 1$ pour tout $n \geq 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(0) = 1 = f(0)$.

Pour $x < 0$, on a $0 < 1 + \dfrac{x}{n} < 1$ et $0 < u_n(x) < 1$ pour tout $n \geq n_x$, c'est-à-dire que la suite $(u_n(x))_{n \geq n_x}$ est bornée et comme par ailleurs elle est croissante à partir d'un certain rang n_0, on en déduit qu'elle est convergente. On note $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x)$. De la stricte croissance de $(u_n(x))_{n \geq n_0}$, on déduit que $f(x) > u_{n_0}(x) > 0$.

Enfin pour $x > 0$, on a :

$$u_n(x) = \frac{u_n(x)\, u_n(-x)}{u_n(-x)} \underset{n \to +\infty}{\to} \frac{1}{f(-x)}$$

(lemme 1.1), soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x) = \dfrac{1}{f(-x)} = f(x)$. ■

Remarque 1.2 *De $f(x) f(-x) = 1$ pour tout réel x, on déduit que f n'est pas une fonction polynomiale. En effet si f est polynomiale de degré $n \geq 0$ (f n'est pas nulle), alors $f(x) f(-x)$ est polynomiale de degré $2n$ et constante, on a donc $n = 0$ et f est constante, ce qui est incompatible avec $f(x) > u_1(x) = 1 + x$ pour $x > 0$.*

Remarque 1.3 *Avec :*

$$f(x) = \frac{1}{f(-x)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{u_n(-x)},$$

on déduit que $f(x)$ est aussi limite de la suite $(v_n(x))_{n \geq n_{-x}}$ définie par :

$$\forall n \geq n_{-x},\ v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)} = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

Pour x non nul, il existe un entier n_0 tel que $(u_n(x))_{n \geq n_0}$ est strictement croissante, $(v_n(x))_{n \geq n_0}$ est strictement décroissante et en conséquence :

$$\forall n \geq n_0,\ u_n(x) < f(x) < v_n(x).$$

Lemme 1.4 *Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :*

$$1 + x \leq f(x) \leq \frac{1}{1 - x}.$$

Démonstration. Pour $n_0 = 1$ et $x \in]-1, +\infty[$ on a vu précédemment que la suite $(u_n(x))_{n \geq 1}$ est strictement croissante et donc $u_1(x) = 1 + x \leq f(x)$.

Pour $x \in]-1, 1[$, $-x$ est aussi dans $]-1, 1[$ et on a $u_1(-x) = 1 - x \leq f(-x)$, ce qui donne $f(x) = \dfrac{1}{f(-x)} \leq \dfrac{1}{1 - x}$. ■

Lemme 1.5 *La fonction f est continue en* 0.

Démonstration. Du lemme précédent on déduit immédiatement que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = e(0)$, ce qui signifie que f est continue en 0. ■

Lemme 1.6 *Pour tout suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers un réel x, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x_n) =$ $f(x)$.*

Démonstration. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n(x_n) = \frac{u_n(x_n)\, u_n(-x)}{u_n(-x)}$$

avec :

$$u_n(x_n)\, u_n(-x) = \left(\left(1+\frac{x_n}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)^n = \left(1+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n = u_n(\varepsilon_n)$$

où :

$$\varepsilon_n = x_n - x - \frac{x x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Pour n assez grand, on a $\varepsilon_n \in \left]-1,+\infty\right[$ de sorte que la suite $(u_m(\varepsilon_n))_{m\geq 1}$ est croissante et donc :

$$u_1(\varepsilon_n) = 1+\varepsilon_n \leq u_n(\varepsilon_n) \leq f(\varepsilon_n)$$

avec $\lim\limits_{n\to+\infty} u_1(\varepsilon_n) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\varepsilon_n) = 1$ (continuité de f en 0), ce qui implique $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n) = 1$.

On a donc en définitive $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n)\, u_n(-x) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x_n) = \dfrac{1}{f(-x)} = f(x)$. ■

Théorème 1.2 *Pour tous x, y dans $\mathbb{R}$ on a $f(x+y) = f(x) f(y)$.*

Démonstration. Pour x, y dans $\mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on a :

$$u_n(x)\, u_n(y) = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)\right)^n = \left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = u_n(z_n)$$

avec $z_n = x + y + \dfrac{xy}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} x+y$. On déduit alors du lemme précédent que :

$$f(x) f(y) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x)\, u_n(y) = \lim_{n\to+\infty} u_n(z_n) = f(x+y).$$

■

Corollaire 1.1 *La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Pour x, y dans $\mathbb{R}$ on a :

$$f(y) - f(x) = f(x+y-x) - f(x) = f(x)(f(y-x)-1) \underset{y\to x}{\to} 0$$

en utilisant la continuité en 0 de f. ■

Remarque 1.4 *La continuité de f peut aussi se montrer en utilisant le fait que f est convexe. En effet pour tout $n_0 \geq 1$ et tout $n \geq n_0$ la fonction u_n est convexe sur $\left]-n_0,+\infty\right[$ (sa dérivée seconde est positive sur cet intervalle), donc $f = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est aussi convexe sur cet intervalle. Comme n_0 est quelconque, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$. Sachant qu'une fonction convexe sur un intervalle est continue sur l'intérieur, on déduit que f est continue sur $\mathbb{R}$.*

En utilisant le lemme de Dini, on peut montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur tout intervalle compact $[a,b]$.

Théorème 1.3 *Si $I = [a,b]$ est un intervalle réel compact, alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur I.*

Démonstration. On peut trouver un entier n_0 tel que $I = [a, b] \subset]-n_0, +\infty[$ et pour tout x dans I la suite $(u_n(x))_{n \geq n_0}$ est croissante. En se restreignant à I, on a donc une suite croissante $(u_n)_{n \geq n_0}$ de fonctions continues sur I qui converge simplement sur I vers une fonction continue f, le théorème de Dini nous dit alors que la convergence est uniforme sur I. ■

Remarque 1.5 *Sachant qu'une limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynomiales est nécessairement polynomiale (exercice classique), on en déduit que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ ne peut converger uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f puisque cette dernière n'est pas polynomiale.*

Théorème 1.4 *La fonction f est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy $y' = y$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.*

Démonstration. Avec le lemme 1.4 on a pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$1 \leq \frac{f(x) - 1}{x} \leq \frac{1}{1 - x}$$

et donc $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$, ce qui signifie que f est dérivable en 0 de dérivée égale à 1. Puis avec :

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f(x) \frac{f(h) - 1}{h}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$, on déduit que $\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f(x)$, ce qui signifie que f est dérivable en x avec $f'(x) = f(x)$. Comme $f(0) = 1$, la fonction f est bien solution du problème de Cauchy.

Si y est une autre solution, la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(x) = y(x) f(-x)$ est telle que $z' = 0$ avec $z(0) = 0$, c'est donc la fonction nulle et nécessairement $y(x) = \frac{1}{f(-x)} = f(x)$ pour tout réel x. ■

De ce résultat on déduit que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f^{(n)} = f$ pour tout entier naturel n.

De l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction f, on déduit facilement par récurrence que, pour tout réel non nul a, on a $f(n \cdot a) = (f(a))^n$ pour tout entier naturel n, puis avec $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$, on déduit que cette relation est valable pour tout entier relatif n. Si $r = \frac{p}{q}$ est un entier relatif, on a alors $f(r) = f\left(p\frac{1}{q}\right) = \left(f\left(\frac{1}{q}\right)\right)^p$ et avec $f(1) = f\left(q\frac{1}{q}\right) = \left(f\left(\frac{1}{q}\right)\right)^q$, on déduit que $f\left(\frac{1}{q}\right) = (f(1))^{\frac{1}{q}}$ et $f(r) = (f(1))^{\frac{p}{q}} = (f(1))^r$.

En notant $e = f(1)$, on a donc $f(r) = e^r$ pour tout rationnel r, ce qui nous conduit à noter $f(x) = e^x$ pour tout réel x et la fonction ainsi définie est appelée fonction exponentielle réelle. On la note aussi $f(x) = \exp(x)$.

1.3 Propriétés de la fonction exponentielle réelle

On sait déjà que la fonction exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives et solution de l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) f(y)$.

De $\exp'(x) = \exp(x) > 0$ pour tout réel x, on déduit que exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x > 0$, on a $e^x > e^0 = 1$.

De $\exp''(x) = \exp(x) > 0$ pour tout réel x, on déduit que exp est convexe.

Avec $\exp(x) > u_1(x) = 1 + x$ pour $x > 0$, on déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$ et avec $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$, on déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$.

La fonction exp réalise donc un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Son inverse est appelé fonction logarithme et noté ln.

Cette fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée égale à $\dfrac{1}{t}$ (dérivation de la fonction réciproque). La fonction ln est donc la primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $\dfrac{1}{t}$ nulle en 1.

Avec :

$$\frac{\exp(x)}{x^n} > \frac{u_{n+1}(x)}{x^n} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{n+1}\right)^n \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)$$

pour $x > 0$ et $n \geq 1$, on déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(x)}{x^n} = +\infty$.

1.4 Extension aux espaces de Banach

La définition précédente de la fonction exponentielle peut être étendue aux algèbres de Banach.

On rappelle que si E est une algèbre unitaire sur $\mathbb{R}$, on dit que c'est une algèbre de Banach si elle est munie d'une norme multiplicative $x \mapsto \|x\|$ (c'est-à-dire que $\|\cdot\|$ est une norme sur E et $\|xy\| \leq \|x\| \|x\|$ pour tous x, y dans E) telle que $\|1\| = 1$ (où 1 est le neutre pour la multiplication) et si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach. On peut considérer par exemple $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ qui est une algèbre de Banach commutative ou $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$ muni d'une quelconque norme multiplicative. Cette dernière algèbre n'est pas commutative.

Pour tout z dans E et tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $u_n(z) = \left(1 + \dfrac{1}{n} z\right)^n$.

Pour $z \in E$ et $m > n$, on a :

$$\begin{aligned}
\|u_m(z) - u_n(z)\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n} \left(C_m^k \frac{1}{m^k} - C_n^k \frac{1}{n^k}\right) z^k - \sum_{k=n+1}^{m} C_m^k \frac{1}{m^k} z^k \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left| C_m^k \frac{1}{m^k} - C_n^k \frac{1}{n^k} \right| \|z\|^k + \sum_{k=n+1}^{m} C_m^k \frac{1}{m^k} \|z\|^k
\end{aligned}$$

(comme z et 1 commutent, on peut utiliser la formule du binôme). Pour k compris entre 2 et n, on a :

$$\begin{aligned}
C_m^k \frac{1}{m^k} &= \frac{m(m-1)\dots(m-(k-1))}{k! m^k} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{m}\right) \\
&\geq \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = C_n^k \frac{1}{n^k},
\end{aligned}$$

et pour $k = 0$ ou 1, ces deux quantités valent 1. On a donc :

$$\begin{aligned}
\|u_m(z) - u_n(z)\| &\leq \sum_{k=0}^{n} \left(C_m^k \frac{1}{m^k} - C_n^k \frac{1}{n^k}\right) \|z\|^k + \sum_{k=n+1}^{m} C_m^k \frac{1}{m^k} \|z\|^k \\
&\leq u_m(\|z\|) - u_n(\|z\|)
\end{aligned}$$

et il en résulte que la suite $(u_n(z))_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$. Cet espace étant complet, la suite y est convergente. On note e^z sa limite dans E.

Faisant tendre m vers l'infini dans l'inégalité précédente, on a :

$$\forall n \geq 1,\ \|e^z - u_n(z)\| \leq e^{\|z\|} - u_n(\|z\|)$$

et on en déduit que la convergence est uniforme sur tout compact de E.

Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E qui converge vers z, on en déduit que la suite $(u_n(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^z.

En écrivant que :

$$u_n(z)\,u_n(-z) = \left(1 - \frac{1}{n^2}z^2\right)^n = u_n\left(-\frac{1}{n}z^2\right)$$

(les polynômes en z commutent dans E), on en déduit par passage à la limite que $e^z e^{-z} = 1$, c'est-à-dire que pour tout $z \in E$, e^z est inversible d'inverse e^{-z}.

Pour z, z' dans E, qui commutent dans E, on a :

$$u_n(z)\,u_n(z') = \left(\left(1 + \frac{1}{n}z\right)\left(1 + \frac{1}{n}z'\right)\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}z_n\right)^n = u_n(z_n)$$

avec $z_n = z + z' + \frac{1}{n}zz' \underset{n\to+\infty}{\to} z + z'$. Il en résulte que :

$$e^z e^{z'} = \lim_{n\to+\infty} u_n(z)\,u_n(z') = \lim_{n\to+\infty} u_n(z_n) = e^{z+z'}.$$

Ce résultat est faux si z et z' ne commutent pas comme le montre l'exemple des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (voir [7], exercice 7.1.).

1.5 La suite de fonctions $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Si y est solution du problème (1.1), elle est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec $y^{(n)}(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel non nul x, la formule de Taylor à l'ordre n nous donne alors :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\theta x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}y(\theta x)$$

avec $\theta \in \left]0,1\right[$. Avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, on en déduit alors que $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, c'est-à-dire que y est limite de la suite de fonctions $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Le lien entre cette suite et la suite $\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ peut être précisé comme suit.

Lemme 1.7 *Pour tous $x > 0$ et n, p dans $\mathbb{N}^*$ on a :*

$$u_n(x) \leq w_n(x) \leq u_{n+p}(x).$$

Démonstration. Avec $C_n^k = 0$ et $\frac{C_n^k}{n^k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \leq \frac{1}{k!}$ pour $1 \leq k \leq n$, on déduit que $u_n(x) \leq w_n(x)$ et avec $C_{n+p}^0 = 1$, $C_{n+p}^k = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (n + p - j) > \frac{1}{k!}$ pour $1 \leq k \leq n$, on déduit que $w_n(x) \leq u_{n+p}(x)$. ■

En particulier, pour $p = n^2$, on a :

$$u_{n+n^2}(x) < \left(1 + \frac{x}{n^2}\right)^{n^2} \left(1 + \frac{x}{n^2}\right)^n = u_{n^2}(x)\, u_n\left(\frac{x}{n}\right)$$

et de $u_n(x) \leq w_n(x) \leq u_{n^2}(x)\, u_n\left(\frac{x}{n}\right)$, on déduit que $\lim_{n\to+\infty} w_n(x) = e^x$ (on a $\lim_{n\to+\infty} u_n\left(\frac{x}{n}\right) = e^0 = 1$), c'est-à-dire que $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ pour tout réel $x > 0$, ce résultat étant encore vrai pour $x = 0$.

Si on se place maintenant sur une algèbre de Banach E, on a pour tout $z \in E$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|w_n(z) - u_n(z)\| &= \left\| \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{n^k}\right) z^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{n^k}\right) \|z\|^k \\ &\leq w_n(\|z\|) - u_n(\|z\|) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} 0 \end{aligned}$$

et donc $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$ pour tout $z \in E$ (ce qui montre au passage, en prenant $E = \mathbb{R}$, que ce résultat est vrai pour les réel négatifs).

1.6 Une définition du logarithme

Si on veut définir la fonction logarithme comme réciproque de l'exponentielle à partir d'une suite de fonctions, on part de l'équation $y = u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ où $y > 0$ et $n \geq 1$ sont donnés. Une solution de cette équation est $x = n\left(\sqrt[n]{y} - 1\right)$.

On est donc ainsi amené à considérer la suite de fonctions $(w_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}^{+,*},\ w_n(x) = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right),$$

la fonction $\sqrt[n]{\cdot}$ étant la fonction réciproque sur $\mathbb{R}^{+,*}$ de la fonction $x \mapsto x^n$. On rappelle que cette fonction est indéfiniment dérivable et strictement croissante de $\mathbb{R}^{+,*}$ sur $\mathbb{R}^{+,*}$.

Le résultat suivant nous sera utile.

Lemme 1.8 *Pour tout réel $x > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.*

Démonstration. Avec $\sqrt[n]{1} = 1$ et $\sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$, il suffit de montrer le résultat pour $x > 1$. Dans ce cas la suite $(\sqrt[n]{x})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante ($\sqrt[n+1]{x} < \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x < x^{\frac{n+1}{n}} = x\sqrt[n]{x}$ encore équivalent à $\sqrt[n]{x} > 1$) et minorée par 1, elle converge donc vers un réel $\ell \geq 1$. Si $\ell > 1$, pour $\lambda \in]1, \ell[$ il existe un entier n_0 tel que $\sqrt[n]{x} > \lambda$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui entraîne $x > \lambda^n$ pour tout $n \geq n_0$ qui est incompatible avec $\lim_{n\to+\infty} \lambda^n = +\infty$. ■

Théorème 1.5 *Pour tout réel $x > 0$ la suite $(w_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\ell(x)$ tel que $\ell(1) = 0$, $\ell(x) > 0$ pour $x > 0$ et $\ell(x) < 0$ pour $x \in]0, 1[$.*

Démonstration. Pour $x = 1$, la suite est stationnaire sur 0.

En notant $\alpha_n(x) = w_n(x) - w_{n+1}(x)$, on définit une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\forall x > 0,\ \alpha_n'(x) = x^{\frac{1}{n}-1} - x^{\frac{1}{n+1}-1} = x^{-\frac{n}{n+1}}\left(x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right).$$

La fonction α_n est donc strictement décroissante sur $]0,1[$, strictement croissante sur $]1,\infty[$ avec $\alpha_n(1) = 0$, il en résulte que $\alpha_n(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+,*} \setminus \{1\}$.

La suite $(w_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc strictement décroissante minorée par 0 pour tout $x > 1$, elle converge donc vers un réel $\ell(x) \geq 0$.

Si $x \in]0,1[$, il s'écrit $x = \dfrac{1}{y}$ avec $y > 1$ et :

$$w_n(x) = n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{y}} - 1\right) = -\frac{w_n(y)}{\sqrt[n]{y}} \underset{n\to+\infty}{\to} \ell(x) = -\ell(y) \leq 0.$$

Pour $x \in]0,1[$ la suite $(w_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant strictement décroissante à valeurs strictement négatives on a $\ell(x) < w_1(x) < 0$. Il en résulte que $\ell(x) = -\ell\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$ pour $x > 1$. ■

On définit donc une fonction ℓ sur $\mathbb{R}^{+,*}$ avec :

$$\forall x > 0,\ \ell(x) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right).$$

Théorème 1.6 *La fonction ℓ est solution sur $\mathbb{R}^{+,*}$ de l'équation fonctionnelle $\ell(xy) = \ell(x) + \ell(y)$.*

Démonstration. Pour x, y dans $\mathbb{R}^{+,*}$ et $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} w_n(xy) &= n(\sqrt[n]{xy} - 1) = n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)\sqrt[n]{y} + n(\sqrt[n]{y} - 1) \\ &= w_n(x)\sqrt[n]{y} + w_n(y) \end{aligned}$$

et en passant à la limite on a le résultat. ■

On retrouve $\ell(1) = 0$ et $\ell\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ell(x)$.

Corollaire 1.2 *Pour tout réel $x > 0$ et tout nombre rationnel r, on a $\ell(x^r) = r\ell(x)$.*

Démonstration. Avec l'équation fonctionnelle, on montre facilement par récurrence que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \ell(x^p) = p\ell(x).$$

En écrivant, pour tout $p \geq 1$, que $\ell(x) = \ell\left(\left(x^{\frac{1}{p}}\right)^p\right)$, on déduit que $\ell\left(x^{\frac{1}{p}}\right) = \dfrac{1}{p}\ell(x)$ et il en résulte que pour tout rationnel positif $r = \dfrac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$\ell(x^r) = \ell\left(\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p\right) = p\ell\left(x^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{p}{q}\ell(x) = r\ell(x).$$

Enfin avec $\ell\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ell(x)$, on déduit que le résultat précédent est encore valable pour tout rationnel négatif. ■

Lemme 1.9 *La fonction ℓ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+,*}$.*

Démonstration. La croissance de ℓ résulte immédiatement de celle des w_n.

On peut aussi écrire pour $0 < x < y$ que :

$$0 < \ell\left(y\frac{1}{x}\right) = \ell(y) - \ell(x),$$

ce qui donne la stricte croissance. ■

Lemme 1.10 *La fonction ℓ est continue en* 1.

Démonstration. Avec $0 < \ell\left(2^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\ell(2)$, on déduit que $\lim_{n\to+\infty}\ell\left(2^{\frac{1}{n}}\right) = 0$ et avec $\ell\left(2^{-\frac{1}{n}}\right) = -\frac{1}{n}\ell(2) < 0$ que $\lim_{n\to+\infty}\ell\left(2^{-\frac{1}{n}}\right) = 0$. Pour tout réel $\varepsilon > 0$ on peut donc trouver un entier n_0 tel que $-\varepsilon < \ell\left(2^{-\frac{1}{n}}\right) < \ell\left(2^{\frac{1}{n}}\right) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Pour tout x dans le voisinage ouvert de 1, $I_\varepsilon = \left]2^{-\frac{1}{n_0}}, 2^{\frac{1}{n_0}}\right[$, on a du fait de la croissance de ℓ :

$$-\varepsilon < \ell\left(2^{-\frac{1}{n_0}}\right) < \ell(x) < \ell\left(2^{\frac{1}{n_0}}\right) < \varepsilon.$$

On a donc ainsi montré que ℓ est continue en 1 (on a $\ell(1) = 0$). ■

Théorème 1.7 *La fonction ℓ est continue sur $\mathbb{R}^{+,*}$.*

Démonstration. Résulte de :

$$\ell(x) - \ell(x_0) = \ell\left(\frac{x}{x_0}\right) - \ell(1).$$

■

Théorème 1.8 *La fonction ℓ est concave sur $\mathbb{R}^{+,*}$.*

Démonstration. Résulte de la concavité des w_n. ■

On retrouve ainsi la continuité de ℓ.

On peut en fait montrer très simplement, sans les considérations précédentes (excepté le lemme 1.8), que la suite $(w_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^{+,*}$ vers une fonction dérivable de dérivée égale à $\frac{1}{x}$.

Théorème 1.9 *La suite $(w_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge sur $\mathbb{R}^{+,*}$ vers la primitive nulle en* 1 *de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.*

Démonstration. Chaque fonction w_n est dérivable et pour tout $x > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} w_n'(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{x}}{x} = \frac{1}{x}$. De plus pour tout $R > 1$ et tout $x \in \left[\frac{1}{R}, R\right]$, on a :

$$\left|w_n'(x) - \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x}\left|\sqrt[n]{x} - 1\right| \leq R\left(\sqrt[n]{R} - 1\right)$$

avec $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{R} - 1\right) = 0$, ce qui signifie que la suite $(w_n'(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $\frac{1}{x}$ sur $\left[\frac{1}{R}, R\right]$. Comme de plus la suite $(w_n(1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, on en déduit que la suite

$(w_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\left[\frac{1}{R}, R\right]$ vers une fonction dérivable ℓ de dérivée égale à $\frac{1}{x}$. On a donc $\ell(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{R}, R\right]$. Ce résultat étant valable pour tout $R > 1$, il est vrai sur $\mathbb{R}^{+,*}$. ∎

On retrouve donc ainsi la définition classique du logarithme et ses propriétés usuelles s'en déduisent.

Bibliographie

[1] H. Alzer. *A proof of the arithmetic mean-geometric mean inequality.* American Mathematical Monthly. (1996).

[2] M. H. Dehon. *Une construction élémentaire de l'exponentielle complexe.* Sur le site http ://www.infty08.net.

[3] G. H. Hardy. *A course of pure Mathematics.* Cambridge University Press (1952).

[4] Hardy, Littlewood, Polya. *Inequalities.* Cambridge Mathematical Library. (1999).

[5] W. J. Kaczor, M. T. Nowak. *Problems in mathematical analysis I.* American Mathematical Society (2001).

[6] D. J. Mercier. *Site Mégamaths : http ://perso.wanadoo.fr/megamaths, rubrique Annales, sous-rubrique Capes externe (épreuve 1, 2004) et rubrique Oral 1.*

[7] J. E. Rombaldi — *Analyse matricielle.* EDP Sciences (2000).