Cours de Mathématiques pour la Licence
Analyse Complexe

Sylvie Benzoni et Francis Filbet

7 mai 2007

Table des matières

Chapitre 1

Rappels sur les nombres complexes

1 Introduction

Un *nombre complexe* est avant tout un couple de nombres réels $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. En particulier, la somme de deux nombres complexes $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$ est $z + z' = (x + x', y + y')$, tandis que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, $\lambda z = (\lambda x, \lambda y)$. On notera simplement $-z = (-1)\, z$. L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est de plus doté d'une *multiplication* (interne) .

Définition 1.1 *Quels que soient $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$ dans $\mathbb{C}$, le produit $z\, z'$ est le nombre complexe $z'' = (x'', y'')$ tel que*

$$x'' = x\, x' - y\, y' , \quad y'' = x\, y' + x'\, y .$$

Le produit $z\, z$ est aussi noté z^2 . On vérifie sans peine que $\mathbf{1} = (1, 0)$ est élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{C}$, et que $\mathbb{C}$ muni de cette multiplication et de l'addition $(+)$ est un *corps*. On identifie tout nombre complexe de la forme $z = (x, 0) = x\, \mathbf{1}$ avec le nombre réel x , la multiplication par $z = (x, 0)$ dans $\mathbb{C}$ coïncidant avec la multiplication par x :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \forall z' = (x', y') \in \mathbb{C}\,, \quad (x, 0)\, z' = (x\, x', x\, y') = x\, (x', y')\,.$$

D'autre part, on note $\mathbf{i} = (0, 1)$. Ce nombre complexe vérifie la propriété remarquable :

$$\mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}\,.$$

Autrement dit, $\mathbf{i}$ admet pour inverse

$$\frac{1}{\mathbf{i}} = -\mathbf{i}\,.$$

Interprétation géométrique . On peut représenter $\mathbb{C}$ comme le plan (xOy) muni d'une base orthonormée où $\mathbf{1}$ est le premier vecteur de base (c'est-à-dire dirigeant l'axe (Ox)) et $\mathbf{i}$ est le second vecteur de base (c'est-à-dire dirigeant l'axe (Oy)) .

À chaque nombre complexe $z = (x, y)$ on peut associer le point M de coordonnées (x, y) . On dit alors que z est l'*affixe* du point M . On remarque en particulier que la multiplication par $\mathbf{i}$ correspond à la *rotation* d'angle $\pi/2$ et de centre O . En effet, si $z = (x, y)$ on a $\mathbf{i}\, z = (-y, x)$. Donc si M est le point d'affixe z et M' le point d'affixe $\mathbf{i}\, z$, on a

$$\|\overrightarrow{OM}'\| = \|\overrightarrow{OM}\|\,, \quad \overrightarrow{OM}' \cdot \overrightarrow{OM} = 0\,, \quad \text{dét}(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM}') = x^2 + y^2 > 0\,.$$

2 Écriture cartésienne

Avec les notations introduites précédemment, on a pour tout nombre complexe $z = (x, y)$:

$$z = x\,\mathbf{1} + y\,\mathbf{i}\,,$$

que l'on écrit plus simplement :

$$z = x + i\,y\,.$$

C'est ce qu'on appelle l'*écriture cartésienne* de z . Le nombre réel x, qui est aussi l'abscisse du point d'affixe z, est appelé *partie réelle* de z et le nombre **réel** y, qui est aussi l'ordonnée du point d'affixe z, est appelé *partie imaginaire* de z . On note géneralement :

$$x = \text{Re}z \quad \text{et} \quad y = \text{Im}z\,.$$

On appelle nombre *imaginaire pur* un nombre complexe de partie réelle nulle.

2.1 Conjugaison

Définition 2.1 *Quel que soit le nombre complexe $z = x + i\,y$ avec x et y réels, on appelle* conjugué *de z le nombre complexe*

$$\overline{z} = x - i\,y\,.$$

Interprétation géométrique . Le point d'affixe $\overline{z}$ est *symétrique* du point d'affixe z par rapport à l'axe $(0x)$.

On a les formules évidentes mais bien utiles :

$$\text{Re}z = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \text{Im}z = \frac{z - \overline{z}}{2\,i}\,.$$

Donc en particulier :
– Un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
– Un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -\,z$.

Proposition 2.1 *Pour tous nombres complexes z_1 et z_2,*

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \textit{et} \quad \overline{z_1 \, z_2} = \overline{z_1} \, \overline{z_2} \, .$$

Démonstration. Le cas de la somme est immédiat. Le cas du produit est un calcul facile : si $z_1 = x_1 + i\,y_1$ et $z_2 = x_2 + i\,y_2$, $z_1\,z_2 = x_1\,x_2 - y_1\,y_2 + i\,(x_2\,y_1 + x_1\,y_2)$ donc

$$\overline{z_1 \, z_2} = x_1\,x_2 - y_1\,y_2 - i\,(x_2\,y_1 + x_1\,y_2) = (x_1 - i\,y_1)\,(x_2 - i\,y_2) = \overline{z_1} \, \overline{z_2} \, .$$

□

On remarque que pout tout $z = x + i\,y$ (avec x et y réels), le produit $z\,\overline{z}$ est un nombre réel positif . En effet,

$$z\,\overline{z} = (x + i\,y)\,(x - i\,y) = x^2 + y^2 \, .$$

2.2 Module

Définition 2.2 *Pour tout nombre complexe z, on appelle* module *de z le nombre réel positif*

$$|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} \, .$$

Autrement dit, si $z = x + i\,y$ avec x et y réels, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. En particulier, si $z = x$ est réel, son module $|z|$ est égal à la valeur absolue $|x|$ de x . Les notations sont cohérentes ! De façon plus générale, on a les inégalités :

$$|\mathrm{Re} z| \leq |z| \quad \text{et} \quad |\mathrm{Im} z| \leq |z| \, .$$

Noter que $|z| = 0$ équivaut à $z = 0$.

Interprétation géométrique . Si M est le point d'affixe z, on a

$$|z| = \|\overrightarrow{OM}\| \, .$$

Un corollaire immédiat de la définition du module et de la proposition 2.1 est que pour tous nombres complexes z_1 et z_2,

$$|\, z_1 \; z_2 \,| = |z_1| \, |z_2| \, .$$

Attention ! En général,

$$|\, z_1 + z_2 \,| \neq |z_1| + |z_2| \, .$$

On a seulement l'inégalité

$$|\, z_1 + z_2 \,| \leq |z_1| + |z_2| \, ,$$

avec égalité si et seulement si z_2 est un multiple réel de z_1 (ce qui signifie géométriquement, pour les points $M_{1,2}$ d'affixe $z_{1,2}$, que les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{OM_2}$ sont colinéaires).

Proposition 2.2 *Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même module, même partie réelle et leurs parties imaginaires ont le même signe .*

Démonstration. La partie directe est évidente : si $z = z'$ alors $|z| = |z'|$, Rez = Rez' et Imz = Imz' sont de même signe . Réciproquement, supposons $|z| = |z'|$, Rez = Rez' . Alors

$$(\mathrm{Im} z)^2 = |z|^2 - (\mathrm{Re} z)^2 = |z'|^2 - (\mathrm{Re} z')^2 = (\mathrm{Im} z')^2 .$$

Si de plus Imz et Imz' sont de même signe alors nécessairement Imz = Imz' . □

Cette proposition d'apparence anodine est très utile pour rechercher les *racines carrées* d'un nombre complexe Z, c'est-à-dire les nombres z tels que $z^2 = Z$. En effet, d'après cette proposition on a $z^2 = Z$ si et seulement si

$$|z^2| = Z \,, \quad \mathrm{Re}(z^2) = \mathrm{Re} Z \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z^2)\, \mathrm{Im} Z \geq 0 .$$

En utilisant la propriété $|z^2| = |z|^2$, ceci se traduit sur x = Rez et y = Imz par

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = |Z| \,, \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re} Z \,, \\ x\, y \ \mathrm{Im} Z \geq 0 \,, \end{cases}$$

et ce système est équivalent à

$$\begin{cases} 2\, x^2 = |Z| + \mathrm{Re} Z \,, \\ 2\, y^2 = |Z| - \mathrm{Re} Z \,, \\ x\, y \ \mathrm{Im} Z \geq 0 . \end{cases}$$

On trouve ainsi exactement deux racines carrées de Z (si Z est non nul) .

Si par exemple ImZ est positif, $z^2 = Z$ équivaut à $z = z_1$ ou $z = z_2$ avec :

$$z_1 = \sqrt{\frac{|Z| + \mathrm{Re} Z}{2}} + i \sqrt{\frac{|Z| - \mathrm{Re} Z}{2}} \,,$$

$$z_2 = -\sqrt{\frac{|Z| + \mathrm{Re} Z}{2}} - i \sqrt{\frac{|Z| - \mathrm{Re} Z}{2}} \,.$$

Il n'est pas indispensable de retenir ces formules, il vaut mieux savoir les retrouver en pratique !

3 Inversion

Si $z = x + i\, y$ (avec x et y réels) est un nombre complexe non nul, il admet pour inverse

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\, \overline{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} .$$

Plus généralement, on verra que les *homographies*, c'est-à-dire les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme :

$$z \;\mapsto\; \frac{az+b}{cz+d}$$

(avec $ad - bc \neq 0$), ont des propriétés géométriques et analytiques très importantes.

4 Exponentielle

Avant de présenter la fonction exponentielle, nous rappelons les critères de cnvergence d'une série.

Désignons par $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} u_k(z)$ la série partielle de terme général $u_k(z)$, pour $z \in \mathbb{C}$. On a alors

Définition 4.1 (convergence ponctuelle) *La série $S_n(z)$ converge ponstuellement (on parle aussi de convergence simple) dans D vers $S(z)$ lorsque pour tout $z \in D$ et $\varepsilon > 0$,*

$$\exists\, N(z,\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n > N(z,\varepsilon), \quad |S_n(z) - S(z)| < \varepsilon.$$

Définition 4.2 (convergence uniforme) *La série $S_n(z)$ converge uniformément dans D vers $S(z)$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall\, n > N(\varepsilon), \quad \sup_{z\in D} |S_n(z) - S(z)| < \varepsilon.$$

Définition 4.3 (convergence absolue) *La série $S_n(z)$ est absolument convergente dans D vers $S(z)$ lorsque la série de terme général $|u_k(z)|$ converge ponctuellement dans D.*

Théorème 4.1 (critères de convergence des série numérique) *La série numerique $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente lorsque*

$$\begin{cases} \max\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = L < 1, & \textit{critère d'Abel} \\[2ex] \max\limits_{n\in\mathbb{N}} (u_n)^{1/n} = L < 1, & \textit{critère de Cauchy} \end{cases}$$

Notons que lorsque $L = 1$ on ne peut pas conclure.

Pour tout nombre complexe z, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente. (C'est même une série de fonctions uniformémement convergente sur tout compact de $\mathbb{C}$.) On définit

$$\mathrm{e}^z \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\,.$$

On a de façon évidente $\mathrm{e}^0 = 1$, et pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}.$$

D'autre part, on a comme dans $\mathbb{R}$ la propriété fondamentale

$$\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^{z'}.$$

(Pour la démonstration, utiliser la formule du binôme.) Par suite,

$$|\mathrm{e}^z|^2 = \mathrm{e}^z\,\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^z\,\mathrm{e}^{\overline{z}} = \mathrm{e}^{z+\overline{z}},$$

d'où

$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,z}.$$

Outre son intérêt pratique, cette formule montre, puisque la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, qu'elle ne s'annule pas plus sur $\mathbb{C}$.

5 Nombres complexes de module 1

On notera $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module égal à 1, qui s'identifie géométriquement avec le cercle unité centré en O . Les nombres complexes 1 et i appartiennent bien sûr à $\mathbb{U}$. Une remarque évidente mais souvent utile est l'équivalence

$$\boxed{|z| = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{1}{z} = \overline{z}}$$

Description analytique de $\mathbb{U}$:

$$\mathbb{U} = \{\, z = \mathrm{e}^{i\theta} \ \text{tel que}\ \theta \in \mathbb{R} \,\}.$$

En effet,

$$\{\, z = \mathrm{e}^{i\theta} \ \text{tel que}\ \theta \in \mathbb{R} \,\} \subset \mathbb{U},$$

car d'après la définition et la propriété fondamentale de l'exponentielle, on a

$$\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. D'autre part, si on *définit*

$$\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{i\theta}) = \cos\theta, \quad \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{i\theta}) = \sin\theta$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont continues (comme limites uniformes de suites de fonctions continues), et comme $\mathrm{e}^0 = 1$, on a $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$.

De plus, ces fonctions admettent des développements en série entière :

$$\cos\theta \,=\, \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\,\theta)^n}{n!}\right) \,=\, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,\theta^{2k}}{(2k)!}\,, \quad \sin\theta \,=\, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\,\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

On voit notamment que

$$\cos 2 \,\leq\, 1 \,-\, 2^2/2 + 2^4/4! \,=\, -1/3 \,<\, 0\,.$$

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un nombre $]0,2[$ où $\cos$ s'annule. On *appelle* $\pi/2$ le plus petit. De plus, $\sin$ est dérivable, de dérivée $\cos$, qui est positif sur $[0,\pi/2]$. Donc $\sin(\pi/2)$, qui est de carré égal à 1, est positif. Par suite, $\sin(\pi/2) \,=\, 1$. Ainsi, le nombre π est le plus petit réel positif tel que

$$\mathrm{e}^{i\,\pi/2} \,=\, i \,\in \mathbb{U}\,.$$

On remarque aussi que $\cos$ est paire et $\sin$ impaire. Pour tout $z \in \mathbb{U}$,

$$|\mathrm{Re}z| \,\leq\, |z| \,=\, 1\,.$$

Supposons $\mathrm{Re}z \,\geq\, 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $\theta \in [0,\pi/2]$ tel que $\mathrm{Re}z \,=\, \cos\theta$. De plus, on a

$$(\mathrm{Im}z)^2 \,=\, |z|^2 \,-\, (\mathrm{Re}z)^2 \,=\, 1 \,-\, \cos^2\theta \,=\, \sin^2\theta\,.$$

Donc $\mathrm{Im}z \,=\, \sin\theta$ ou $\mathrm{Im}z \,=\, \sin(-\theta)$. Ainsi, dans le premier cas on a $z \,=\, \cos\theta \,+\, i\,\sin\theta$ et dans le second cas on a $z \,=\, \cos(-\theta) \,+\, i\,\sin(-\theta)$. Enfin, si $z \in \mathbb{U}$ et $\mathrm{Re}z \leq 0$, alors $-z \in \mathbb{U}$ et $\mathrm{Re}(-z) \,\geq\, 0$, donc d'après ce qui précède il existe $\theta \in [0,\pi/2]$ tel que $-z \,=\, \mathrm{e}^{i\,\theta}$. Or

$$-1 \,=\, (i)^2 \,=\, \left(\mathrm{e}^{i\,\pi/2}\right)^2 \,=\, \mathrm{e}^{i\,\pi}\,.$$

Donc $z \,=\, \mathrm{e}^{i\,(\theta+\pi)}$. Ceci prouve que

$$\mathbb{U} \,=\, \{\, z \,=\, \mathrm{e}^{i\,\theta} \;\text{ tel que }\; \theta \in \mathbb{R}\,\}\,.$$

Remarques :

- Géométriquement, la multiplication par $\mathrm{e}^{i\,\theta}$ correspond à la rotation d'angle θ et de centre O.
- l'ensemble $\mathbb{U}$ est un groupe multiplicatif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

  $$\boxed{\mathrm{e}^{i\,n\,\theta} \,=\, \left(\mathrm{e}^{i\,\theta}\right)^n} \qquad \text{(formule de Moivre)}$$

  En particulier,

  $$\mathrm{e}^{2\,i\,\pi} \,=\, i^4 \,=\, 1\,,$$

  d'où

  $$\mathrm{e}^{i\,\theta} \,=\, \mathrm{e}^{i\,\omega} \quad\Longleftrightarrow\quad \theta \,-\, \omega \in 2\pi\mathbb{Z}\,.$$

6 Racines n-ièmes de l'unité

Proposition 6.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe exactement n solutions de l'équation*

$$z^n = 1\,,$$

appelées racines n-ièmes de l'unité. Elles s'écrivent ζ_n^k pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, où

$$\zeta_n = \mathrm{e}^{\frac{2\,i\,\pi}{n}}\,.$$

De plus, elles vérifient la propriété :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_n^k = 0\,.$$

Démonstration. On a pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z^n| = |z|^n$. Donc une solution de $z^n = 1$ est nécessairement de module 1 . De plus,

$$(z = \mathrm{e}^{i\,\theta}\,,\ z^n = 1) \quad \Longrightarrow \quad i\,n\,\theta \in 2\,\pi\,\mathbb{Z}\,.$$

Donc les solutions sont toutes de la forme

$$\mathrm{e}^{\frac{2\,i\,k\,\pi}{n}}\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Or, pour $k \equiv k'\,[n]$,

$$\mathrm{e}^{\frac{2\,i\,k\,\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{2\,i\,k'\,\pi}{n}}\,.$$

Donc il y a seulement n solutions distinctes, comme énoncé . La propriété concernant leur somme se déduit de l'identité remarquable :

$$z^n - 1 = (z - 1)\,(\,z^{n-1} + \cdots + z + 1\,)\,.$$

□

Exemples : Les racines carrées de l'unité sont 1 et $-1 = \mathrm{e}^{i\,\pi}$. Les racines quatrièmes de l'unité sont 1, i, -1 et $-i$. C'est l'occasion de remarquer l'égalité :

$$i = \mathrm{e}^{\frac{i\,\pi}{2}}\,.$$

D'autre part, les racines cubiques de l'unité sont 1, j et j^2, où

$$j \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{e}^{\frac{2\,i\,\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

C'est une notation qu'il vaut mieux connaître[1], ainsi que la formule :

$$1 + j + j^2 = 0\,.$$

[1] Attention cependant, j désigne parfois i en physique !

7 Écriture trigonométrique

Si z est un nombre complexe non nul, alors $z/|z|$ est un nombre complexe de module 1, s'écrivant donc $\mathrm{e}^{i\,\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Il est d'usage de noter $r \,=\, |z| \in \mathbb{R}^{+*}$, si bien que

$$z \,=\, r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}\,.$$

C'est ce qu'on appelle l'*écriture trigonométrique* de z .

Proposition 7.1 *Soient θ_1 et θ_2 dans $\mathbb{R}$, r_1 et r_2 dans $\mathbb{R}^{+*}$. On a*

$$r_1\,\mathrm{e}^{i\,\theta_1} \,=\, r_2\,\mathrm{e}^{i\,\theta_2} \quad \Longleftrightarrow \quad r_1 \,=\, r_2 \quad \textit{et} \quad \theta_1 \,-\, \theta_2 \in 2\pi\mathbb{Z}\,.$$

En particulier, l'écriture trigonométrique $r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}$ d'un nombre complexe non nul est unique si l'on impose $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

Interprétation géométrique . Si M est le point d'affixe $z \,=\, r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}$ avec $r \,\in\, \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$, on a

$$r \,=\, \|\overrightarrow{OM}\|$$

et θ est l'angle entre le vecteur de base $\mathbf{1}$ de l'axe (Ox) et le vecteur $\overrightarrow{OM}$. La multiplication par $r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}$ revient à composer la rotation d'angle θ et de centre O avec l'homothétie de centre O et de rapport r.

Chapitre 2

Transformation de Fourier

1 Introduction à l'analyse de Fourier

Historiquement, c'est l'étude des oscillateurs qui a fixé la terminologie et théorie spectrale. Pour commencer par un exemple simple, on considère un système de n billes de masse identique reliées entre elles par des ressorts identiques et au repos. Pour étudier les mouvements possibles de ces billes, on note u_1, u_2, ..., u_n la position de chaque bille relative a la position d'équilibre. Les équations du mouvement sont alors données par

$$m\frac{d^2u_i}{dt^2} \;=\; k\,(u_{i+1} - 2\,u_i + u_{i-1})$$

où $i = 1, \ldots, n$ et $u_0 = u_{n+1} = 0$ et m est la masse d'une bille et k la constante de rappel des ressorts. On pose alors $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$, ces équations s'écrivent alors

$$\frac{d^2u}{dt^2} \;=\; A\,u$$

avec

$$A = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ldots & 0 \\ & & & & \\ 0 & \ldots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

On constate que la matrice A est symétrique définie négative ($x^TAx \leq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $x^TAx = 0$ implique que $x = 0$). On peut donc diagonaliser la matrice A en l'écrivant sous la forme $D = R^{-1}\,A\,R$ avec $D = diag(-\omega_i^2)$, on obtient pour $v = R^{-1}u$

$$\frac{d^2v_i}{dt^2} \;=\; -\,\omega_i^2\,v_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ces équations peuvent être résolues de manière explicites pour v_i

$$v_i(t) = [\lambda_i\,\cos(\omega_i\,t) \;+\; \mu_i\,\sin(\omega_i\,t)]\,v_i^0$$

ou encore

$$v_i(t) = [\lambda_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)]\, v_i^0.$$

Ainsi le mouvement général des billes s'obtient en superposant des mouvements particuliers, c'est-à-dire que l'on décompose la donnée initiale dans la base des vecteurs propres de la matrice A.

Maintenant, en laissant tendre le nombre de billes vers l'infini, on obtient une modèle pour décrire des petites variations d'une barre fixée aux extrémités. Cette fois-ci, on étudie les variations d'une fonction à deux variables $u(t,x)$ où t représente toujours le temps et $x \in [0,l]$ la variable d'espace. A la limite, le terme Au tend vers $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et on obtient l'équation des ondes

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

avec les conditions aux limites $u(t,0) = u(t,l) = 0$. Pour résoudre ce problème, on se ramène comme dans le cas de la dimension finie à la résolution d'un problème aux valeurs propres. On cherche (v,λ) où v est une fonction de x et $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \lambda v$$

Compte tenu des onditions aux limites, les solutions non triviales (non nulles) s'écrivent

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\,\pi}{l}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

et $v_n(x) = \sin(n\,\pi\,x/l)$.

A chaque vecteur propre v_n, on cherche la solution $u(t,x)$ de l'équation des ondes

$$u(t,x) = h_n(t)\, v_n(x),$$

ce qui donne

$$h_n(t) = A\,\cos\left(\frac{c\,n\,\pi\,t}{l}\right) + B\,\sin\left(\frac{c\,n\,\pi\,t}{l}\right),$$

c'est-à-dire les vibrations ont la fréquence propre $n/2l$.

On s'attend alors par analogie avec la dimension finie que le mouvement général de la barre s'écrit comme la superposition des mouvements propres , c'est-à-dire en décomposant n'importe quelle donnée initiale $u_0(x)$ comme

$$u_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n\, v_n(x).$$

ou dans le cas de onctions périodiques pour $l = \pi$

$$u_0(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\,\cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x).$$

Pour plus de commodité, nous utilisons des fonctions à variables complexes

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\,n\,x}$$

Ce sont des séries de Fourier.

La transformation de Fourier est une opération qui associe à une fonction f de $x \in \mathbb{R}$ (ou plus généralement de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$) une fonction $\widehat{f}$ de $\xi \in \mathbb{R}$ (ou $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$), où ξ est homogène à $1/x$. Lorsque $x = t$ est un temps (penser à f comme à un signal sonore), ξ est donc homogène à une fréquence. Par abus de langage, on parlera des fréquences ξ même si la variable de départ x n'est pas un temps. Toutes les fonctions considérées seront à valeurs dans $\mathbb{C}$, le cas des fonctions à valeurs réelles étant un cas particulier. Avant d'étudier la transformation de Fourier proprement dite, commençons par la notion de *série de Fourier*.

2 Séries de Fourier

Pour une fonction f *périodique* de période T, on peut se contenter de considérer l'ensemble discret de fréquences T/n où n est un entier relatif (le cas $n = 0$ correspondant à une fréquence infinie c'est-à-dire à une période nulle) et associer à f un coefficient c_n pour chacune de ces fréquences. Pour simplifier la présentation, on suppose désormais $T = 1$.

Si f est une fonction 1-périodique et intégrable[1] sur tout intervalle de longueur 1, on définit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n \,:=\, \int_0^1 \, f(x)\, \mathrm{e}^{-\,2\,i\,\pi\,n\,x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Les nombres complexes c_n sont appelés *coefficients de Fourier* de f.

Exemple. Si f est précisément une fonction sinusoïdale $f_k(x) = \mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,k\,x}$, on voit immédiatement que $c_k = 1$, et pour tout $n \neq k$, $c_n = 0$. Plus généralement, si f est une superposition de fonctions sinusoïdales[2]

$$f(x) \,=\, \sum_{k=k_1}^{k_2} \, a_k \, \mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,k\,x}\,,$$

ses coefficients de Fourier sont nuls pour $n \notin \{k_1, \ldots, k_2\}$, et $c_n = a_n$ pour $n \in \{k_1, \ldots, k_2\}$.

[1] au sens de Lebesgue, qu'il n'est pas indispensable de connaître pour la suite ; il nous suffira de supposer la fonction continue par morceaux.

[2] on dit alors que f est un *polynôme trigonométrique*.

Une fois définis les coefficients de Fourier d'une fonction 1-périodique, on lui associe la *série de Fourier*

$$\sum_n c_n \, \mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,n\,x}\,.$$

Attention, cette série n'est pas nécessairement convergente. Il faut faire quelques hypothèses sur f pour cela (voir plus loin le théorème de Dirichlet). C'est pourquoi il plus prudent de considérer les sommes partielles de la série de Fourier de f :

$$S_N(f) \,=\, \sum_{n=-N}^{N} c_n \, \mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,n\,x}\,.$$

Remarque. D'après l'exemple vu ci-dessus, si f est un *polynôme trigonométrique*, il existe N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$, $S_N(f) \,=\, f$.

2.1 Théorie Hilbertienne des séries de Fourier.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $L^p(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions 1-périodiques (au sens où $f(x+1) \,=\, f(x)$ pour *presque tout*[3] $x \in \mathbb{R}$) et de puissance p-ième intégrable sur $[0,1]$, que l'on munit de la *norme*[4] naturelle

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \,=\, \Big(\int_0^1 |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{1/p}\,.$$

Remarque. Si $f \in L^2(\mathbb{T})$, alors $f \in L^1(\mathbb{T})$ car

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \,\leq\, \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}\,.$$

En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \,=\, \int_0^1 |f(x)| \,\mathrm{d}x \,\leq\, \Big(\int_0^1 |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} \Big(\int_0^1 1 \,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} \,=\, \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}\,.$$

Par ailleurs, $L^2(\mathbb{T})$ est un *espace de Hilbert* pour le produit scalaire hermitien[5]

$$\langle f\,,\,g\rangle \,=\, \int_0^1 f(x)\,\overline{g(x)} \,\mathrm{d}x$$

[3] l'expression *presque tout* veut dire à l'exception de points contenus dans un ensemble de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue ; pour une fonction continue par morceaux, cela signifie que "sa valeur" aux points de discontinuité importe peu.

[4] une norme $\|\cdot\|$ sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est par définition une application à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que : 1) ($\|\mathbf{u}\| \,=\, 0 \iff \mathbf{u} \,=\, 0$) ; 2) $\|\lambda\,\mathbf{u}\| \,=\, |\lambda|\,\|u\|$ pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout vecteur $\mathbf{u}$; 3) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \,\leq\, \|\mathbf{u}\| \,+\, \|\mathbf{v}\|$ pour tous vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

[5] cette notion généralise celle de produit scalaire euclidien aux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Un produit scalaire hermitien $\langle\cdot,\cdot\rangle$ doit par définition être tel que $\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle \,\in\, R^+$ pour tout vecteur $\mathbf{u}$, et 1) $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle \,=\, \overline{\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}$; 2) $\langle\mathbf{u}+\lambda\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle \,=\, \langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle \,+\, \lambda\,\langle\mathbf{w},\mathbf{v}\rangle$; 3) $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}+\lambda\mathbf{w}\rangle \,=\, \langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle \,+\, \overline{\lambda}\,\langle\mathbf{u},\mathbf{w}\rangle$ pour tous vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$, et enfin ($\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle \,=\, 0 \quad \forall\mathbf{v}$) $\iff \mathbf{u} \,=\, 0$.

naturellement associé à la norme $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{T})}$:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} = \langle f\,,\, f\rangle^{1/2}.$$

On observe alors que la famille $(f_n \,:\, x \mapsto \mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,n\,x})_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale dans $L^2(\mathbb{T})$, ce qui signifie

$$\|f_n\|_{L^2(\mathbb{T})} = 1 \quad \text{et} \quad \langle f_n\,,\, f_k\rangle = 0 \quad \text{quels que soient } n \text{ et } k \text{ avec } n \neq k\,.$$

En utilisant de façon essentielle cette propriété, on peut montrer le

Théorème 2.1 *Pour tout $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a :*
- **(Inégalité de Bessel)** $\|S_N(f)\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}$ *quel que soit $N \in \mathbb{N}$.*
- $\lim_{N\to+\infty} \|S_N(f) - f\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0\,.$
- **(Identité de Parseval)** *Les coefficients de Fourier c_n de f forment une famille de carré sommable et*
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})}\,.$$

Remarque. Inversement, toute suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de carré sommable est la suite des coefficients de Fourier d'une application $f \in L^2(\mathbb{T})$: on montre en effet que les sommes partielles $\sum_{n=-N}^{N} c_n\, \mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,n\,x}$ forment une suite convergente dans $L^2(\mathbb{T})$, et la limite f est telle que

$$\langle f, \mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,k\,x}\rangle = \lim_{N\to+\infty} \langle \sum_{n=-N}^{N} c_n\, \mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,n\,x}, \mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,k\,x}\rangle = c_k \quad \text{quel que soit } k \in \mathbb{Z}\,.$$

2.2 Convergence ponctuelle des séries de Fourier.

La théorie précédente peut être raffinée en montrant que, sous certaines conditions, la série de Fourier d'une fonction converge *point par point* vers cette fonction.

Théorème 2.2 *Si la série $\sum_n c_n$ des coefficients de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ est absolument convergente, alors sa série de Fourier est uniformément convergente et*

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{[0,1]} |S_N(f) - f| = 0\,.$$

En particulier, la fonction f est nécessairement continue, comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues.

Théorème 2.3 (Dirichlet) *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite en tout point, alors pour tout x*

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right),$$

où

$$f(x+0) \;=\; \lim_{\varepsilon \xrightarrow{>} 0} f(x+\varepsilon)\,, \quad f(x-0) \;=\; \lim_{\varepsilon \xrightarrow{>} 0} f(x-\varepsilon)\,.$$

Démonstration. On a par définition

$$S_N(f)(x) \;=\; \sum_{|n|\le N} \int_0^1 f(y)\,\mathrm{e}^{\,2\,i\,\pi\,n\,(x-y)}\,\mathrm{d}y \;=\; \int_0^1 f(x-y) \sum_{|n|\le N} \mathrm{e}^{\,2\,i\,\pi\,n\,y}\,\mathrm{d}y\,.$$

Notons

$$K_N(y) \;:=\; \sum_{|n|\le N} \mathrm{e}^{\,2\,i\,\pi\,n\,y}\,.$$

On montre facilement que

$$K_N(y) \;=\; \frac{\sin(\,(2N+1)\,\pi\,y\,)}{\sin(\pi\,y)} \quad \text{et} \quad \int_0^{1/2} K_N(y)\,\mathrm{d}y \;=\; \int_{-1/2}^{0} K_N(y)\,\mathrm{d}y \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

D'où

$$\begin{aligned} & S_N(f)(x) \;-\; \frac{f(x+0)\;+\;f(x-0)}{2} \\ =\; & \int_0^{1/2} (\,f(x-y)\;-\;f(x-0)\,)\;K_N(y)\,\mathrm{d}y \\ & +\int_{-1/2}^{0} (\,f(x-y)\;-\;f(x+0)\,)\;K_N(y)\,\mathrm{d}y \\ =\; & \int_0^{1/2} \varphi_x(y)\;K_N(y)\,\mathrm{d}y\,, \end{aligned}$$

où

$$\varphi_x(y) \;:=\; f(x-y)\;-\;f(x-0)\;+\;f(x+y)\;-\;f(x+0) \quad \text{vérifie} \;\lim_{y \xrightarrow{>} 0} \varphi_x(y) \;=\; 0\,.$$

Mais attention,

$$\lim_{y \xrightarrow{>} 0} K_N(y) \;=\; (2N+1)\,\pi\,,$$

ce qui tend vers $+\infty$ avec N ! C'est pourquoi on a besoin de faire apparaître la dérivée de f. Considérons par exemple le premier morceau :

$$\begin{aligned} & \int_0^{1/2} (\,f(x-y)\;-\;f(x-0)\,)\;K_N(y)\,\mathrm{d}y \;=\;= \\ & -\int_0^{1/2} \Big(\int_0^{y} f'(x-u)\,\mathrm{d}u\Big)\;K_N(y)\,\mathrm{d}y \;= \\ & -\int_0^{1/2} \Big(\int_u^{1/2} K_N(y)\,\mathrm{d}y\Big)\;f'(x-u)\,\mathrm{d}u\,. \end{aligned}$$

On montre que $\int_u^{1/2} K_N(y)\,\mathrm{d}y$ est bornée indépendamment de N, et tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$ dès que u est *strictement positif* (et inférieur à $1/2$). Donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée : cela prouve que la double intégrale tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$. L'autre morceau se traite de la même façon. □

Attention cependant, aux points de discontinuité, l'approximation d'une fonction par les sommes partielles de sa série de Fourier n'est pas très bonne : c'est ce qu'on appelle le *phénomène de Gibbs*.

Théorème 2.4 (Phénomène de Gibbs) *Soit*

$$C \;:=\; \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\,\mathrm{d}x \;\approx\; 0.58948987\ldots$$

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ admet une dérivée à gauche et une dérivée à droite en tout point, alors pour tout x

$$\lim_{N\to+\infty} \Big(S_N(f) \,-\, f\Big)\big|_{x+\frac{1}{2N+1}} \;=\; (C \,-\, \frac{1}{2})\,(f(x+0) \,-\, f(x-0))\,,$$

$$\lim_{N\to+\infty} \Big(S_N(f) \,-\, f\Big)\big|_{x-\frac{1}{2N+1}} \;=\; -\,(C \,-\, \frac{1}{2})\,(f(x+0) \,-\, f(x-0))\,.$$

3 Transformation de Fourier des fonctions intégrables

Les coefficients de Fourier d'une fonction de période T sont naturellement définis comme ceux de la fonction 1-périodique

$$\widetilde{f} : \, x :\mapsto \, \widetilde{f}(x/T)\,.$$

Ainsi

$$c_n \;:=\; \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\mathrm{e}^{-2i\pi n x/T}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,\mathrm{e}^{-2i\pi n x/T}\,\mathrm{d}x\,.$$

La représentation de f à l'aide de sa série de Fourier s'écrit ainsi *formellement*

$$f(x) \;=\; \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{2i\pi x n/T}\,F(n/T)\,, \quad \text{où} \quad F(\zeta) \;:=\; \int_{-T/2}^{T/2} f(y)\;\mathrm{e}^{-2i\pi\zeta y}\,\mathrm{d}y\,.$$

On peut interpréter la somme comme l'approximation d'une intégrale, autrement dit :

$$f(x) \;\approx\; \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2i\pi x\zeta}\,F(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,, \quad \text{où} \qquad F(\zeta) \;\approx\; \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\;\mathrm{e}^{-2i\pi\zeta y}\,\mathrm{d}y$$

(en faisant, toujours *formellement*, tendre T vers $+\infty$.) On observe une symétrie dans ces formules. La seconde est celle qui définit la transformation de Fourier d'une fonction intégrable. La première est celle de la transformation réciproque, lorsqu'elle a un sens. On verra en effet que la transformation de Fourier et sa réciproque sont, *pour certaines classes de fonctions*, conjuguées l'une de l'autre.

Définition 3.1 *Pour toute fonction intégrable $f : \mathbb{R} \to C$, on définit $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ la transformée de Fourier de f par*

$$\widehat{f}(\zeta) \;=\; \int f(x)\, e^{-2\, i\, \pi\, \zeta\, x}\, \mathrm{d}x\,.$$

Une application immédiate du théorème de Lebesgue montre la

Proposition 3.1 *La transformée de Fourier d'une fonction intégrable est une application continue, bornée par*

$$|\widehat{f}(\zeta)| \;\leq\; \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \;:=\; \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, \mathrm{d}x, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}.$$

De plus, $\widehat{f}(\zeta)$ tend vers zéro lorsque $|\zeta|$ tend vers l'infini.

Démonstration. L'inégalité sur les normes est évidente puisque

$$|\widehat{f}(\zeta)| \;\leq\; \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, \mathrm{d}x, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}.$$

Le fait que la fonction $\widehat{f}$ soit continue résulte du théorème de continuité de Lebesgue pour les intégrales dépendant d'un paramètre ; ici la fonction $|f|$ elle-même joue le rôle de majorant intégrable. Enfin il s'agit de voir si une suite $(\zeta_n)_n$ tend vers l'infini, alors $(\widehat{f}(\zeta_n))_n$ tend vers zéro. Or cette propriété se montre facilement pour la fonction caract'éristique $1_{[a,b]}$ d'un intervalle $[a, b]$ donné puisque

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1_{[a,b]}(x)\, \mathrm{e}^{-2\, i\, \pi\, \zeta\, x}\, dx = \int_a^b \mathrm{e}^{-2\, i\, \pi\, \zeta\, x}\, dx = \frac{-1}{2\pi i \zeta}[\mathrm{e}^{-2\, i\, \pi\, \zeta\, b} - \mathrm{e}^{-2\, i\, \pi\, \zeta\, a}]$$

de sorte que, dans ce cas

$$\widehat{f}(\zeta) = O(1/|\zeta|).$$

Par linéarité la propriété s'étend aux fonctions en escalier, lesquelles sont denses dans l'espace $L^1(\mathbb{R})$ des fonctions intégrables.

Si nous désignons par T_n l'opérateur linéaire qui à une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ associe le nombre complexe $f(\zeta_n)$, nous savons donc que $T_n(f)$ tend vers zéro pour toute fonction f dans une partie dense de L^1 et d'autre part que $\|T_n\| \leq 1$ puisque $|T_n(f)| \leq \|f\|_{L^1}$. Cela suffira pour conclure en appliquant le lemme suivant

Lemme 3.1 *Soient E, F des espaces normés et $(T_n)_n$ une suite d'opérateurs linéaires de E dans F pour laquelle, il existe $C > 0$ telle que $\|T_n\| \leq C$; si $T_n(f)$ tend vers zéro pour tout élément f d'une partie dense de E alors il en est de même pour tout f dans E.*

Soient en effet f un élément de E et $\varepsilon > 0$; il existe un élément g de E telle que $T_n(g)$ tende vers zéro et que $\|f - g\| \leq \varepsilon/2C$. Or

$$\|T_n(f)\| \leq \|T_n(g)\| + \|T_n(f-g)\| \leq \|T_n(g)\| + \varepsilon/2$$

pour n assez grand on aura bien $\|T_n(f)\| \leq \varepsilon$. □

D'autre part, le comportement à l'infini de la transformée de Fourier d'une fontion est lié à sa *régularité*.

Proposition 3.2 *La transformée de Fourier d'une fonction intégrable tend vers* 0 *à l'infini. De plus, si* f *est* p *fois dérivable avec toutes ses dérivées intégrables, alors sa transformée de Fourier tend vers* 0 *à l'infini comme* $1/|\zeta|^p$*.*

Démonstration. Commençons par montrer la seconde assertion. En intégrant p fois par parties, on voit que

$$\widehat{f}(\zeta) \;=\; \frac{1}{(2\,i\,\pi\,\zeta)^p} \int f^{(p)}(x)\, \mathrm{e}^{-2\,i\,\pi\,\zeta\,x}\, \mathrm{d}x$$

pour tout $\zeta \neq 0$. (Les "termes de bord" sont tous nuls car une fonction intégrable dont la dérivée est intégrable tend nécessairement vers 0 à l'infini.) On a donc la majoration :

$$|\widehat{f}(\zeta)| \;\leq\; \frac{1}{(2\,\pi\,|\zeta|)^p}\, \|f^{(p)}\|_{L^1(\mathbb{R})}\,.$$

Ceci prouve le comportement asymptotique énoncé. D'autre part, on admettra que toute fonction continue peut être approchée, dans l'espace $L^1(\mathbb{R})$ (et plus généralement dans tout espace $L^p(\mathbb{R})$ avec $p \in \mathbb{N}^*$) par une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact : cela signifie une fonction infiniment dérivable et nulle en dehors d'un intervalle borné. Grâce à ce résultat, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe une fonction dérivable et intégrable (puisqu'à support compact) g telle que

$$\|\, f \,-\, g\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

D'après ce qui précède, pour $|\zeta|$ assez grand, $|\widehat{g}(\zeta)| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2}$. Par suite (en utilisant la proposition 3.1),

$$|\widehat{f}(\zeta)| \;\leq\; \|\, f \,-\, g\,\|_{L^1(\mathbb{R})} \;+\; |\widehat{g}(\zeta)| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon\,.$$

Ceci prouve la première assertion. □

Voici maintenant une formule remarquable qui fait le lien, *de façon rigoureuse*, avec les séries de Fourier.

Théorème 3.1 (Formule sommatoire de Poisson) *Si* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *est telle que, pour tout intervalle borné* $[a,b]$*,*

$$\sum_n \max_{x\in[a,b]} |f(x+n)| \;<\; +\infty$$

et si $\sum_n |\widehat{f}(n)| < +\infty$, *alors*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{2i\pi n x} \quad \textit{pour tout } \ x \in \mathbb{R}\,.$$

En particulier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)$.

Démonstration. D'après les hypothèses, la fonction

$$x \mapsto F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$$

est définie et continue en tout point x de $\mathbb{R}$, et elle est évidemment 1-périodique. Ses coefficients de Fourier sont

$$\begin{aligned} C_m &= \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)\,\mathrm{e}^{-2i\pi m x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)\,\mathrm{e}^{-2i\pi m (x+n)}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 f(x+n)\,\mathrm{e}^{-2i\pi m (x+n)}\,\mathrm{d}x\,, \end{aligned}$$

c'est-à-dire par changement de variable,

$$C_m = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(y)\,\mathrm{e}^{-2i\pi m y}\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\mathrm{e}^{-2i\pi m y}\,\mathrm{d}y = \widehat{f}(m)\,.$$

L'hypothèse sur la série $\sum_n \widehat{f}(n)$ assure que F est somme de sa série de Fourier (par le théorème 2.2), d'où le résultat. □

La formule de Poisson permet, entre autres, de donner une démonstration rapide du théorème fondamental suivant.

Théorème 3.2 *Si* f *est intégrable et continue, et si pour tout intervalle borné* $[a,b]$,

$$\sum_n \max_{x\in[a,b]} |f(x+n)| < +\infty\,, \quad \sum_n \max_{\zeta\in[a,b]} |\widehat{f}(\zeta+n)| < +\infty\,,$$

alors

– **(formule d'inversion)**

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\zeta)\, e^{2i\pi\zeta x}\,\mathrm{d}\zeta$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

– **(formule de Plancherel)**

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \;=\; \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\zeta)|^2 \, \mathrm{d}\zeta \,.$$

Démonstration. On commence par remarquer la formule élémentaire :

$$\mathcal{F}\Big(f \; \mathrm{e}^{-2\,i\,\pi\,\tau\,\cdot}\Big) = \widehat{f}(\cdot + \tau)\,.$$

En appliquant la formule sommatoire de Poisson à la fonction $x \;\mapsto\; f(x) \; \mathrm{e}^{-2\,i\,\pi\,\tau\,x}$, on en déduit donc :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) \; \mathrm{e}^{-2\,i\,\pi\,\tau\,(x+n)} \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\tau)\,\mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,n\,x}\,,$$

ou encore

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) \; \mathrm{e}^{-2\,i\,\pi\,\tau\,n} \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\tau)\,\mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,(n+\tau)\,x}\,.$$

Le membre de gauche est une série de Fourier par rapport à la variable τ, dont les coefficients $c_n = (f(x-n))_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une série absolument convergente (à x fixé). En particulier, le coefficient $c_0 = f(x)$ est donné par :

$$\begin{aligned}
c_0 \;&=\; \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) \; \mathrm{e}^{-2\,i\,\pi\,\tau\,n} \; \mathrm{d}\tau \\
&=\; \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\tau)\,\mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,(n+\tau)\,x} \; \mathrm{d}\tau \\
&=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} \widehat{f}(\zeta)\,\mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,\zeta\,x} \; \mathrm{d}\zeta \\
&=\; \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\zeta)\,\mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,\zeta\,x}\,\mathrm{d}\zeta\,.
\end{aligned}$$

Ceci montre la formule d'inversion. D'autre part, d'après l'identité de Parseval, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(x+n)|^2 \;&=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 \\
&=\; \int_0^1 \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\tau)\,\mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,(n+\tau)\,x}\right|^2 \; \mathrm{d}\tau \\
&=\; \int_0^1 \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\tau)\,\mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,n\,x}\right|^2 \; \mathrm{d}\tau\,,
\end{aligned}$$

$f(x)$	$f(-x)$	$f^{(p)}(x)$	$f(x+a)$	$f(a\,x)$
$\widehat{f}(\zeta)$	$\overline{\widehat{f}(\zeta)}$	$(2\,i\,\pi\,\zeta)^p\ \widehat{f}(\zeta)$	$\mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,\zeta a}\ \widehat{f}\Big(\zeta\Big)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\ \widehat{f}\Big(\frac{\zeta}{a}\Big)$

TAB. 2.1 – Formulaire de base (on obtient des formules analogues en échangeant les rôles de f et $\overline{\widehat{f}}$ grâce à la formule d'inversion) .

d'où

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\ \mathrm{d}x &= \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(x+n)|^2\ \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\tau)\,\mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,n\,x}\right|^2\ \mathrm{d}\tau\ \mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Grâce au théorème de Fubini, on peut intervertir l'ordre d'intégration, et comme

$$\int_0^1 \left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n+\tau)\,\mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,n\,x}\right|^2\ \mathrm{d}x \,=\, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n+\tau)|^2$$

par la formule de Parseval, on obtient finalement

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\ \mathrm{d}x \,=\, \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n+\tau)|^2\ \mathrm{d}\,\tau \,=\, \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\zeta)|^2\ \mathrm{d}\zeta\,.$$

□

Remarque 3.1 *En particulier, d'après la proposition 3.2, les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact satisfont les hypothèses des théorèmes 3.1 et 3.2.*

On montre facilement quelques formules utiles, dont certaines ont déjà été rencontrées, voir le tableau 2.1.

Une autre formule importante concerne la *convolution* de deux fonctions.

Définition 3.2 (Convolution) *Pour deux fonctions f et g, dont l'une au moins est intégrable et l'autre bornée, on définit $f\,*\,g$ par*

$$(f\,*\,g)(x) \,=\, \int f(x-y)\ g(y)\ \mathrm{d}y \,=\, (g\,*\,f)(x)\,.$$

Remarque 3.2 *On peut aussi donner un sens à la convolution d'une fonction intégrable f par une fonction $g\in L^p(\mathbb{R})$ quel que soit $p\in\mathbb{N}^*$. On montre de plus que $f\,*\,g\in L^p(\mathbb{R})$ avec*

$$\|\, f\,*\,g\,\|_{L^p(\mathbb{R})} \,\leq\, \|\, f\,\|_{L^1(\mathbb{R})}\,\|\, g\,\|_{L^p(\mathbb{R})}\,.$$

On montre facilement que, si les deux fonctions f et g sont intégrables (avec l'une bornée),

$$\widehat{f * g}(\zeta) = \widehat{f}(\zeta)\,\widehat{g}(\zeta)\,.$$

On en déduit grâce à la formule d'inversion :

$$\widehat{f\,g} = \widehat{f} * \widehat{g}$$

dès que les deux membres de l'égalité ont un sens (c'est le cas par exemple si f, g, $f\,g$ et $\widehat{f}$ sont intégrables).

4 Exemples de Transformées de Fourier

• On calcule facilement la transformée de Fourier de la fonction créneau :

$$f = \mathbf{1}_{|x| \leq R} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{f}(\zeta) = \frac{\sin(2\,\pi\,R\,\zeta)}{\pi\,\zeta}\,.$$

On a inversement :

$$f(x) = \frac{\sin(2\,\pi\,R\,x)}{\pi\,x} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{f}(\zeta) = \mathbf{1}_{|\zeta| \leq R}\,.$$

• Pour $a > 0$, la fonction $f, :\ x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{-\,a\,|x|}$ a pour transformée de Fourier

$$\widehat{f}(\zeta) = \frac{2\,a}{a^2 + 4\,\pi^2\,\zeta^2}\,.$$

(Calcul sans difficulté, laissé en exercice.)

• Pour une Gaussienne :

$$f(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{-\,a\,x^2}\,,$$

avec $a > 0$, le calcul de la transformée de Fourier n'est pas aussi immédiat. On a par définition (la fonction f étant évidemment intégrable) :

$$\widehat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\,a\,x^2}\,\mathrm{e}^{-\,2\,i\,\pi\,\zeta\,x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Plusieurs méthodes sont possibles pour obtenir une formule sans signe $\int$. On peut faire appel à la théorie des fonctions de variable complexe (formule de Cauchy). Un calcul plus élémentaire consiste à remarquer :

$$\widehat{f}'(\zeta) = -\,2\,i\,\pi \int_{\mathbb{R}} x\,\mathrm{e}^{-\,a\,x^2}\,\mathrm{e}^{-\,2\,i\,\pi\,\zeta\,x}\,\mathrm{d}x = -\,\frac{2\,\pi^2}{a}\,\zeta\,\widehat{f}(\zeta)$$

par intégration par parties. D'où, en résolvant à vue l'équation différentielle satisfaite par $\widehat{f}$:

$$\widehat{f}(\zeta) = \widehat{f}(0)\,\mathrm{e}^{-\,\frac{\pi^2\,\zeta^2}{a}}\,.$$

Il reste à calculer, et c'est vrai quelle que soit l'approche choisie, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-a x^2} \,\mathrm{d}x = \widehat{f}(0)\,.$$

Par un changement de variable évident on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-a x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2} \,\mathrm{d}y\,.$$

Il y a une astuce bien connue pour calculer

$$I := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2} \,\mathrm{d}y\,.$$

On remarque que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-\|\mathbf{x}\|^2} \,\mathrm{d}\mathbf{x} = I^2$$

(par le théorème de Fubini) et on calcule l'intégrale sur $\mathbb{R}^2$ en passant en coordonnées polaires :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-\|\mathbf{x}\|^2} \,\mathrm{d}\mathbf{x} = 2\pi \int_0^{+\infty} r\,\mathrm{e}^{-r^2} \,\mathrm{d}r = \pi\,.$$

D'où finalement

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-a x^2} \,\mathrm{d}x = \sqrt{\tfrac{\pi}{a}} \qquad \text{et} \qquad \widehat{f}(\zeta) = \sqrt{\tfrac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2 \zeta^2}{a}}\,.$$

En particulier, pour $a = \pi$, on voit que la la fonction

$$f(x) = \mathrm{e}^{-\pi x^2}$$

est invariante par transformation de Fourier.

5 Transformation de Fourier de fonctions L^2

Toutes les fonctions ne sont pas intégrables, loin s'en faut. Pourtant on peut définir la transformée de Fourier de certaines fonctions non intégrables, et même d'objets qui ne sont pas des fonctions…

Commençons par les fonctions de carré intégrable.

Exemple : la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+|x|}$ n'est pas intégrable, mais elle est de carré intégrable.

Attention, il existe aussi des fonctions intégrables qui ne sont pas de carré intégrable (par exemple, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{-x^2}$) !

On note $L^2(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} := \Big(\int_{\mathbb{R}} |f|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}.$$

On admettra que toute fonction de carré intégrable peut être approchée aussi près qu'on veut dans $L^2(\mathbb{R})$ par une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Grâce à ce résultat et au théorème 3.2, on peut étendre "par densité" la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ à $L^2(\mathbb{R})$. En effet, si $f \in L^2(\mathbb{R})$, il existe une "suite" f_ε de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact convergeant vers f dans $L^2(\mathbb{R})$ lorsque ε tend vers 0. La "suite" $(\mathcal{F}(f_\varepsilon))_{\varepsilon>0}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$, puisque

$$\|\mathcal{F}(f_\varepsilon) - \mathcal{F}(f_{\varepsilon'})\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f_\varepsilon - f_{\varepsilon'}\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

donc elle converge[6] vers une fonction $F \in L^2(\mathbb{R})$. Cette limite ne dépend pas de la suite. Car si g_ε en est une autre, de limite G, on a

$$\|\mathcal{F}(f_\varepsilon) - \mathcal{F}(g_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

d'où en passant à la limite

$$\|F - G\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f - g\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

Cette limite est par définition la transformée de Fourier de f, notée $\widehat{f}$. De plus, en passant à la limite dans l'identité :

$$\|\mathcal{F}(f_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

on obtient

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Quant à la formule d'inversion, d'après la remarque 3.1, elle est satisfaite au moins sur le sous-ensemble dense constitué des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact. On peut écrire en abrégé la formule d'inversion :

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \mathrm{Id}.$$

Cette identité est vraie sur L^2 tout entier par passage à la limite. En revanche, la formule d'inversion telle qu'elle est écrite dans le théorème 3.2 suppose $\widehat{f}$ intégrable, *ce qui n'est pas automatique*.

[6] On utilise ici le fait que L^2 est un espace *complet*.

6 Transformation de Fourier de fonctions L^∞

Voyons maintenant comment définir la transformée de Fourier de fonctions dont on suppose seulement qu'elles sont bornées. On note $L^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions (mesurables et essentiellement) bornées[7], muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| .$$

Malheureusement, le résultat d'approximation utilisé précédemment dans L^2 est faux dans L^∞. Toutefois, on peut procéder "par dualité". En effet, à toute fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ on peut associer une *forme linéaire continue* sur L^1, définie par :

$$T_f \,:\, \phi \in L^1(\mathbb{R}) \mapsto \langle\, f \,,\, \phi \,\rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \phi(x)\, \mathrm{d}x .$$

Inversement, toute forme linéaire continue sur L^1 admet une représentation de la forme ci-dessus, c'est un résultat connu sous le nom de théorème de Riesz. C'est pourquoi on "identifie" souvent T_f avec f.

Proposition 6.1 *Si f et ϕ sont intégrables et de carré intégrable, alors on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)\, \phi(y)\, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, \widehat{\phi}(\xi)\, \mathrm{d}\xi .$$

Démonstration. C'est un simple calcul avec interversion de l'ordre d'intégration. Noter que l'hypothèse assure que les transformées de Fourier $\widehat{f}$ et $\widehat{\phi}$ sont définies par la formule intégrale standard, et que les fonctions $\widehat{f}\,\phi$ et $f\,\widehat{\phi}$ sont intégrables. □

Ce résultat suggère de définir la transformée de Fourier d'une fonction f plus générale par la formule :

$$\langle\, \widehat{f} \,,\, \phi \,\rangle = \langle\, f \,,\, \widehat{\phi} \,\rangle .$$

Pour donner un sens à cette formule, il faut que

$$\phi \mapsto \langle\, f \,,\, \widehat{\phi} \,\rangle$$

soit une forme linéaire continue sur un espace "raisonnable", et $\widehat{f}$ appartient alors par définition au dual de cet espace. Il se peut que l'espace en question soit encore L^1, dont le dual s'identifie avec L^∞ comme on l'a dit plus haut : c'est le cas par exemple lorsqu'on cherche la transformée de Fourier de la fonction

$$f \,:\, x \mapsto f(x) = \mathrm{e}^{i\,a\,x^2}$$

[7]On peut ne pas connaître le sens des termes entre parenthèses, *mesurable* et *essentiellement bornée* : il suffit de se limiter, par exemple, à des fonctions continues par morceaux et bornées.

avec $a > 0$. On montrera plus loin, en utilisant la théorie des fonctions de variable complexe, que sa transformée de Fourier est en effet la fonction bornée

$$\widehat{f} \,:\, \zeta \,\mapsto\, \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2} \mathrm{e}^{i\,d\,\pi/4}\,\mathrm{e}^{i\,\pi^2\,\zeta^2/a}\,.$$

Pour d'autres fonctions bornées, comme par exemple la *fonction de Heaviside*

$$H \,:\, x \,\mapsto\, \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\,, \\ 1 & \text{si } x > 0\,, \end{cases}$$

c'est un peu plus délicat. Il est possible d'identifier la transformée de Fourier de H avec la fonction

$$\zeta \,\mapsto\, \frac{1}{2\,i\,\pi\,\zeta}\,,$$

qui n'est précisément pas bornée. Pour obtenir ce résultat, il y a divers moyens plus ou moins détournés. Le plus élémentaire consiste en un passage à la limite formel, en remarquant que la fonction intégrable

$$x \,\mapsto\, H(x)\,\mathrm{e}^{-\,a\,x}\,,$$

converge ponctuellement vers H lorsque a tend vers 0 par valeurs positives. Or sa transformée de Fourier se calcule aisément : elle vaut

$$\frac{1}{a\,+\,2\,i\,\pi\,\zeta}\,,$$

ce qui tend bien vers $1/(2\,i\,\pi\,\zeta)$ lorsque a tend vers 0. Un autre moyen, plus rigoureux, consiste à calculer d'abord la transformée de Fourier de la *masse de Dirac*, dont H est la dérivée au sens des distributions. On sort là du cadre de ce cours. L'importance de la masse de Dirac dans diverses applications nécessite pourtant quelques explications. On se reportera pour cela à la séance de TD n° 2.

Chapitre 3

Fonctions de variable complexe

1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'introduire les notions fondamentales concernant les fonctions dépendant non plus d'une variable réelle mais d'une variable complexe (et à valeurs complexes). L'intérêt de "passer en complexe" apparaîtra clairement dans le calcul d'intégrales par la méthode des résidus ; la théorie des fonctions de variable complexe est aussi utile pour la transformation de Fourier (calcul de transformées de Fourier) et de Laplace (formule d'inversion)...

Définition 1.1 *Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est définie par*

$$z = x + \mathbf{i}y \in \Omega, f(x + \mathbf{i}y) = u(x, y) + \mathbf{i}v(x, y).$$

où $u(x, y)$ est dite la partie réelle de $f(z)$ et $v(x, y)$ est dite la partie imaginaire de $f(z)$.

Définition 1.2 *Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dite uniforme ou univoque si chaque $z \in \Omega$ ne correspond qu'une image $f(z)$.*

Exemples :

- la fonction $f(z) = z^2$ est univoque
- la fonction $g(z) = e^z := e^x \cos(y) + \mathbf{i}e^x \sin(y)$, avec $z = x + \mathbf{i}\, y$ est aussi univoque.
- Posons alors $h(z) = \ln(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $z \neq 0$, c'est-à-dire $w = h(z)$

$$e^w = z.$$

  Nous posons

$$w = U(x, y) + \mathbf{i}\, V(x, y)$$

  avec $z = x + \mathbf{i}\, y$ et $e^w = z$. Nous avons alors

$$e^{U(x,y) + \mathbf{i}\, V(x,y)} = z = r\, e^{\mathbf{i}\,\theta}.$$

Par conséquent
$$e^{U(x,y)} = r$$
et
$$e^{\mathbf{i}V(x,y)} = e^{\mathbf{i}\theta}.$$
et donc
$$\ln(z) = \ln(r) + \mathbf{i}\,(\theta + 2\,k\,\pi), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Dans tout ce qui suit, Ω désignera un ouvert non vide du plan complexe $\mathbb{C}$ et on le supposera *connexe*, c'est-à-dire que deux points quelconques de Ω sont reliés par un arc de courbe complètement inclus dans Ω. (Lorsque le segment de droite entre deux points quelconques est inclus dans Ω, c'est que Ω est *convexe*.)

Exemples. Le plan complexe privé de l'origine, $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, est *connexe*, mais *pas convexe*. Le plan complexe privé de l'axe imaginaire pur, $\mathbb{C}\backslash(i\,\mathbb{R})$, n'est pas connexe. Il est constitué de deux *composantes connexes*, $\{\,z\,;\ \mathrm{Re}z > 0\,\}$ et $\{\,z\,;\ \mathrm{Re}z\ <, 0\,\}$, qui sont convexes.

Définition 1.3 *On dit que le domaine Ω est* simplement connexe *si son bord dans $\overline{\mathbb{C}}$ est connexe ; on pourrait dire aussi que le domaine est sans trou.*

On dit aussi que toute courbe fermée incluse dans Ω peut être continument déformée jusqu'à devenir un point tout en restant dans Ω.

Exemples. Le plan complexe privé de l'origine, $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, n'est *pas simplement connexe*. Le plan complexe privé d'une demi-droite est simplement connexe.

2 Fonctions holomorphes

Introduisons la première notion fondamentale concernant les fonctions de variable complexe.

Définition 2.1 *Une fonction $f\ :\ \Omega\ \to\ \mathbb{C}$ est dite* holomorphe *si, en chaque point z_0 de Ω, le taux d'accroissement*
$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$
admet une limite lorsque z tend vers z_0. Dans ce cas, on note $f'(z_0)$ cette limite. Lorsque $\Omega = \mathbb{C}$, la fonction est dite entière.

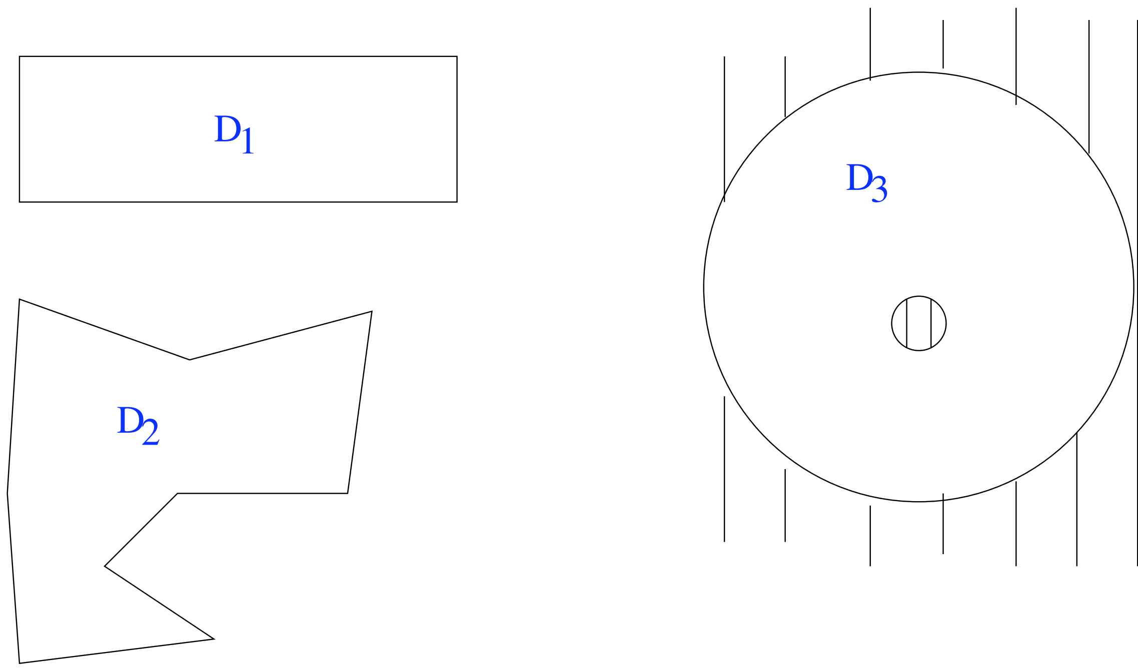


FIG. 3.1 – Exemple d'un ensemble simplement connexe.

Exemples : La fonction $f(z) = \text{Re}(z) = x$ est bien $\mathbb{R}$-différentiable (différentiable par rapport à $x = \text{Re}(z)$ et $y = \text{Im}(z)$) mais n'est pas holomorphe. En effet,

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\Delta x}{\Delta x + \mathbf{i}\Delta y}$$

– D'une part si l'on prend $\Delta z = \Delta y$, on a

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

– D'autre par le choix $\Delta z = \Delta y$ donne

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = 0.$$

Remarque 2.1 *Le fait que Ω soit ouvert assure, par définition, que pour tout z assez proche de $z_0 \in \Omega$, disons $|z - z_0| \leq \varepsilon$ pour fixer les idées, z appartient nécessairement à Ω (ce qui permet de considérer $f(z)$).*

Remarque 2.2 *Une fonction holomorphe est nécessairement continue.*

Remarque 2.3 *La définition de $f'(z_0)$ est analogue à la définition de la dérivée d'une fonction de variable réelle. Cependant, on verra que les fonctions holomorphes ont des propriétés beaucoup plus fortes que les fonctions dérivables de variable réelle.*

Exemples. Les fonctions polynômiales sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire entières. Leur dérivées se calculent comme les fonctions polynômiales de variable réelle :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \quad \Longrightarrow \quad f'(z) = \sum_{n=1}^{N} n\, a_n z^{n-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Une autre fonction entière, fondamentale, est la fonction *exponentielle*, qui est sa propre dérivée :

$$f(z) = \mathrm{e}^z \quad \Longrightarrow \quad f'(z) = \mathrm{e}^z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Proposition 2.1 *Si f et g sont deux fonctions holomorphes sur Ω alors, quels que soient λ et $\mu \in \mathbb{C}$,*

- *la fonction $\lambda f + \mu g$ est holomorphe sur Ω, de dérivée $\lambda f' + \mu g'$;*
- *la fonction $f\, g$ est aussi holomorphe, de dérivée $f'\, g + f\, g'$;*
- *si de plus g ne s'annule pas sur Ω, alors la fonction f/g est holomorphe sur Ω, de dérivée $(f'\, g - f\, g')/g^2$;*
- *si $f(\Omega) \subset \mathrm{U}$ et h est holomorphe sur U alors $h \circ f$ est holomorphe sur Ω, de dérivée $h' \circ f\; f'$.*

Exemples. Les fonctions rationnelles sont holomorphes sur tout domaine où leur dénominateur ne s'annule pas.

Ces premières observations pourraient laisser croire que tout marche comme avec les fonctions de variable réelle. Attention cependant, certaines fonctions d'allure très "raisonnable" ne sont *pas holomorphes*, par exemple,

$$z \mapsto \mathrm{Re} z, \quad \text{ou} \quad z \mapsto |z|^2,$$

et plus généralement toute fonction à valeurs réelles (non constante) n'est *pas holomorphe* ! Ceci découle de la caractérisation suivante.

Proposition 2.2 (Conditions de Cauchy-Riemann) *Soit f une fonction de $z = x + i\,y \in \Omega$. Pour tout (x, y) tel que $x + i\,y \in \Omega$, on note $u(x, y) = \mathrm{Re} f(x + i\,y)$ et $v(x, y) = \mathrm{Im} f(x + i\,y)$. Alors f est holomorphe si et seulement u et v sont différentiables comme fonctions de* deux variables réelles*, et vérifient de plus les relations suivantes, dites* équations de Cauchy-Riemann *:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Dans ce cas, on a

$$f'(x + i\,y) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = -i\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Démonstration. D'abord, supposons que f est une fonction holomorphe. En prenant $\Delta z = \Delta x + \mathbf{i}0$, nous avons en écrivant pour $z = x + \mathbf{i}y$

$$f(z) = u(x,y) + \mathbf{i}v(x,y),$$

et donc pour $z_0 \in \Omega$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)(z_0)$$

D'autre part en prenant t $\Delta z = 0 + \mathbf{i}\Delta y$,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(z_0 + \mathbf{i}\Delta y) - f(z_0)}{\mathbf{i}\Delta y} = \left(-\mathbf{i}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)(z_0).$$

Ainsi par égalité de deux nombres complexes, nous en déduisons les conditions de Cauchy-Riemann.

Ensuite, supposons que les conditions de Cauchy-Riemann sont satisfaites, on a alors puisque u et v (considérées comme des fonctions à deux variables) sont différentiables, on a

$$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \epsilon_1(dx,dy)\,dx + \epsilon_2(dx,dy)\,dy.$$

avec $\epsilon_1(dx,dy)$ et $\epsilon_2(dx,dy)$ qui tendent vers zéro lorsque (dx,dy) tend vers zéro et

$$dv(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy + \epsilon_3(dx,dy)\,dx + \epsilon_4(dx,dy)\,dy$$

avec $\epsilon_3(dx,dy)$ et $\epsilon_4(dx,dy)$ qui tendent vers zéro lorsque (dx,dy) tend vers zéro. Soit $df = du + \mathbf{i}dv$, on a alors

$$df(x,y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\,dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \mathbf{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\,dy + \epsilon(dx,dy).$$

À l'aide des conditions de Cauchy-Riemann, on a alors pour $dz = dx + \mathbf{i}dy$

$$f'(z_0) = \lim_{dz \to 0} \frac{df}{dz}(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + \mathbf{i}\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

$\square$

Définition 2.2 *On dit que la fonction u de deux variables réelles et à valeur réelle est* harmonique *si elle fonction vérifie*

$$\Delta u = 0\,, \quad \textit{où} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{(opérateur Laplacien)}\,.$$

Corollaire 2.1 *[Relation entre fonctions holomorphes et harmoniques] Si $f = u + i\,v$ est holomorphe, alors les fonctions de deux variables réelles et à valeurs réelles, u et v sont* harmoniques, *c'est-à-dire telles que*

$$\Delta u = 0\,, \quad \Delta v = 0\,, \quad \textit{où} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{(opérateur Laplacien)}\,.$$

Définition 2.3 *On dit que deux fonctions u et v à valeurs réelles sont* harmoniques conjuguées *si la fonction*

$$f \,:\, z = x + i\,y \mapsto u(x,y) + i\,v(x,y)$$

est holomorphe.

Un exemple concret de fonctions harmoniques conjuguées est celui du *potentiel* et de la *fonction de courant* d'un écoulement bidimensionnel incompressible et irrotationnel. En effet, le champ de vitesses **v** d'un écoulement plan de fluide parfait incompressible et irrotationnel vérifie par définition

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0\,, \quad \mathbf{rot}\,\mathbf{v} = 0\,,$$

c'est-à-dire si **v** a pour composantes (v_1, v_2) :

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0\,.$$

Si le domaine d'écoulement est *simplement connexe*, cela implique (on l'admet) l'existence de fonctions scalaires φ (potentiel) et ψ (fonction de courant) telles que

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\[2ex] -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Alors la fonction

$$f \,:\, z = x + i\,y \mapsto \varphi(x,y) + i\,\psi(x,y)$$

vérifie les équations de Cauchy-Riemann, elle est donc holomorphe, et l'on a

$$f'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \overline{\mathbf{v}}$$

en identifiant **v** au nombre complexe $v_1 + i\,v_2$. La fonction f est appelée *potentiel complexe* du champ **v**.

Remarque 2.4 *D'après les équations de Cauchy-Riemann, les* lignes de niveau[1] *de fonctions harmoniques conjuguées sont orthogonales les unes aux autres. En particulier, c'est le cas pour les lignes de courant (lignes de niveau de la fonction de courant) et les lignes équipotentielles (lignes de niveau du potentiel) de l'hydrodynamique !*

Remarque 2.5 *On peut reformuler la proposition 2.2 grâce à la notation concentrée*

$$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Une fonction f est holomorphe si et seulement si

$$\overline{\partial} f \equiv 0 .$$

Et dans ce cas, sa dérivée au sens complexe est $f' = \partial f$.

On voit ainsi très facilement que la fonction $z \mapsto \overline{z}$ *n'est pas holomorphe.*

3 Transformations conformes

Définition 3.1 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction différentiable au sens des fonctions de deux variables réelles, et non constante au voisinage d'un point (x_0, y_0). On dit que f préserve les angles au point (x_0, y_0) si quels que soient les arcs de courbes Γ_1 et Γ_2 passant par (x_0, y_0), les vecteurs tangents à ces courbes au point (x_0, y_0) font le même* angle orienté *que les vecteurs tangents aux courbes $f(\Gamma_1)$ et $f(\Gamma_2)$ au point $f(x_0, y_0)$.*

Autrement dit, si Γ_1 et Γ_2 sont paramétrées respectivement par $t \mapsto \gamma_1(t)$ et $t \mapsto \gamma_2(t)$, avec $\gamma_{1,2}(0) = (x_0, y_0)$, les vecteurs $\gamma_1'(0)$ et $\gamma_2'(0)$ doivent faire le même angle que $\mathrm{d}f(x_0, y_0) \cdot \gamma_1'(0)$ et $\mathrm{d}f(x_0, y_0) \cdot \gamma_2'(0)$. Ceci revient donc à dire que l'*application linéaire* $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$ préserve les angles. De ce point de vue, on montre facilement que c'est le cas pour les fonctions holomorphes à dérivée non nulle. On identifie bien sûr $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$.

Proposition 3.1 *Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ et telle que $f'(z_0) \neq 0$. Alors f préserve les angles au point z_0.*

Démonstration. Il suffit de faire le lien entre $f'(x_0+iy_0)$ et $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$. Comme on l'a vu tout au début du chapitre, si $u = \mathrm{Re} f$ et $v = \mathrm{Im} f$, $f'(x_0+iy_0)$ est le nombre complexe

$$f'(x_0 + i\,y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\,i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) .$$

[1]Une ligne de niveau d'une fonction $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un ensemble de la forme $L_a = \{ (x, y) \,;\, u(x, y) = a \}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

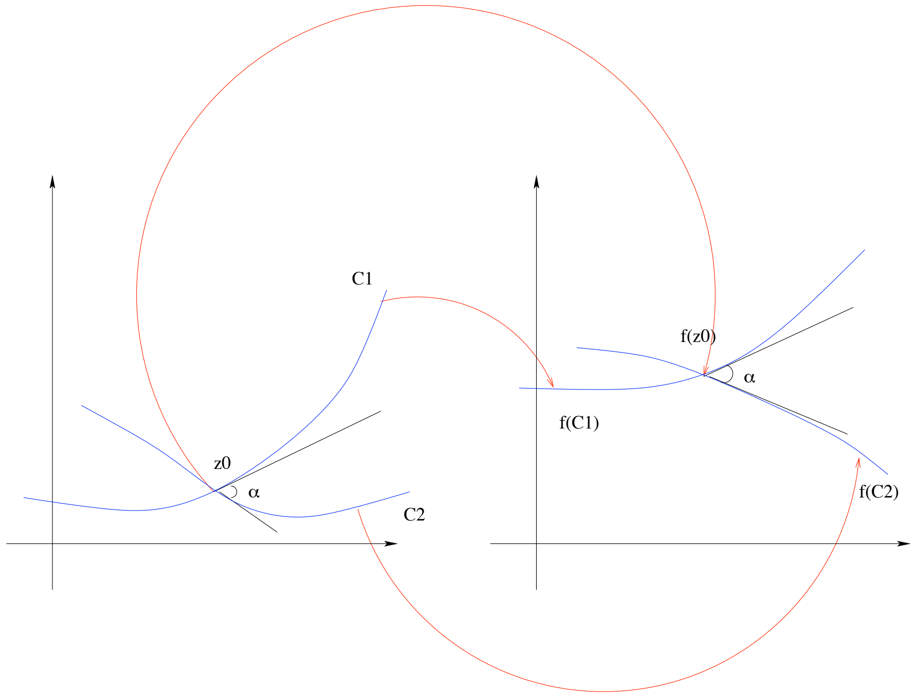


FIG. 3.2 – Exemple d'une transformation conforme.

Par ailleurs, la différentielle $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$ est définie comme l'application linéaire de matrice, appelée *Jacobienne*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} .$$

Cette application linéaire n'est donc en fait rien d'autre que la multiplication par $f'(x_0 + i\,y_0)$. Géométriquement, la multiplication par un nombre complexe non nul correspond à une *similitude*, c'est-à-dire à la composée d'une homothétie et d'une rotation, et c'est donc une transformation qui préserve les angles. Par conséquent, puisque $f'(x_0 + i\,y_0) \neq 0$ par hypothèse[2] $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$ préserve effectivement les angles. □

Définition 3.2 *Une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ différentiable et qui préserve les angles en tout point de l'ouvert, supposé connexe, Ω est appelée* transformation conforme. *L'ensemble image $f(\Omega)$ est appelé* représentation conforme *de l'ouvert Ω.*

Une conséquence immédiate de la proposition 3.1 est le

Corollaire 3.1 *Toute fonction f holomorphe sur Ω dont la dérivée ne s'annule pas est une transformation conforme.*

[2] Observer que $f'(x_0 + i\,y_0) \neq 0$ équivaut à dét $\mathrm{d}f(x_0, y_0) \neq 0$!

Si f est une telle fonction, les ouverts Ω et $f(\Omega)$ sont dits conformes l'un à l'autre. Attention, il ne faut pas pour autant croire qu'ils se “ressemblent”. Il existe par exemple une grande variété d'ouverts conformes à un demi-plan, par exemple les disques, les demi-disques, les secteurs angulaires infinis, les secteurs circulaires, les bandes infinies ou semi-infinies, les lunes, les polygones (plus précisément leur intérieur), etc !

Interprétation Les fonctions holomorphes sont les seules fonctions complexes qui conservent les angles entre les courbes, en tout point d'intersection où leurs dérivées sont non nulles.

4 Intégration le long de chemins dans $\mathbb{C}$

Définition 4.1 *Une* courbe *est une application de classe $\mathcal{C}^1$, γ d'un intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. On note Γ la graphe paramétré par la courbe $\gamma : t \in [a, b] \to (\gamma_x(t)), \gamma_y(t)$ qui définissent les coordonnées du pont courant décrivant Γ.*

Définition 4.2 *Un* chemin *dans $\mathbb{C}$ est une courbes formée d'arcs simples continûment différentiables, tels que pour deux arcs simples consécutifs Γ_{n-1} et Γ_n l'extrémité de Γ_{n-1} coïncide avec l'origine de Γ_n. Un tel chemin est appelé réunion de courbes Γ_i et noté $\cup_{i=1}^N \Gamma_i$.*

Définition 4.3 *On appelle* contour *ou* lacet *un chemin fermé c'est-à-dire que le paramétrage vérifie*

$$\gamma(a) = \gamma(b).$$

Soit Γ un arc de courbe dans $\mathbb{C}$, défini comme Cette courbe est dite *orientée* de $A = \gamma(a)$ vers $B = \gamma(b)$. On représente souvent cette orientation par une flèche. Si f est une fonction continue sur un ouvert contenant Γ, on définit

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Cette définition ne dépend pas du choix du paramétrage, c'est-à-dire que si φ est un difféomorphisme de $[\alpha, \beta]$ sur $[a, b]$, alors $\gamma \circ \varphi$ est un autre paramétrage de Γ, et on a bien

$$\int_\alpha^\beta f(\gamma\circ\varphi(\tau))\,(\gamma\circ\varphi)'(\tau)\,\mathrm{d}\tau \;=\; \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

De plus, si Γ^* désigne l'arc opposé, c'est-à-dire orienté de A vers B, il admet par exemple comme paramétrage

$$\begin{array}{rccl} \gamma^* : & [a,b] & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \gamma^*(t) \;=\; \gamma(a+b-t)\,, \end{array}$$

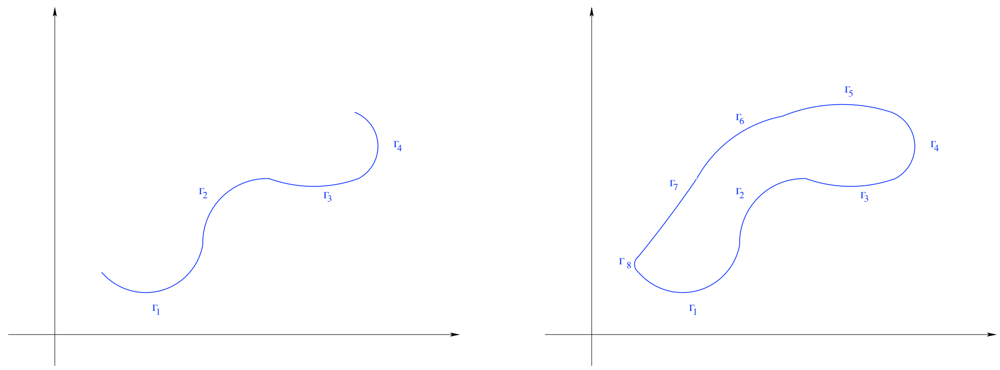


FIG. 3.3 – Exemples de chemin et de contour.

et on a évidemment

$$\int_{\Gamma^*} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; -\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Lorsque $\gamma(a) = \gamma(b)$ on dit que l'arc est *fermé*, et dans ce cas on ajoute parfois un $\circ$ sur le signe $\int$:

$$\oint_{\Gamma} f \;=\; \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Si f est une fonction continue sur un ouvert contenant un chemin $\Gamma = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_k$, on définit simplement

$$\int_{\Gamma} f \;=\; \int_{\Gamma_1} f \;+\;\ldots\;+\; \int_{\Gamma_k} f\,.$$

Exemples. Lorsque Γ est un arc de cercle de rayon r, il admet un paramétrage de la forme

$$\gamma(t) \;=\; z_0 \;+\; r\,\mathrm{e}^{i\,t}\,, \quad t \in [a,b],$$

avec $|b-a| \;\leq\; 2\,\pi$, et pour toute fonction f on a

$$\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; i\,r \int_a^b f(z_0 \;+\; r\,\mathrm{e}^{i\,t})\,\mathrm{e}^{i\,t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Remarque 4.1 *La longueur d'un arc Γ, paramétré par γ sur $[a,b]$ étant définie par*

$$L \;=\; \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t\,,$$

on a pour toute fonction continue sur Γ

$$\left|\int_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \;\leq\; L\,\max_{z\in\Gamma}|f(z)|\,.$$

4.1 Théorème de Cauchy

Un premier résultat, facile à démontrer, est le suivant.

Théorème 4.1 (Cauchy n^o 1) *Si f est une fonction continue sur un ouvert Ω contenant un chemin* fermé Γ et *si f est la* dérivée d'une fonction holomorphe F *dans Ω, alors*

$$\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0\,.$$

Démonstration. Pour simplifier on suppose que Γ est un *arc* fermé, admettant un paramétrage γ sur un intervalle $[a,b]$ avec $\gamma(a) = \gamma(b)$. Si $f = F'$ (dérivée au sens complexe), , alors $(f \circ \gamma) \times \gamma'$ est la dérivée, au sens des fonctions de la variable rélle $t \in [a,b]$, de $F \circ \gamma$. Par suite,

$$\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; [\,F(\gamma(t))\,]_a^b \;=\; F(\gamma(b)) \;-\; F(\gamma(a)) \;=\; 0$$

puisque Γ est fermé ($\gamma(b) = \gamma(a)$). □

Ce théorème s'applique en particulier aux fonctions polynômiales.

Corollaire 4.1 *Pour tout entier n et tout chemin fermé Γ,*

$$\oint_\Gamma z^n\,\mathrm{d}z \;=\; 0\,.$$

On a même :

Corollaire 4.2 *Pour tout entier $n \neq 1$ et tout chemin fermé* Γ ne contenant pas 0*,*

$$\oint_\Gamma \frac{1}{z^n}\,\mathrm{d}z \;=\; 0\,.$$

Attention, ce résultat est faux pour $n = 1$. On verra plus loin ce qu'il advient de $\oint_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z}$.

Une version plus subtile du théorème de Cauchy est la suivante :

Théorème 4.2 (Cauchy n^o 2) *Supposons que Ω soit un ouvert* convexe*, Γ un* chemin fermé *dans Ω, et f une fonction continue sur Ω et holomorphe (sauf peut-être en un point p), alors*

$$\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0\,.$$

Idées de la démonstration. Il s'agit de construire une fonction holomorphe F dont f soit la dérivée (on appliquera alors le théorème 4.1). Par analogie avec les fonctions de variable réelle, cette fonction F sera de la forme

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

où a est un point quelconque de Ω et $[a, z]$ désigne le segment de droite compris entre a et z, orienté de a vers z. On remarque de suite l'importance de la convexité de Ω dans cette approche, puisqu'elle assure l'inclusion $[a, z] \subset \Omega$ pour tout $z \in \Omega$. Tout le problème est de montrer que F répond à nos attentes, c'est-à-dire qu'elle est holomorphe et de dérivée f. Attention, c'est loin d'être évident !

En fait, cela demande de connaître le théorème que l'on cherche à démontrer dans le cas particulier où Γ est le bord d'un *triangle*. La démonstration de ce résultat utilise astucieusement le corollaire 4.1. Nous l'admettrons.

La fin de la démonstration fonctionne alors comme pour les fonctions de variable réelle. Soient en effet z et z_0 dans Ω, et Δ le triangle de sommets a, z et z_0. De l'égalité (admise)

$$\oint_{\partial\Delta} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0\,,$$

on déduit que, par définition de F,

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

d'où

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} (\, f(\zeta) - f(z_0)\,)\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

Comme f est continue, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $|\zeta - z_0| \leq \eta$, alors $|f(\zeta) - f(z_0)| \leq \varepsilon$. Par suite, en utilisant la remarque 4.1 (dans le cas très simple du segment de droite $[z_0, z]$!), on obtient

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| \leq \varepsilon$$

pour $|z - z_0| \leq \eta$. □

Enfin, signalons la version définitive du théorème de Cauchy, que nous admettrons.

Théorème 4.3 (Cauchy n^o 3) *Si Ω est un ouvert* simplement connexe*, si Γ est un* chemin fermé *dans Ω, et si f est une fonction* holomorphe *dans Ω, alors*

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,.$$

L'hypothèse de *simple connexité* est fondamentale dans ce résultat. On peut même énoncer une sorte de réciproque : si $\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ pour toute fonction holomorphe dans Ω et pour tout chemin fermé $\Gamma \subset \Omega$, alors Ω est simplement connexe. D'autre part, une conséquence importante du théorème de Cauchy est la :

Proposition 4.1 *Toute fonction* holomorphe f *sur un ouvert* Ω *connexe et* simplement connexe *admet une "primitive" au sens des fonctions de variable complexe, c'est-à-dire qu'il existe une fonction* F *holomorphe dont la dérivée est* f.

Démonstration. On l'a clairement vu dans les idées de démonstration du théorème 4.2 concernant les ouverts convexes. Si Ω est convexe, il suffit en effet de choisir un point $z_0 \in \Omega$ et définir

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

où $[z_0, z]$ est le segment de droite orienté entre z_0 et z. Si l'on suppose seulement Ω simplement connexe, c'est un peu plus subtil. Fixons aussi $z_0 \in \Omega$. Par connexité de Ω, on sait que pour tout $z \in \Omega$ il existe un chemin Γ_z reliant z_0 à z. De plus, d'après le théorème de Cauchy,

$$\int_{\Gamma_z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

ne dépend pas du chemin choisi ! En effet, si $\widetilde{\Gamma}_z$ est un autre chemin, alors $\Gamma_z \cup \widetilde{\Gamma}_z^*$, où $\widetilde{\Gamma}_z^*$ est le chemin opposé à $\widetilde{\Gamma}_z$, est un chemin fermé inclus dans Ω, donc

$$0 = \int_{\Gamma_z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + \int_{\widetilde{\Gamma}_z^*} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\Gamma_z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{\widetilde{\Gamma}_z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

Donc on peut définir l'application

$$z \mapsto F(z) := \int_{\Gamma_z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

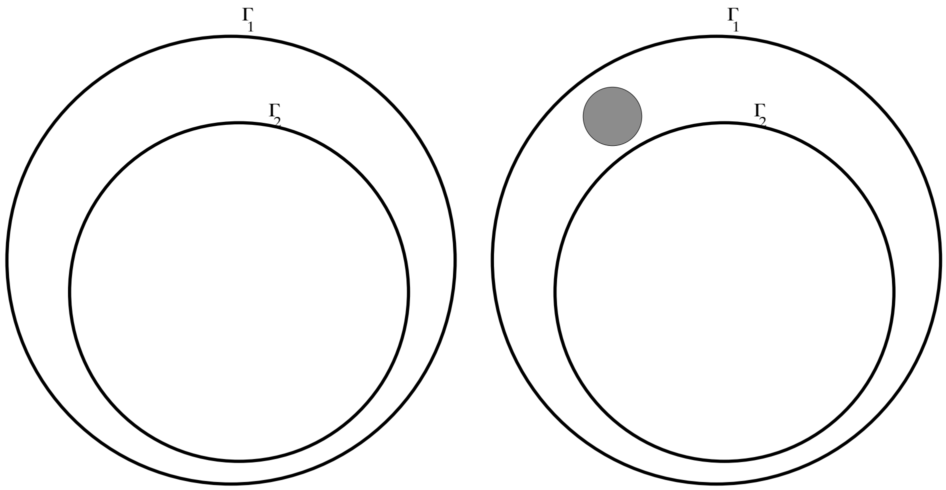
Comme Ω est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $D(z_0; r) \subset \Omega$. En appliquant une nouvelle fois le théorème de Cauchy, au chemin fermé $\Gamma_w \cup [w, z] \cup \Gamma_z^*$, on voit que

$$F(z) - F(w) = \int_{[w,z]} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

pour tous z et $w \in D(z_0; r)$. On montre alors comme dans le théorème 4.2 que $F' = f$. □

On aura besoin ici d'un résultat dont le théorème de Cauchy n^o 3 peut être vu comme un cas particulier.

Donnons d'abord la



(1) (2)

FIG. 3.4 – Exemple de chemins homotope (1) et non homotope (2).

Définition 4.4 *Deux chemins fermés Γ_0 et Γ_1 dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ sont dits* homotopes *s'il existe une application ϕ continue sur $[a,b] \times [0,1]$ et à valeurs dans Ω telle que*

$$\Gamma_0 \,=\, \{\, z \,=\, \phi(t,0)\,;\; t \in [a,b]\,\}\,,$$

$$\Gamma_1 \,=\, \{\, z \,=\, \phi(t,1)\,;\; t \in [a,b]\,\}\,,$$

et

$$\phi(a,s) \,=\, \phi(b,s) \;\; \forall s \in [0,1]\,.$$

Noter que cette définition permet de caractériser précisément les ouverts simplements connexes : ce sont ceux pour lesquel tout chemin fermé est homotope à un singleton.

Théorème 4.4 *Si f est une fonction holomorphe dans un ouvert connexe non vide Ω et si Γ_0 et Γ_1 sont des chemins fermés homotopes dans Ω, alors*

$$\oint_{\Gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z \,=\, \oint_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Démonstration.

On crée le circuit $\Gamma_0 \cup \Gamma_1^*$ sur lequel l'intégrale de $f(z)$ est nulle, d'où

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz + \int_{\Gamma_1^*} f(z)dz = 0$$

et donc

$$\int_{\Gamma_0} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz.$$

□

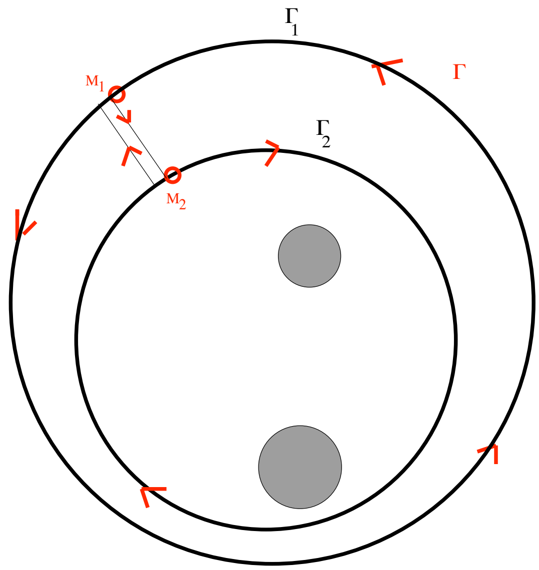


FIG. 3.5 – Exemple de chemin reliant deux circuits homotopes.

4.2 Réciproque du Théorème de Cauchy.

Voyons maintenant dans quel cas nous puvons formuler une réciproque du Théorème de Cauchy.

Outre les équations de Cauchy-Riemann, il existe un critère parfois plus commode pour montrer qu'une fonction est holomorphe.

Théorème 4.5 (de Morera) *Si une fonction continue sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est telle que*

$$\oint_{\partial\Delta} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

pour tout triangle $\Delta \subset \Omega$, alors f est holomorphe dans Ω.

Démonstration. Les ingrédients de la démonstration ont déjà été vus. Soit D un disque ouvert inclus dans Ω. En reprenant la démonstration du théorème 4.2 (voir aussi la proposition 4.1), on voit que l'hypothèse assure l'existence d'une fonction F holomorphe dans D telle que $F' = f$. Donc f est aussi holomorphe dans D (puisqu'une fonction holomorphe est infiniment dérivable). □

Comme conséquence, on peut donner une version simplifiée du corollaire A.3 de l'appendice concernant les fonctions holomorphes définies par des intégrales.

Théorème 4.6 *Soit f une fonction de $(z,t) \in \Omega \times I$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que $z \mapsto f(z,t)$ est* holomorphe *et $t \mapsto f(z,t)$ est* *intégrable sur I pour tout $z \in \Omega$. On suppose de plus que pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe une fonction g_K intégrable sur I telle que*

$$|f(z,t)| \leq g_K(t) \quad \forall z \in K\,.$$

Alors l'application

$$F\,:\, z \mapsto \int_I f(z,t)\,\mathrm{d}t$$

est holomorphe dans Ω.

Démonstration. En effet, soit Δ un triangle inclus dans Ω, et soit $g = g_\Delta$ une fonction intégrable sur I et majorant $|f|$ sur $\Delta \times I$. Alors

$$\oint_{\partial\Delta} F(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\partial\Delta} \int_I f(z,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z\,.$$

Or sur chaque côté $[A,B]$ du triangle on a

$$\begin{aligned} \int_{[A,B]} F(z)\,\mathrm{d}z &= (B-A) \int_0^1 F(A + s\,(B-A))\,\mathrm{d}s \\ &= (B-A) \int_0^1 \int_I f(A + s\,(B-A),t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

et

$$\int_0^1 \int_I |f(A + s\,(B-A),t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \leq \int_I g(t)\,\mathrm{d}t < +\infty\,.$$

Donc on peut inverser l'ordre d'intégration grâce au théorème de Fubini. Par suite,

$$\oint_{\partial\Delta} F(z)\,\mathrm{d}z = \int_I \Big(\oint_{\partial\Delta} f(z,t)\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}t \;= 0$$

en appliquant le théorème de Cauchy (version n^o 2) à $f(\cdot,t)$ dans un ouvert convexe contenant Δ et inclus dans Ω. Ceci montre, grâce au théorème de Morera, que F est holomorphe dans Ω. □

5 Fonctions analytiques

Voici la seconde notion fondamentale, dont on verra qu'elle coïncide en fait avec la première.

Définition 5.1 *On dit qu'une fonction f est* analytique *dans Ω si elle développable en série entière en tout point de Ω, c'est-à-dire si pour tout $z_0 \in \Omega$ il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et un nombre $r > 0$ tels que, pour tout z satisfaisant $|z - z_0| \leq r$,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z-z_0)^n\,.$$

Avant d'aller plus loin, rappelons la

Définition 5.2 *Pour une série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ *on définit le* rayon de convergence *comme le nombre* $R \in [0,+\infty]$ *tel que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\, r^n \,<\, +\infty \quad \forall r \,<\, R$$

et la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z-z_0)^n \quad \textit{diverge pour } \ |z-z_0| \,>\, R\,.$$

On appelle disque de convergence le disque de centre z_0 *et de rayon* R*.*

On trouve en général le rayon de convergence grâce à la

Proposition 5.1 (Critère de Cauchy) *Le rayon de convergence d'une série entière est donnée par*

$$\frac{1}{R} \,=\, \limsup_{n\to+\infty}\, |a_n|^{1/n}\,.$$

Remarque 5.1 *La somme d'une série entière est développable en série entière en tout point de son disque de convergence. En effet, considérons la série entière* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z-z_0)^n$*. Soit* R *son rayon de convergence et* z_1 *appartenant au disque de convergence. Alors*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z-z_0)^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z-z_1+z_1-z_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p\,(z-z_1)^p\,(z_1-z_0)^{n-p} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} (z-z_1)^p \sum_{n=p}^{+\infty} a_n\,\mathrm{C}_n^p\,(z_1-z_0)^{n-p}
\end{aligned}$$

pour $|z-z_1| \,<\, R \,-\, |z_1-z_0|$.

Exemples. La fonction exponentielle est entière, de même que les fonctions trigonométriques et hyperboliques définies pour tout $z \in \mathbb{C}$ par

$$\sin z \,=\, \frac{\mathrm{e}^{i\,z} \,-\, \mathrm{e}^{-i\,z}}{2\,i}\,, \quad \cos z \,=\, \frac{\mathrm{e}^{i\,z} \,+\, \mathrm{e}^{-i\,z}}{2}\,,$$

$$\mathrm{sh} z \,=\, \frac{\mathrm{e}^{z} \,-\, \mathrm{e}^{-z}}{2}\,, \quad \mathrm{ch} z \,=\, \frac{\mathrm{e}^{z} \,+\, \mathrm{e}^{-z}}{2}\,.$$

(Écrire à titre d'exercice les développements en séries entières de ces fonctions au point $z_0 \,=\, 0$.)

Théorème 5.1 *Toute fonction analytique est holomorphe. De plus, on a*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\;(z-z_0)^n \quad \forall\, z\,;\; |z-z_0| \,\le\, r \;\Longrightarrow\; f'(z) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} n\; a_n\;(z-z_0)^{n-1}\,.$$

Démonstration. (Théorème 5.1) Supposons que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\;(z-z_0)^n$ ait pour rayon de convergence R. Alors d'après le critère de Cauchy, la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} n\; a_n\;(z-z_0)^{n-1}$ a le même rayon de convergence. Notons provisoirement

$$g(z) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} n\; a_n\;(z-z_0)^{n-1}\,.$$

Pour simplifier on suppose $z_0 \;=\; 0$. Soit w tel que $|w| \;<\; r \;<\; R$. On veut montrer que

$$\lim_{z\to w} \frac{f(z)\;-\;f(w)}{z-w} \;=\; g(w)\,.$$

Or

$$\frac{z^n\;-\;w^n}{z-w} \;-\; n\,w^{n-1} \;=\; (z\;-\;w)\;\sum_{k=1}^{n-1}\; k\;w^{k-1}\;z^{n-k-1}$$

si $n \ge 2$. D'où

$$\Big|\,\frac{f(z)\;-\;f(w)}{z-w} \;-\; g(w)\,\Big| \;\le\; |z-w|\;\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\;\frac{n(n-1)}{2}\;r^{n-2}$$

si $|z| \le r$. D'après le critère de Cauchy, cette dernière série converge, d'où le résultat. □

Corollaire 5.1 *Toute fonction analytique f est infiniment dérivable au sens des fonctions de variable complexe. Son développement en série entière en un point z_0 est donné par sa série de Taylor*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n\,!}\;(z-z_0)^n\,.$$

Démonstration. Montrons par récurrence sur n que toute fonction analytique f est au moins n fois dérivable au sens complexe, et que

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\;(z{-}z_0)^n \quad \forall\, z\,;\; |z{-}z_0| \,\le\, r \;\Longrightarrow\; f^{(n)}(z) \;=\; \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{p\,!}{(p-n)\,!}\;a_p\;(z{-}z_0)^{p-n}\,.$$

D'après le théorème 5.1, ceci est vrai pour $n \;=\; 1$. Supposons cette propriété vraie pour $n-1$. Alors $f^{(n-1)}$ est analytique, puisque somme d'une série entière au point z_0, donc on peut lui appliquer le théorème 5.1. On en déduit la propriété à l'ordre n. De plus, la formule pour $f^{(n)}(z)$ montre que $f^{(n)}(z_0) \;=\; n\,!\;a_n$. □

Notre objectif est maintenant de montrer que toute fonction holomorphe est analytique, et donc infiniment dérivable ! Pour cela nous allons utiliser des intégrales curvilignes dans le plan complexe $\mathbb{C}$.

6 Méthodes des résidus

6.1 Notion d'indice

Nous allons introduire un ingrédient fondamental de la théorie des résidus, qui avant tout va nous servir à démontrer qu'une fonction holomorphe est analytique.

Théorème 6.1 *Soit Γ un chemin fermé dans le plan complexe et soit $\Omega = \mathbb{C}\backslash\Gamma$ (c'est un ouvert car Γ est compact donc fermé). Pour tout $z \in \Omega$, on définit*

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) := \frac{1}{2\,i\,\pi} \oint_\Gamma \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z}.$$

Alors $\mathrm{Ind}_\Gamma(z)$ est un entier relatif. De plus, la fonction Ind_Γ est constante sur chaque composante connexe de Ω, et en particulier elle est nulle sur la composante connexe non bornée de Ω.

Démonstration. Supposons là encore pour simplifier que Γ est un arc de courbe, paramétré par γ sur $[a, b]$. Soit $z \in \Omega$. On a par définition

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\,i\,\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\,\mathrm{d}t.$$

Notons

$$\varphi(s) := \exp\Big(\int_a^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\,\mathrm{d}t \Big).$$

Le nombre $\mathrm{Ind}_\Gamma(z)$ est un entier si et seulement si $\varphi(b) = 1$. Par dérivation, on a

$$\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}.$$

Donc la fonction $\varphi/(\gamma - z)$ a sa dérivée nulle. Comme $\varphi(a) = 1$, on en déduit

$$\varphi(s) = \frac{\gamma(t) - z}{\gamma(a) - z}.$$

Or, puisque Γ est fermé, $\gamma(b) = \gamma(a)$, d'où $\varphi(b) = 1$. Le fait que Ind_Γ soit constante sur chaque composante connexe de Ω découle de sa continuité (ce qui ne pose pas de problème car on intègre sur un compact), et du fait qu'elle ne prend que des valeurs entières. On remarque que Ω a bien une seule composante connexe non bornée (contenant $\mathbb{C}\backslash D(0, r)$ si $\Gamma \subset D(0, r)$). Comme $\lim_{|z|\to+\infty} \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$, on en déduit que Ind_Γ est identiquement nulle sur cette composante non bornée. □

Définition 6.1 *Pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$, on appelle* indice *de z par rapport à Γ le nombre* $\mathrm{Ind}_\Gamma(z)$.

FIG. 3.6 – Exemple de valeurs de l'indice pour un chemin compliqué.

Exemple. Si Γ est le cercle de centre z_0 et de rayon r, orienté dans le sens trigonométrique, on a

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 1 \quad \text{si } |z - z_0| < r \quad \text{et} \quad \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0 \quad \text{si } |z - z_0| > r .$$

En effet, pour $|z - z_0| < r$,

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \mathrm{Ind}_\Gamma(z_0) = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r\,\mathrm{e}^{it}}\, \mathrm{e}^{it}\, \mathrm{d}t = 1 .$$

On voit en particulier que

$$\oint_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 1$$

pour tout cercle orienté dans le sens trigonométrique et contenant 0, à la différence des intégrales $\oint_\Gamma z^n \,\mathrm{d}z$, qui sont nulles pour tout $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$! Maintenant, si Γ est le chemin constitué de N tours sur le cercle précédent, il est clair que

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = N \quad \text{si } |z - z_0| < r .$$

Voir un autre exemple sur la figure 3.6.

6.2 Formule de Cauchy

Connaissant l'indice d'un chemin et le théorème de Cauchy, on en déduit facilement une formule essentielle.

Théorème 6.2 (Formule de Cauchy) *Si Ω est un ouvert* simplement connexe*, si Γ est un* chemin fermé *dans Ω, et si f est une fonction* holomorphe *dans Ω, alors pour tout $z \notin \Gamma$,*

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta = f(z)\, \mathrm{Ind}_\Gamma(z) .$$

Démonstration. Donnons la preuve dans le cas élémentaire où Ω est convexe, si bien que l'on peut appliquer la version n^o 2 du théorème de Cauchy. La fonction

$$g : \zeta \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{si } \zeta \neq z , \\[2ex] f'(z) & \text{si } \zeta = z , \end{cases}$$

est en effet continue sur Ω, et holomorphe dans $\Omega\backslash\{z\}$. Donc, d'après le théorème 4.2,

$$\oint g(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = 0 .$$

En substituant g par sa valeur en fonction de f et en utilisant la définition de l'indice on trouve la formule annoncée. □

Corollaire 6.1 *Pour tout ouvert Ω, toute fonction holomorphe dans Ω est analytique dans Ω.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$ et $r_0 > 0$ tel que $D(z_0, r_0)$, le disque de centre z_0 et de rayon r_0 soit inclus dans Ω. D'après le théorème 6.2, appliqué dans l'ouvert *convexe* $D(z_0, r_0)$ au chemin fermé Γ constitué du cercle centré z_0 de rayon $r < r_0$, on a

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\,i\,\pi}\,\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

quel que soit $z \in D(z_0, r)$. Or,

$$\frac{1}{\zeta\,-\,z} \;=\; \frac{1}{\zeta\,-\,z_0}\,\frac{1}{1\,-\,\frac{z\,-\,z_0}{\zeta\,-\,z_0}} \;=\; \frac{1}{\zeta\,-\,z_0}\,\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{z\,-\,z_0}{\zeta\,-\,z_0}\Big)^n\,,$$

et cette série est absolument convergente, uniformément sur Γ, pour tout $z \in D(z_0, r)$. D'où

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z\,-\,z_0)^n \quad \text{avec} \quad a_n \;:=\; \frac{1}{2\,i\,\pi}\,\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta\,-\,z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

□

Remarque 6.1 *Le calcul ci-dessus et l'expression des coefficients a_n à l'aide des dérivées de f (vue au corollaire 5.1) montre en particulier une extension de la formule de Cauchy aux dérivées de f :*

$$f^{(n)}(z_0) \;=\; \frac{n\,!}{2\,i\,\pi}\,\oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta\,-\,z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \qquad \textbf{(formule de Cauchy d'ordre } n\textbf{)}\,.$$

L'analyticité des fonctions holomorphes est une propriété très forte, qui a de nombreuses conséquences. La première d'entre elles est que, d'après le corollaire 5.1, toute fonction holomorphe est infiniment dérivable.

Corollaire 6.2 *Toute fonction holomorphe est infiniment dérivable.*

Nous allons voir d'autres propriétés importantes des fonctions holomorphes, notamment à propos de leurs “singularités”.

7 Zéros et singularités des fonctions holomorphes

Théorème 7.1 *Soit Ω un ouvert connexe non vide, et f une fonction holomorphe dans Ω, non identiquement nulle. Alors l'ensemble des zéros de f, c'est-à-dire*

$$Z_f := \{z \in \Omega\,;\ f(z) = 0\}$$

intersecte chaque sous-ensemble compact de Ω en au plus un nombre fini de points (on dit qu'il est au plus dénombrable*). De plus, pour tout zéro z_0 de f, il existe un unique entier positif m et une fonction g holomorphe dans Ω, ne s'annulant pas en z_0, telle que*

$$f(z) = (z - z_0)^m\, g(z) \quad \forall z \in \Omega\,.$$

Démonstration. Le premier point découle d'un argument de connexité que nous omettrons. Soit $z_0 \in Z_f$. D'après le corollaire 6.1, il existe $r > 0$ tel que, pour tout $z \in D(z_0; r)$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\,(z - z_0)^n\,.$$

Les coefficients a_n ne peuvent pas être tous nuls, sinon Z_f contiendrait tout le disque $D(z_0; r)$ et cela contredirait le premier point. Soit donc m le plus petit entier tel que $a_m \neq 0$. Alors on a

$$f(z) = (z - z_0)^m\, g(z) \qquad g(z) := \sum_{p=0}^{+\infty} a_p\,(z - z_0)^p\,.$$

La fonction g est holomorphe puisque somme d'une série entière, et $g(z_0) = c_m \neq 0$ par définition de m. □

Définition 7.1 *On appelle l'entier m du théorème 7.1 l'*ordre *du zéro z_0.*

Une conséquence immédiate mais très importante de la première partie du théorème est le

Corollaire 7.1 *Si deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe non vide Ω coïncident sur un ensemble infini non dénombrable (par exemple un segment de droite), elles sont* égales.

Démonstration. Appliquer le théorème 7.1 à leur différence. □

Nous reviendrons plus loin sur le moyen de compter le nombre de zéros d'une fonction holomorphe dans un compact donné. Pour cela nos avons besoin de propriétés des fonctions holomorphes sauf en un point.

Définition 7.2 *Si une fonction f est holomorphe dans $\Omega\backslash\{z_0\}$, où Ω est un ouvert et $z_0 \in \Omega$, on dit que f a une* singularité isolée *au point z_0. Si on peut en fait prolonger f à z_0 de sorte que son prolongement soit holomorphe, on dit qu'elle a une* singularité artificielle *en z_0.*

Proposition 7.1 *Si une fonction f est holomorphe dans $\Omega\backslash\{z_0\}$ et bornée dans un* disque épointé *$D(z_0; r)\backslash\{z_0\}$, alors elle a une singularité artificielle en z_0.*

Démonstration. La fonction

$$h \,:\, z \,\mapsto\, h(z) \,=\, (z - z_0)^2 \, f(z)$$

est holomorphe dans $\Omega\backslash\{z_0\}$, et on montre facilement qu'elle l'est aussi en z_0, avec $h'(z_0) = 0$. D'après le corollaire 6.1, elle est donc développable en série entière au point z_0. Et comme $h(z_0) = h'(z_0) = 0$, les deux premiers coefficients de la série entière sont nuls, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$h(z) \,=\, \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \, (z \,-\, z_0)^n$$

pour tout $z \in D(z_0; r')$, $0 < r' < r$. On en déduit que

$$f(z) \,=\, \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} \, (z \,-\, z_0)^n$$

pour tout $z \in D(z_0; r')\backslash\{z_0\}$. En prolongeant f par $f(z_0) = a_2$, on voit que f est analytique dans $D(z_0; r')$, et en particulier holomorphe au point z_0.

□

Théorème 7.2 *Si une fonction f est holomorphe dans $\Omega\backslash\{z_0\}$, où Ω est un ouvert et $z_0 \in \Omega$, trois cas seulement peuvent se produire :*

i). soit f a une singularité artificielle en z_0,

ii). soit il existe un entier p et des nombres complexes $c_1, \ldots, c_p$ tels que

$$z \,\mapsto\, f(z) \,-\, \sum_{k=1}^{p} \frac{c_k}{(z \,-\, z_0)^k}$$

a une singularité artificielle en z_0,

iii). soit f a ce qu'on appelle une singularité essentielle *en z_0, ce qui se traduit par le fait que, pour tout r tel que $D(z_0; r) \subset \Omega$, l'image par f du disque épointé $D(z_0; r)\backslash\{z_0\}$ est* dense *dans $\mathbb{C}$ (quel que soit $w \in \mathbb{C}$, il existe une suite $z_n \in D(z_0; r)\backslash\{z_0\}$ telle que $f(z_n)$ tend vers w lorsque $n \to +\infty$).*

Démonstration. Nous admettrons ce résultat, bien qu'il ne soit pas très difficile à démontrer, en utilisant le théorème 7.1 et la proposition 7.1. □

Nous reviendrons plus loin sur le cas *iii)*, dont un exemple est fourni par la fonction

$$z \mapsto \mathrm{e}^{1/z},$$

qui a une singularité essentielle en $z = 0$. Dans l'immédiat, nous allons nous intéresser plus particulièrement au cas *ii)*.

Définition 7.3 *Si une fonction f est holomorphe dans $\Omega \backslash \{z_0\}$, et si la fonction*

$$z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^{p} \frac{c_k}{(z - z_0)^k}$$

a une singularité artificielle en z_0, on dit que z_0 est un pôle *de f et, si $c_p \neq 0$, l'entier p est appelé* ordre *de ce pôle. Le coefficient c_1 joue un rôle particulier : il est appelé* résidu *de f au point z_0, que l'on notera dans la suite* Rés $(f; z_0)$. *La fonction*

$$z \mapsto \sum_{k=1}^{p} \frac{c_k}{(z - z_0)^k}$$

est appelée partie principale *de f.*

D'après les formules des corollaires 4.1 et 4.2 et la définition de l'indice, on remarque que pour tout chemin fermé ne passant pas par z_0,

$$\oint_\Gamma \sum_{k=1}^{p} \frac{c_k}{(z - z_0)^k}\, \mathrm{d}z = c_1 \ \mathrm{Ind}_\Gamma(z_0)\,.$$

Par suite, d'après la définition 7.3 et le théorème de Cauchy appliqué à f moins sa partie principale, on a le

Théorème 7.3 *Si une fonction f est holomorphe dans $\Omega \backslash \{z_0\}$, où Ω est un ouvert* simplement connexe *et $z_0 \in \Omega$, et si f a un pôle au point z_0, alors pour tout chemin fermé $\Gamma \subset \Omega \backslash \{z_0\}$,*

$$\frac{1}{2\,i\,\pi} \oint_\Gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \text{Rés}\,(f; z_0) \ \ \mathrm{Ind}_\Gamma(z_0)\,.$$

ou plus généralement :

Théorème 7.4 (des résidus) *Si une fonction f est holomorphe dans $\Omega \backslash \{z_0, \ldots, z_n\}$ avec* Ω simplement connexe*, si f a un pôle aux points $z_0, \ldots, z_n$, alors pour tout chemin fermé $\Gamma \subset \Omega \backslash \{z_0, \ldots, z_n\}$,*

$$\frac{1}{2\,i\,\pi} \oint_\Gamma f(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{n} \text{Rés}\,(f; z_k) \ \ \mathrm{Ind}_\Gamma(z_k)\,.$$

Ce théorème d'apparence abstraite est d'une grande utilité dans certains problèmes pratiques. En particulier, il permet de calculer toutes sortes d'intégrales de *fonctions de variable réelle dont on ne connaît pas de primitives*. Ce genre de calculs nécessite un peu d'expérience, pour choisir le chemin Γ d'abord (et calculer les indices, ce qui n'est pas difficile), et pour calculer les résidus ensuite. Le premier point n'est pas vraiment systématique, on donnera de nombreux exemples en TD. En revanche, le calcul de résidus demande essentiellement de savoir le résultat suivant.

Théorème 7.5 *Si $f = g/h$ avec g et h holomorphes dans Ω, h ayant un zéro d'ordre m en $z_0 \in \Omega$ et g ne s'annulant pas en z_0, alors f a un pôle d'ordre m en z_0 et*

$$\mathrm{Rés}\,(f; z_0) \;=\; \frac{1}{(m-1)\,!}\,\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\,\Big((z\,-\,z_0)^m\,f(z)\Big)_{|z=z_0}\,.$$

Démonstration. D'après le théorème 7.1, il existe une fonction holomorphe ℓ telle que

$$h(z) \;=\; (z\,-\,z_0)^m\,\ell(z) \quad \text{et} \quad \ell(z_0) \;\neq\; 0\,.$$

La fonction g/ℓ est donc holomorphe, et par suite analytique, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et un réel $r > 0$ tels que

$$\frac{g(z)}{\ell(z)} \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z\,-\,z_0)^n \quad \forall z \in D(z_0; r)\,.$$

De plus, comme $g(z_0) \neq 0$, $a_0 \neq 0$. On en déduit

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+m}\,(z\,-\,z_0)^k \;+\; \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{m-k}}{(z\,-\,z_0)^k}\,,$$

ce qui prouve qu'on est dans le cas *ii)* du théorème 7.2 : f a bien un pôle d'ordre m puisque $a_0 \neq 0$. Et l'on a

$$\mathrm{Rés}\,(f; z_0) \;=\; a_{m-1} \;=\; \frac{1}{(m-1)\,!}\,\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\,\Big(\frac{g(z)}{\ell(z)}\Big)_{|z=z_0}$$

d'après la formule vue au corollaire 5.1. □

La formule de ce théorème n'est pas toujours le moyen le plus rapide de calculer un résidu (si l'ordre du pôle est élevé). Dans le cas où g et h sont des *fonction polynômiales*, il peut être préférable de calculer un *développement en éléments simples* (dont en fait seulement les termes "d'ordre 1" nous intéressent !). Rappelons en effet le résultat suivant :

Théorème 7.6 *Si g et h sont deux fonctions* polynômiales*, h admettant comme zéros $z_0, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, de multiplicités respectives $m_0, \ldots, m_n$, il existe une fonction polynômiale p et des nombres complexes $c_{k,j}$ tels que*

$$\frac{g(z)}{h(z)} \;=\; p(z) \;+\; \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m_k} \frac{c_{k,j}}{(z\,-\,z_k)^j}\,.$$

Cette décomposition, dite en éléments simples (sur $\mathbb{C}$), est de plus unique. On a alors pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\text{Rés}\left(\frac{g}{h}; z_k\right) = c_{k,1}\,.$$

Dans le cas d'un pôle simple, il est beaucoup plus facile de calculer le résidu. D'abord la formule du théorème 7.5 se réduit à

$$\text{Rés}\,(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} \Big((z - z_0)\, f(z) \Big)\,.$$

Une autre formule utile est donnée par :

Proposition 7.2 *Si $f = g/h$ avec g et h holomorphes dans Ω, h ayant un zéro* simple *en $z_0 \in \Omega$ et g ne s'annulant pas en z_0, alors*

$$\text{Rés}\,(f; z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\,.$$

Démonstration. Il existe une fonction r, holomorphe dans Ω telle que (cas particulier du théorème 7.5) :

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = r(z) + \frac{\text{Rés}\,(f; z_0)}{z - z_0}\,.$$

Multiplions cette égalité par $h(z)\,(z - z_0)$. On obtient

$$g(z)\,(z - z_0) = r(z)\,h(z)\,(z - z_0) + \text{Rés}\,(f; z_0)\;h(z)\,.$$

En dérivant une fois, il reste seulement, au point $z = z_0$:

$$g(z_0) = \text{Rés}\,(f; z_0)\;h'(z_0)\,.$$

□

On verra donc en TD comment utiliser le théorème des résidus pour calculer des intégrales. En outre, ce théorème est riche de conséquences concernant les zéros des fonctions holomorphes (la boucle est bouclée !). Commençons en effet par le

Théorème 7.7 *Pour une fonction holomorphe f ayant un zéro d'ordre m en z_0, la fonction f'/f a un pôle* simple *en z_0, et l'on a*

$$\text{Rés}\,(f'/f; z_0) = m\,.$$

Démonstration. D'après le théorème 7.1, il existe une fonction holomorphe g ne s'annulant pas en z_0 telle que

$$f(z) = (z - z_0)^m\, g(z)\,,$$

d'où

$$f'(z) = m\,(z - z_0)^{m-1}\, g(z) + (z - z_0)^m\, g'(z) \quad \text{et} \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}\,.$$

Comme $g(z_0) \neq 0$, la fonction g'/g est holomorphe au voisinage de z_0, donc $m/(z - z_0)$ est bien la partie principale de f. □

Corollaire 7.2 *Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert non vide Ω, et soit Γ un cercle inclus dans Ω, orienté dans le sens trigonométrique, et tel que f ne s'annule par sur Γ. Alors, le nombre de zéros de f, comptés avec leurs ordres de multiplicité, contenus à* l'intérieur *de Γ, est égal à* $\mathrm{Ind}_{f(\Gamma)}(0)$.

Démonstration. D'après le théorème 7.7, le nombre M de zéros de f l'intérieur de Γ est égal à la somme des résidus de f'/f dans le disque ouvert D de bord Γ. De plus, pour chacun de ces zéros, l'indice par rapport à Γ vaut 1. Donc, d'après le théorème des résidus appliqué à f'/f,

$$M \,=\, \frac{1}{2\,i\,\pi} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z\,.$$

Si $t \in [\,0, 2\,\pi\,] \;\mapsto\; \gamma(t)$ est un paramétrage de Γ, alors $\varphi \;:=\; f \circ \gamma$ est évidemment un paramétrage de $f(\Gamma)$, et l'on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\,\pi} \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\,\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\,\pi} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{f(\Gamma)} \frac{\mathrm{d}w}{w} \\
&= 2\,i\,\pi\,\mathrm{Ind}_{f(\Gamma)}(0)\,.
\end{aligned}$$

□

Une conséquence importante de ce résultat est le théorème de Rouché, énoncé précisément et démontré ci-après, qui dit que le nombre de zéros d'une fonction holomorphe à l'intérieur d'un cercle donné ne change pas si l'on perturbe légèrement ("continûment") cette fonction.

Théorème 7.8 *Si f et g sont deux fonctions holomorphes dans un ouvert Ω, si $z_0 \in \Omega$ et le disque fermé $\overline{D(z_0; r)}$ est inclus dans Ω, et si*

$$|\,f(z) \,-\, g(z)\,| \,<\, |\,f(z)\,| \qquad \forall z\,;\; |\,z \,-\, z_0\,| \,=\, r\,,$$

alors f et g ont exactement le même nombre de zéros, comptés avec leurs ordres multiplicité dans le disque ouvert $D(z_0; r)$.

Démonstration. Soit

$$\Gamma \,:=\, \{\, z \,=\, \gamma(t) \,:=\, z_0 \,+\, r\,\mathrm{e}^{i\,t}\,;\; t \in [\,0\,,\, 2\,\pi\,]\,\}\,.$$

Soient M et N les nombres de zéros de f et de g respectivement, à l'intérieur de Γ. D'après le corollaire 7.2, on a

$$M \,=\, \mathrm{Ind}_{f(\Gamma)}(0)\,, \quad N \,=\, \mathrm{Ind}_{g(\Gamma)}(0)\,.$$

Pour montrer que ces nombres sont égaux, considérons le chemin

$$\Phi := \left\{ z = \phi(t) := \frac{g(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \; ; \; t \in [\,0\,,\, 2\,\pi\,] \right\} .$$

D'après l'hypothèse, f ne s'annule pas sur Γ, ce qui fait que ϕ est bien définie, et g ne s'annule pas non plus sur Γ, ce qui fait que ϕ ne s'annule pas sur Γ. Par construction, le chemin Φ est fermé puisque Γ l'est. De plus, d'après l'hypothèse, Φ est inclus dans le disque ouvert de centre 1 et de rayon 1. Donc 0 appartient à la composante connexe non bornée de $\mathbb{C}\backslash\Phi$. D'après le théorème 6.1, on sait donc que $\mathrm{Ind}_\Phi(0) = 0$. Or, par application de la définition de l'indice, on voit que

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_\Phi(0) &= \int_\Phi \frac{\mathrm{d}z}{z} \\ &= \int_0^{2\,\pi} \frac{\phi'(t)}{\phi(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\,\pi} \frac{(f\circ\gamma)'(t)}{(f\circ\gamma)(t)} - \frac{(g\circ\gamma)'(t)}{(g\circ\gamma)(t)}\;\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{Ind}_{f(\Gamma)}(0) - \mathrm{Ind}_{g(\Gamma)}(0)\,. \end{aligned}$$

□

Le théorème de Rouché peut être utile lorsqu'on cherche les zéros d'une fonction holomorphe dépendant d'un “petit” paramètre. Une conséquence immédiate de ce théorème est en effet le

Corollaire 7.3 *Soit une fonction*

$$\begin{array}{rccc} f\,: & \Omega \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}\,, \\ & (z,\mu) & \mapsto & f(z,\mu)\,. \end{array}$$

On suppose f continue*, et* holomorphe *par rapport à z dans Ω. Pour $\mu_0 \in \mathbb{R}^n$ donné, on suppose que $f(\cdot,\mu_0)$ ne s'annule pas sur le bord d'un un disque ouvert $D \subset \Omega$. Soit alors M le nombre de zéros de $f(\cdot,\mu_0)$, comptés avec leurs ordres multiplicité, dans D. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout μ satisfaisant*

$$\|\mu - \mu_0\| \leq \eta\,,$$

la fonction $f(\cdot,\mu)$ a exactement M zéros dans D.

Démonstration. Puisque $f(\cdot,\mu_0)$ est continue et ne s'annule pas sur ∂D, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon < \min_{z\in\partial D} |\,f(z,\mu_0)\,|\,.$$

De plus, par continuité de f, uniforme sur le compact $\partial D \times \{\mu_0\}$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $z \in \partial D$

$$\|\mu - \mu_0\| \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(z,\mu) - f(z,\mu_0)| \leq \varepsilon .$$

Ainsi,

$$\forall z \in \partial D, \quad \|\mu - \mu_0\| \leq \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(z,\mu) - f(z,\mu_0)| < |f(z,\mu_0)| .$$

Donc le théorème de Rouché s'applique à $f(z,\mu_0)$ et $f(z,\mu)$. $\square$

Une autre conséquence du théorème de Rouché est un théorème algébrique célèbre.

Théorème 7.9 (de d'Alembert) *Quels que soient les nombres complexes* $a_0, \ldots, a_{n-1}$, *la fonction polynômiale*

$$g : z \mapsto z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

a exactement n *zéros dans* $\mathbb{C}$, *comptés avec leurs ordres de multiplicité.*

Démonstration. Pour r assez grand, g n'a pas de zéros à l'extérieur du cercle de centre 0 et de rayon r, puisque

$$\lim_{r \to +\infty} |g(z)| = +\infty .$$

Soit donc un tel r, que l'on suppose aussi strictement supérieur à 1 et à $|a_{n-1}| + \cdots |a_1| + |a_0|$. Soit $f(z) = z^n$. Pour $|z| = r$,

$$|f(z) - g(z)| = \Big|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\Big| \leq r^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| < r^n = |f(z)| .$$

Donc f et g ont le même de zéros, c'est-à-dire n, à l'intérieur du disque de centre 0 et de rayon r. $\square$

On verra encore une autre conséquence du théorème de Rouché au §9.

8 Fonctions holomorphes élémentaires

Comme on l'a déjà dit, les fonctions polynômiales sont des fonctions entières, et les fonctions rationnelles sont holomorphes en dehors de leurs pôles. Parmi ces fonctions rationnelles, les fonction homographiques jouent un rôle particulier.

8.1 Fonctions homographiques

Si a, b, c et d sont quatre nombres complexes tels que $a\,d - b\,c \neq 0$, la fonction

$$f \,:\, z \mapsto \frac{a\,z + b}{c\,z + d}$$

est appelée *homographie*. (Si $a\,d - b\,c = 0$, f dégénère en la fonction constante égale à $a/c = b/d$.) Si de plus $c \neq 0$, cette fonction admet un pôle simple en $z_0 = -d/c$, et

$$\text{Rés}\,(f; z_0) = \frac{b\,c - a\,d}{c^2}\,.$$

Cette fonction a la propriété remarquable de transformer tout cercle ou droite en un cercle ou une droite. Plus précisément, on a le

Théorème 8.1 *Si $a\,d - b\,c \neq 0$, et $f(z) = \frac{a\,z+b}{c\,z+d}$ pour tout $z \neq z_0 := -d/c$, alors*
- *l'image par f d'un cercle ne passant pas par z_0 est un cercle,*
- *l'image par f d'une droite ne passant pas par z_0 est un cercle,*
- *si C est un cercle passant par z_0, $f(C\backslash\{z_0\})$ est une droite,*
- *si D est une droite passant par z_0, $f(C\backslash\{z_0\})$ est une droite.*

Démonstration. La démonstration de ce résultat est un petit exercice d'algèbre-géométrie. En effet, les applications de la forme $z \mapsto a\,z + b$ correspondent géométriquement à des composées de *translations*, *rotations* et *homothéties*, qui transforment toutes les droites en droites et les cercles en cercles. Le théorème repose donc sur le fait que l'"inversion"[3] $z \mapsto 1/z$ transforme tout cercle ou droite en un cercle ou une droite, et plus précisément, tout cercle ou droite ne passant pas par 0 en un cercle, et tout cercle ou droite passant par 0 en une droite (plus un point "à l'infini").

Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que n'importe quel cercle ou droite admet une équation cartésienne de la forme

$$\alpha\,z\,\overline{z} + \beta\,z + \overline{\beta}\,\overline{z} + \gamma = 0,$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $|\beta|^2 > \alpha\,\gamma$, le cas $\alpha = 0$ correspondant aux droites, le cas $\gamma = 0$ correspondant aux cercles ou droites passant par 0. Le résultat est alors évident, puisque l'image par l'inversion $z \mapsto 1/z$ de l'ensemble

$$\{\,z\,;\; \alpha\,z\,\overline{z} + \beta\,z + \overline{\beta}\,\overline{z} + \gamma = 0\,\}$$

est l'ensemble

$$\{\,z\,;\; \alpha + \beta\,\overline{z} + \overline{\beta}\,z + \gamma\,z\,\overline{z} = 0\,\}\,.$$

□

[3] En fait, en géométrie on appelle *inversion* l'application conjuguée $z \mapsto 1/\overline{z}$, de sorte que l'application $z \mapsto 1/z$ est la composée d'une inversion et de la symétrie par rapport à l'axe $0x$.

Ce résultat permet de transformer facilement des disques ou extérieurs de disques en demi-plans, et inversement, la réciproque d'une homographie étant aussi une homographie. En outre, les homographies préservent les angles, puisque c'est le cas des *translations*, *rotations*, *homothéties*, *inversions* et *symétries orthogonales*. Ce sont des cas particuliers de ce qu'on appelle des *transformations conformes*.

8.2 La fonction exponentielle et ses acolytes

La fonction holomorphe fondamentale est la fonction exponentielle. Rappelons qu'elle est définie par :

$$\begin{array}{rccl} \exp\,: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \mathrm{e}^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\,. \end{array}$$

Elle est entière, c'est-à-dire holomorphe dans tout le plan complexe. Elle est sa propre dérivée. Elle ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. Comme on l'a déjà signalé, elle permet de définir d'autres fonctions entières, que sont

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{i\,z} - \mathrm{e}^{-i\,z}}{2\,i}\,, \quad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{i\,z} + \mathrm{e}^{-i\,z}}{2}\,,$$

et

$$\mathrm{sh} z = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2}\,, \quad \mathrm{ch} z = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}\,.$$

Les dérivées de ces fonctions sont

$$\sin' = \cos\,, \quad \cos' = -\sin\,, \quad \mathrm{sh}' = \mathrm{ch}\,, \quad \mathrm{ch}' = \mathrm{sh}\,.$$

Les ensembles de zéros de $\sin$ et $\cos$ sont respectivement $\pi\,\mathbb{Z}$ et $\frac{\pi}{2} + \pi\,\mathbb{Z}$. Comme $i\,\sin z = \mathrm{sh}(i\,z)$ et $\cos z = \mathrm{ch}(i\,z)$, on en déduit que les ensembles de zéros de sh et ch sont respectivement $i\,\pi\,\mathbb{Z}$ et $i\,\frac{\pi}{2} + i\,\pi\,\mathbb{Z}$. Ces zéros sont tous simples.

8.3 Les fonctions logarithme et les fonctions puissance

Qu'il soit bien clair qu'on ne peut pas définir une fonction logarithme de façon univoque dans tout le plan complexe $\mathbb{C}$, ni même dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. En revanche, on peut le faire dans tout domaine *simplement connexe*, et en particulier dans tout "plan fendu", de la forme

$$\Omega_\alpha = \mathbb{C}\backslash D_\alpha\,, \quad D_\alpha := \{\, z = t\,\mathrm{e}^{i\,\alpha}\,;\; t \leq 0\,\}$$

pour $\alpha\,]-\pi\,,\,\pi\,[$. Car, grâce au théorème de Cauchy (voir la proposition 4.1), la fonction $z \mapsto 1/z$ admet une primitive, au sens des fonctions de variable complexe, dans tout ouvert connexe et simplement connexe ne contenant pas 0. Lorsque l'ouvert en question est Ω_α, on notera Log_α la primitive qui s'annule en 1. Pour $z \in \Omega_\alpha$, si on note $\Gamma_\alpha(z)$ l'arc de cercle joignant $|z|$ à z et *ne passant pas* par D_α, on a par construction :

$$\mathrm{Log}_\alpha(z) \,=\, \int_{[\,1\,,\,|z|\,]} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} \,+\, \int_{\Gamma_\alpha(z)} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}\,.$$

Cette expression n'est pas vraiment commode en pratique ! Voyons comment obtenir une formule plus explicite. Si $z \,\in\, \Omega_\alpha$, il existe un unique $\theta \,\in]\,\alpha \,-\, \pi\,,\,\alpha \,+\, \pi\,[$ tel que $z \,=\, |z|\,\mathrm{e}^{i\,\theta}$. Par suite,

$$\int_{\Gamma_\alpha(z)} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} \,=\, i \int_0^\theta \mathrm{d}\omega \,=\, i\,\theta\,,$$

d'où la formule

$$\mathrm{Log}_\alpha(z) \,=\, \ln(|z|) \,+\, i\,\theta \qquad \text{pour } \; z \,=\, |z|\,\mathrm{e}^{i\,\theta}\,;\; \theta \,\in]\,\alpha \,-\, \pi\,,\,\alpha \,+\, \pi\,[\,.$$

En particulier, pour tout $z \,=\, x \,\in\, \mathbb{R}^{+*}$,

$$\mathrm{Log}_\alpha(x) \,=\, \ln(x)\,, \quad \text{et donc } \; \mathrm{e}^{\mathrm{Log}_\alpha(x)} \,=\, x\,.$$

Les deux fonctions $\exp \circ \mathrm{Log}_\alpha$ et $z \,\mapsto\, z$ étant holomorphes dans Ω_α, qui contient $\mathbb{R}^{+*}$, cela suffit (voir le corollaire 7.1) pour en déduire

$$\mathrm{e}^{\mathrm{Log}_\alpha(z)} \,=\, z \qquad \forall\, z \,\in\, \Omega_\alpha\,.$$

Autrement dit, la fonction Log_α ainsi construite est *une fonction réciproque* de $\exp$ *dans le domaine simplement connexe* Ω_α.

La fonction $\exp$ *n'admet pas de réciproque dans* $\mathbb{C}$ *tout entier.*

Par construction, la fonction Log_α a pour dérivée $z \,\mapsto\, \frac{1}{z}$. on en déduit facilement son développement en série entière au point 1 :

$$|\zeta| \,<\, 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1 \,+\, \zeta} \,=\, \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,\zeta^n \quad \mathrm{Log}_\alpha(1 \,+\, \zeta) \,=\, \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{\zeta^n}{n}\,,$$

soit encore, pour $|\,z \,-\, 1\,| \,<\, 1$,

$$\mathrm{Log}_\alpha(z) \,=\, \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{(z \,-\, 1)^n}{n}\,.$$

Une fois définie une fonction logarithme, il est naturel de lui associer des *fonctions puissance*

$$p_\alpha^r \,:\, z \,\mapsto\, \mathrm{e}^{r\,\mathrm{Log}_\alpha(z)}\,,$$

quel que soit le réel r. Ce sont des fonctions holomorphes dans Ω, dont les dérivées sont données par

$$\frac{\mathrm{d}p_\alpha^r}{\mathrm{d}z} \,=\, r\,\frac{p_\alpha^r(z)}{z} \,=\, r\,p_\alpha^{r-1}(z)\,.$$

9 Théorèmes généraux

Revenons à la théorie des fonctions de variable complexe pour insister sur quelques théorèmes, importants en eux-même ou par leurs conséquences.

9.1 Principe des zéros isolés.

D'après le théorème 7.1, les zéros d'une fonction holomorphe non identiquement nulle sont *isolés*, c'est-à-dire que si $f \not\equiv 0$ est holomorphe dans un ouvert $\Omega \ni z_0$ et si $f(z_0) = 0$, il existe $r > 0$ tel que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(z_0; r)\backslash\{z_0\}$.

Attention, il en va tout à fait différemment pour les points singuliers, qui ne sont pas forcément isolés (voir l'exemple des fonctions Log_α).

9.2 Principe du prolongement analytique.

Comme on l'a vu au corollaire 7.1, si deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe non vide Ω coïncident sur un arc de courbe, elles sont égales dans Ω.

9.3 Principe du maximum.

Théorème 9.1 *Si une fonction f, holomorphe dans un ouvert connexe non vide est telle que $|f|$ atteigne un maximum local, elle est constante.*

Démonstration. Une démonstration astucieuse utilise la théorie Hilbertienne des séries de Fourier ! Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $z_0 \in \Omega$ et $r_0 > 0$ tels que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ pour tout $z \in D(z_0; r_0)$. Puisque f est holomorphe donc analytique, il existe $R > 0$ et des nombres a_n tels que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

pour tout $z \in D(z_0; R)$. Autrement dit, pour tout $r \in]0, R[$, et pour tout $\omega \in [0, 1]$,

$$f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{2i\pi\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \mathrm{e}^{2in\pi\omega},$$

cette série étant uniformément convergente par rapport à ω. Donc les nombres $c_n = a_n r^n$ sont les coefficients de Fourier de la fonction $\omega \mapsto f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{2i\pi\omega})$. D'après la formule de Parseval, on a donc

$$\int_0^1 |f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{2i\pi\omega})|^2\,\mathrm{d}\omega = \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Par suite, d'après l'hypothèse de départ,

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2\, r^{2n} \;\leq\; |f(z_0)|^2 \;=\; |a_0|^2$$

pour tout $r \in]0, \min(R, r_0)[$. Donc tous les coefficients a_n pour $n \geq 1$ sont nuls. Cela signifie que f est constante dans tout disque $D(z_0; R)$. D'après le principe du prolongement analytique, c'est donc que f est constante dans Ω. □

En prime cette démonstration montre la

Proposition 9.1 (Estimations de Cauchy) *Si f est holomorphe dans un disque ouvert $D(z_0; R)$, et $|f|$ est majoré par M dans ce disque, alors les dérivées de f admettent la majoration :*

$$|\, f^{(n)}(z_0)\,| \;\leq\; \frac{n\,!\,M}{R^n}\,.$$

Démonstration. En effet, écrivons comme précédemment

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2\, r^{2n} \;=\; \int_0^1 \;|f(z_0 \,+\, r\,\mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,\omega})\,|^2 \;\leq\; M^2\,,$$

d'où le résultat en majorant grossièrement chaque terme de la somme par le membre de droite et en se rappelant que

$$f^{(n)}(z_0) \;=\; n\,!\;a_n\,.$$

□

En fait, ces estimations sont aussi une conséquence de la formule de Cauchy d'ordre n (voir la remarque 6.1).

D'autre part, la démonstration du théorème 9.1 montre aussi le

Théorème 9.2 (Liouville) *Toute fonction entière bornée est constante.*

Démonstration. En effet, écrivons à nouveau

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z \,-\, z_0)^n \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2\, r^{2n} \;=\; \int_0^1 \;|f(z_0 \,+\, r\,\mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,\omega})\,|^2 \;\leq\; M^2$$

si $|f| \;\leq\; M$, avec cette fois $r \;\in]0, +\infty[$. En faisant tendre r vers $+\infty$, on voit que nécessairement tous les coefficients a_n pour $n \geq 1$ sont nuls et donc que f est constante. □

Une autre propriété remarquable des fonctions holomorphes est le

Théorème 9.3 (de la moyenne) *Si f est holomorphe dans $D(z; R)$, alors pour tout $r \in]0, R[$,*

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\,\pi} \;f(z \,+\, r\,\mathrm{e}^{i\,\theta})\;\mathrm{d}\theta\,.$$

Démonstration. C'est une application immédiate de la formule de Cauchy sur Γ, le cercle de centre z et de rayon r :

$$f(z) = \frac{1}{2\,i\,\pi} \oint_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + r\,\mathrm{e}^{i\,\theta})}{r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}}\, r\,\mathrm{e}^{i\,\theta}\,\mathrm{d}\theta\,.$$

□

En particulier, les fonctions harmoniques héritent de cette propriété[4].

10 La fonction *Gamma*

Nous allons maintenant étudier une fonction holomorphe connue sous le nom de fonction Γ, et qui est justement définie par une intégrale. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la fonction

$$t \mapsto t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t+(z-1)\,\ln t}$$

est continue sur $\mathbb{R}+*$, et pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, la fonction

$$z \mapsto t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t+(z-1)\,\ln t}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$. De plus, on a

$$|\,t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,| = |\,\mathrm{e}^{-t+(z-1)\,\ln t}\,| = \mathrm{e}^{-t+(\mathrm{Re}z-1)\,\ln t} = t^{\mathrm{Re}z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,.$$

Ainsi, pour $0 < \varepsilon \leq \mathrm{Re}z \leq M$, on a

$$|\,t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,| \leq g_{\varepsilon,M}(t) := \begin{cases} t^{M-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,, & \text{si } t \geq 1\,, \\ t^{\varepsilon-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,, & \text{si } 0 < t < 1\,. \end{cases}$$

Comme $g_{\varepsilon,M}$ est intégrable sur $\mathbb{R}+*$ et que tout compact du demi-plan ouvert $P = \{\,z\,;\ \mathrm{Re} > 0\,\}$ peut être inclus dans une bande verticale de la forme $\{\,z\,;\ \varepsilon \leq \mathrm{Re}z \leq M\,\}$, la fonction

$$f : (z,t) \mapsto t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}$$

remplit les hypothèses du théorème 4.6 dans le domaine P.

Définition 10.1 *Pour tout z tel que* $\mathrm{Re}z > 0$*, on définit*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Proposition 10.1 *La fonction Γ est holomorphe dans $P := \{\,z\,;\ \mathrm{Re} > 0\,\}$ et vérifie les propriétés suivantes :*

[4] on peut montrer que toute fonction harmonique est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe.

– *pour tout* $z \in P$, $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$,
– $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$,
– *pour tout entier naturel* n, $\Gamma(n+1) = n\,!\,, \quad \Gamma(n+3/2) = \sqrt{\pi}\,\dfrac{(2n+1)\,!}{2^{2n+1}\,n\,!}\,,$
– $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\,\pi\,x}\,x^x\,\mathrm{e}^{-x}, \quad x \to +\infty$ [formule de Stirling]

Démonstration. La première propriété découle d'une simple intégration par parties, en remarquant que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{z\,\ln t}) = \frac{z}{t}\,\mathrm{e}^{z\,\ln t} = z\,t^{z-1}$$

(c'est-à-dire que la formule connue pour des exposants réels est vraie avec des exposants complexes). On a ainsi par intégration par parties

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{+\infty} z\,t^{z-1}\,(-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t + \left[t^z\,(-\mathrm{e}^{-t})\right]_0^{+\infty} \\ &= z\int_0^{+\infty} t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

pour Re$z > 0$.

Le calcul de $\Gamma(1)$ est immédiat :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} z\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1\,.$$

Le calcul de $\Gamma(1/2)$ demande un petit changement de variables : en posant $t = u^2$, d'où $\mathrm{d}t = 2\,u\,\mathrm{d}u = 2\,\sqrt{t}\,\mathrm{d}u$, on obtient

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

(on avait déjà calculé cette dernière intégrale au chapitre 2).

Le calcul de $\Gamma(n)$ et $\Gamma(n+3/2)$ utilise les valeurs de $\Gamma(1)$ et $\Gamma(1/2)$ ainsi que la formule $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$. Ainsi

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n\,(n-1)\,\ldots\,(n-k)\,\Gamma(n-k)$$

tant que $n-k \geq 1$, d'où

$$\Gamma(n+1) = n!\,\Gamma(1) = n!$$

en prenant $k = n-1$. De façon analogue,

$$\begin{aligned}\Gamma(n+3/2) &= (n+1/2)\,\Gamma(n+1/2) \\ &= (n+1/2)\,(n-1/2)\,\ldots\,(n-1/2-k)\,\Gamma(n-1/2-k)\end{aligned}$$

tant que $n - 1/2 - k > 0$. D'où, en prenant $k = n - 1$,

$$\begin{aligned}\Gamma(n+3/2) &= (n+1/2)\,(n-1/2)\,\ldots\,(1/2)\,\Gamma(1/2) \\ &= \sqrt{\pi}\,\prod_{k=0}^{n}(n+1/2-k)\,.\end{aligned}$$

Pour obtenir la formule annoncée, on réécrit

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n}(n+1/2-k) &= \frac{1}{2^{n+1}}\,\prod_{k=0}^{n}(2(n-k)+1) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\,\prod_{k=0}^{n}(2k+1) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\,\frac{(2n+1)\,!}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} \\ &= \frac{1}{2^{2n+1}}\,\frac{(2n+1)\,!}{n\,!}\,.\end{aligned}$$

La formule de Stirling est plus délicate à démontrer. On commence par faire un changement de variables ($t = x\,u$) :

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} (x\,u)^x\,\mathrm{e}^{-x\,u}\,x\,\mathrm{d}u \\ &= x^{x+1}\int_0^{+\infty} u^x\,\mathrm{e}^{-x\,u}\,\mathrm{d}u \\ &= x^{x+1}\,\mathrm{e}^{-x}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\,(\,u\,-\,1\,-\,\ln u)}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$. La formule de Stirling exprime donc que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\,(\,u\,-\,1\,-\,\ln u)}\,\mathrm{d}u \sim \sqrt{\frac{2\,\pi}{x}}$$

lorsque $x \to +\infty$. Démontrer ce comportement asymptotique demande une décomposition de l'intégrale. En effet, comme la fonction

$$f\;:\;u \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto u - 1 - \ln u$$

est à valeurs positives ou nulles, et s'annule en $u = 1$ seulement, l'intégrande $\exp(-x\,f(u))$ tend vers 0 (exponentiellement vite) lorsque $x \to +\infty$, sauf pour $u = 1$. Soit donc

$\varepsilon\in]0,1[$ (que l'on choisira plus loin en fonction de x, petit mais pas trop !). On a bien sûr :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\,f(u)}\,\mathrm{d}u \;=\; \int_0^{1-\varepsilon} \mathrm{e}^{-\,x\,f(u)}\,\mathrm{d}u \;+\; \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \mathrm{e}^{-\,x\,f(u)}\,\mathrm{d}u \;+\; \int_{1+\varepsilon}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\,x\,f(u)}\,\mathrm{d}u\,.$$

Le cœur de la démonstration consiste à à montrer que, pour ε bien choisi, la première et la dernière intégrale sont négligeables devant celle du milieu, et à trouver un équivalent de cette dernière.

Commençons par examiner

$$\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \mathrm{e}^{-\,x\,f(u)}\,\mathrm{d}u\,.$$

En faisant un développement de Taylor de f au point $u=1$, on trouve, puisque $f(1)\;=\;0$, $f'(1)\;=\;0$, que

$$f(u)\;=\;\frac{1}{2}\,(u-1)^2\;+\;(u-1)^3\,\varphi(u)\,,$$

où l'application φ est bornée sur l'intervalle compact $[1/2,3/2]$. Par suite, si $\varepsilon\in]0,1/2]$, on a pour tout $u\in[1-\varepsilon,1+\varepsilon]$,

$$\mathrm{e}^{-\,x\,f(u)}\;=\;\mathrm{e}^{-\,\frac{x}{2}\,(u-1)^2}\,\mathrm{e}^{-\,x\,(u-1)^3\,\varphi(u)}$$

avec

$$\mathrm{e}^{-\,x\,\varepsilon^3\,M}\;\le\;\mathrm{e}^{-\,x\,(u-1)^3\,\varphi(u)}\;\le\;\mathrm{e}^{x\,\varepsilon^3\,M}\,.$$

Si de plus ε est choisi de sorte que $x\,\varepsilon^3$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, on aura

$$\mathrm{e}^{-\,x\,(u-1)^3\,\varphi(u)}\;=\;1\;+\;\mathcal{O}(x\,\varepsilon^3)\,,$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \mathrm{e}^{-x\,f(u)}\,\mathrm{d}u \;&=\; (1\;+\;\mathcal{O}(x\,\varepsilon^3)\;\int_{1-\varepsilon}^{1-\varepsilon} \mathrm{e}^{-\,\frac{x}{2}\,(u-1)^2}\,\mathrm{d}u\\ &=\;(\,1\;+\;\mathcal{O}(x\,\varepsilon^3)\,)\,\sqrt{\frac{2}{x}}\;\int_{-\varepsilon\,\sqrt{x/2}}^{\varepsilon\sqrt{x/2}} \mathrm{e}^{-\,v^2}\,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

par changement de variables ($v\;=\;(u\;-\;1)\sqrt{x/2}$). Si de surcroît, $x\,\varepsilon^2$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ (ce qui n'est pas incompatible avec la première hypothèse sur ε !),

$$\int_{-\varepsilon\,\sqrt{x/2}}^{\varepsilon\sqrt{x/2}} \mathrm{e}^{-\,v^2}\,\mathrm{d}v\;=\;\sqrt{\pi}\;-\;\int_{2v^2>x\varepsilon^2} \mathrm{e}^{-\,v^2}\,\mathrm{d}v\;=\;\sqrt{\pi}\,(\,1\;+\;\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\,x\,\varepsilon^2/4})\,)\,.$$

En résumé, sous les hypothèses $x\,\varepsilon^3 \longrightarrow 0$ et $x\,\varepsilon^2 \longrightarrow +\infty$ lorsque $x \to +\infty$,

$$\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \mathrm{e}^{-x\,f(u)}\,\mathrm{d}u \;=\; \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\,(\,1\,+\,\mathcal{O}(x\,\varepsilon^3)\,)\,(\,1\,+\,\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\,x\,\varepsilon^2/4})\,)\,.$$

On peut remarquer que $\varepsilon \,=\, x^{-2/5}$ vérifie les hypothèses en question.

Il reste à vérifier que les intégrales sur $]0, 1-\varepsilon[$ et $]1+\varepsilon, +\infty[$ sont négligeables devant celle sur $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$. En dehors d'un voisinage de 1 on ne peut pas utiliser le développement de Taylor de f au point 1. Cependant, on peut obtenir une minoration grossière de f par des moyens élémentaires. Par exemple, pour $u \in]0, 1-\varepsilon]$,

$$f(u) \,\geq\, f(1-\varepsilon) \,=\, \int_{1-\varepsilon}^{1} (\frac{1}{v} - 1)\,\mathrm{d}v \,\geq\, \int_{1-\varepsilon}^{1} (1-v)\,\mathrm{d}v \,=\, \frac{1}{2}\,\varepsilon^2$$

tandis que pour $u \,\in\, [1+\varepsilon, 4]$,

$$f(u) \,\geq\, f(1+\varepsilon) \,=\, \int_{1}^{1+\varepsilon} (1 - \frac{1}{v})\,\mathrm{d}v \,\geq\, \frac{1}{4}\,\int_{1}^{1+\varepsilon} (v-1)\,\mathrm{d}v \,=\, \frac{1}{8}\,\varepsilon^2\,.$$

On en déduit déjà

$$\int_{0}^{1-\varepsilon} \mathrm{e}^{-\,x\,f(u)}\,\mathrm{d}u \,+\, \int_{1+\varepsilon}^{4} \mathrm{e}^{-\,x\,f(u)}\,\mathrm{d}u \,\leq\, 4\,\mathrm{e}^{-\,x\,\varepsilon^2/8}\,.$$

Enfin, pour $u \geq 4$,

$$f(u) \,\geq\, \frac{3}{4}\,u \,-\, \ln u \,>\, \frac{1}{4}\,u$$

puisque la fonction $u \,\mapsto\, u/2 \,-\, \ln u$ est croissante sur $[4, +\infty[$ et vaut $2 \,-\, \ln 2 \,\simeq\, 0.614\ldots$ en $u = 4$. Donc

$$\int_{4}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\,x\,f(u)}\,\mathrm{d}u \,\leq\, \int_{4}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\,x\,u/4}\,\mathrm{d}u \,=\, \frac{4}{x}\,\mathrm{e}^{-\,x} \,<\, \mathrm{e}^{-\,x\,\varepsilon^2/8}$$

a fortiori (dès que $\varepsilon < 2\sqrt{2}$!). Par conséquent,

$$\int_{0}^{1-\varepsilon} \mathrm{e}^{-\,x\,f(u)}\,\mathrm{d}u \,+\, \int_{1+\varepsilon}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\,x\,f(u)}\,\mathrm{d}u \,\leq\, 5\,\mathrm{e}^{-\,x\,\varepsilon^2/8}\,,$$

ce qui est bien négligeable devant $1/\sqrt{x}$.

□

Corollaire 10.1 *La fonction* Γ *admet un unique prolongement analytique à* $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$ *tel que*

$$\Gamma(z+1) \,=\, z\,\Gamma(z) \quad \forall\, z \,\in\, \mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})\,.$$

Démonstration. Pour $-1 < \mathrm{Re} z \leq 0$ et $z \neq 0$, on doit avoir

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}.$$

Puis, par récurrence sur n, pour $-n < \mathrm{Re} z \leq -n+1$ et $z \neq -n+1$,

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+n)}{z\,(z+1)\,\ldots\,(z+n-1)}.$$

Ceci définit Γ de manière unique sur $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$. Par construction, on a bien

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N}).$$

En effet, si $-n-1 < \mathrm{Re} z \leq -n$,

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+(n+1))}{z\,(z+1)\,\ldots\,(z+(n+1)-1)} \\
&= \frac{1}{z}\frac{\Gamma((z+1)+n))}{(z+1)\,\ldots\,((z+1)+n-1)} \\
&= \frac{\Gamma(z+1)}{z}
\end{aligned}$$

puisque $-n < \mathrm{Re}(z+1) \leq -n+1$. □

Bien d'autres propriétés encore sont connues pour cette fonction. En particulier, on a $\Gamma'(0) = -\gamma$, où γ est la *constante d'Euler* :

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$$

Citons aussi la formule des compléments :

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

11 Réciproques de fonctions holomorphes

Théorème 11.1 *Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω. Si $z_0 \in \Omega$ est tel que $f'(z_0) \neq 0$, alors il existe $r > 0$ et $\rho > 0$ tels que f soit une bijection de $D(z_0;r)$ sur $D(f(z_0);\rho)$. De plus, l'application réciproque f^{-1} est holomorphe dans $D(z_0;r)$ et vérifie*

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Démonstration. Il s'agit de résoudre l'équation $w = f(z)$, que l'on va réécrire à l'aide de z_0 et $w_0 = f(z_0)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que

$$\left| \frac{f(z) - w_0}{z - z_0} - f'(z_0) \right| \leq \varepsilon$$

pour $|z - z_0| \leq r$. En particulier, c'est vrai pour $\varepsilon = \frac{1}{2} |f'(z_0)|$ (qui est strictement positif d'après l'hypothèse $f'(z_0) \neq 0$!). On en déduit, par l'inégalité triangulaire

$$|f(z) - w_0| \geq \frac{1}{2} |f'(z_0)| |z - z_0|$$

pour tout $z \in D(z_0; r_0)$. Donc la fonction

$$g : z \mapsto \begin{cases} \dfrac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} & \text{si } z \neq z_0, \\[2ex] \dfrac{1}{f'(z_0)} & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

est holomorphe dans $D(z_0; r_0)$ et majorée par $M := 2/|f'(z_0)|$. L'équation $w = f(z)$ équivaut à

$$z - z_0 - (w - w_0)\, g(z) = 0 .$$

Et pour $|w - w_0| < r/M$ et $|z - z_0| = r < r_0$, on a

$$|(w - w_0)\, g(z)| < |z - z_0| .$$

Donc, d'après le théorème de Rouché, les fonctions $z \mapsto z - z_0$ et $z \mapsto z - z_0 - (w - w_0)\, g(z)$ ont le même nombre de zéros, c'est-à-dire un seul zéro, dans $D(z_0; r)$. D'où la première assertion du théorème : f est une bijection de $D(z_0; r)$ sur $D(w_0; r/M)$. Le fait que sa réciproque h soit holomorphe utilise le théorème de l'image ouverte énoncé ci-après, et montrant que h est continue. En admettant ce point, on a

$$\lim_{w \to w_0} h(w) = h(w_0) = z_0 .$$

Comme par définition de h,

$$\frac{h(w) - h(w_0)}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} ,$$

on en déduit par passage à la limite la formule annoncée

$$h'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)} .$$

□

Théorème 11.2 (de l'image ouverte) *L'image d'un ouvert Ω par une fonction holomorphe non constante est un ouvert.*

Le résultat 11.1 est un *théorème d'inversion locale*. Voyons maintenant un résultat global.

Théorème 11.3 *Si une fonction f est holomorphe sur un ouvert connexe non vide Ω et* injective*, alors*
- *$\Upsilon = f(\Omega)$ est ouvert,*
- *f' ne s'annule pas sur Ω,*
- *il existe une unique fonction g, holomorphe sur Υ, telle que $f \circ g = id$,*
- *la dérivée de g est donnée par*

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}.$$

Démonstration. Le premier point est une reformulation du théorème de l'image ouverte (noter qu'une fonction injective sur un ouvert non vide ne peut être constante !). Le second point découlera de l'étude de l'équation $w = f(z)$.

Soit $z_0 \in \Omega$. D'après le théorème 7.1, il existe un entier $m \geq 1$ et une fonction holomorphe g ne s'annulant pas en z_0 tels que

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m g(z)$$

pour tout $z \in \Omega$. Par continuité de g, il existe $r > 0$ tel que pour $|z - z_0| \leq r$,

$$\left| \frac{g(z) - g(z_0)}{g(z_0)} \right| \leq \frac{1}{2},$$

d'où

$$|g(z)| \geq \frac{1}{2} |g(z_0)|.$$

Donc l'équation $w = f(z)$ équivaut pour $z \in D(z_0; r)$ à

$$(z - z_0)^m - \frac{w - w_0}{g(z)} = 0.$$

Soit $\rho < r^m |g(z_0)|/2$. Alors pour $|w - w_0| < \rho$, le théorème de Rouché dit que la fonction $z \mapsto (z - z_0)^m - \frac{w - w_0}{g(z)}$ a exactement m zéros dans $D(z_0; r)$. Comme $m \geq 1$, on a au moins une valeur de $z \in D(z_0; r)$ telle que $f(z) = w$.

Puisque f est injective, on sait que w a au plus un antécédent, mais celui-ci pourrait être compté plusieurs fois : c'est pourquoi il n'est pas immédiat que $m = 1$. Pour le démontrer, on raisonnons par l'absurde. Supposons $m \geq 2$. Ceci est équivalent au fait que $f'(z_0)$ soit nul. Comme f' n'est pas identiquement nulle (sinon f serait constante, et donc non injective), le principe des zéros isolés dit que $f'(z) \neq 0$ pour $0 < |z - z_0| < r$

(quitte à diminuer r). Or, pour $|\,w - w_0\,| < \rho$, on a vu que l'équation $f(z) = w$ avait exactement m solutions dans $D(z_0; r)$, et elles sont distinctes de z_0 pour $|\,w - w_0\,| > 0$. Comme f' ne s'annule pas dans le disque épointé, ces solutions sont simples et donc distinctes. Ceci contredit l'injectivité de f.

En conclusion, $m = 1$ et donc $f'(z_0) \neq 0$. La fin de la démonstration est une conséquence du théorème 11.1. $\square$

Attention, le théorème d'inversion est faux pour les fonctions non injectives : les fonctions $\exp$ et $z \mapsto z^2$ par exemple, n'admettent pas de réciproque dans $\mathbb{C}$ tout entier.

12 Retour sur les singularités isolées

Corollaire 12.1 *Si f est une fonction holomorphe dans $\Omega\backslash\{z_0\}$, pour tout $r > 0$ on note Γ_r le cercle de centre z_0 et de rayon r, orienté dans le sens trigonométrique. On suppose que le disque épointé $D(z_0; R)\backslash\{z_0\}$ est inclus dans Ω. Alors quels que soient r_0 et r_1, $0 < r_0 < r_1$, pour tout z tel que $r_0 < |\,z - z_0\,| < r_1$, on a*

$$f(z) = \frac{1}{2\,i\,\pi} \oint_{\Gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\,i\,\pi} \oint_{\Gamma_{r_0}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

Démonstration. Pour z fixé, appliquer le théorème 4.4 à la fonction g telle que $f(\zeta) - f(z) = (\zeta - z)\ g(\zeta)$, et aux chemins $\Gamma_0 = \Gamma_{r_0}$, $\Gamma_1 = \Gamma_{r_1}$, évidemment homotopes dans $D(z_0; R)\backslash\{z_0\}$ et donc dans $\Omega\backslash\{z_0\}$. $\square$

La formule obtenue ici est en quelque sorte une généralisation de la formule de Cauchy aux ouverts non simplement connexes (de la forme $\Omega\backslash\{z_0\}$).

Corollaire 12.2 *Si f est une fonction holomorphe dans $\Omega\backslash\{z_0\}$, alors il existe $R > 0$, des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et des coefficients $(c_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ tels que*

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\,(z - z_0)^n + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{c_k}{(z - z_0)^k} \qquad \textit{pour} \quad 0 < |\,z - z_0\,| < R\,.$$

Démonstration. On procède comme pour la preuve du corollaire 6.1 donnant le développement en série entière dans le cas sans singularité. Soit $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tel que le disque épointé $D(z_0; R)\backslash\{z_0\}$ soit inclus dans $\Omega\backslash\{z_0\}$. Soient r_0 et r_1, $0 < r_0 < r_1 < R$. D'après le corollaire 12.1, on a pour $r_0 < |\,z - z_0\,| < r_1$,

$$f(z) = \frac{1}{2\,i\,\pi} \oint_{\Gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\,i\,\pi} \oint_{\Gamma_{r_0}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$

En développant

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\,\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n$$

pour $\zeta \in \Gamma_{r_1}$ et

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\Big)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}$$

pour $\zeta \in \Gamma_{r_0}$, on en déduit le développement annoncé avec

$$a_n := \frac{1}{2\,i\,\pi} \oint_{\Gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \quad \text{et} \quad c_n := \frac{1}{2\,i\,\pi} \oint_{\Gamma_{r_0}} f(\zeta)\,(\zeta - z_0)^{n-1}\,\mathrm{d}\zeta$$

En utilisant à nouveau le théorème 4.4 on voit que ces coefficients ne dépendent pas de r_0 et r_1. □

Le développement ainsi obtenu s'appelle *développement en série de Laurent*. Il est uniformément convergent dans toute *couronne* $\{\, z \in \mathbb{C}\,;\ 0 < r_0 \le |z - z_0| \le r_1 \,\}$. La *partie singulière* de f au point z_0 est

$$f_s(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{c_k}{(\,z - z_0)^k}\,.$$

On peut remarquer que la fonction

$$z \mapsto f_s(z_0 + \frac{1}{z}) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} c_k\, z^k$$

a une singularité artificielle en $z = 0$.

Si f a une singularité artificielle en z_0 tous les coefficients c_n sont nuls, si f a un pôle en z_0 les coefficients c_n sont nuls à partir d'un certain rang (l'ordre du pôle +1). Dans le cas contraire, c'est que f a une singularité essentielle en z_0. Le coefficient c_1 de sa partie singulière joue encore un rôle particulier et est appelé résidu de f au point z_0.

Exemple. Le développement en série de Laurent dans les couronnes centrées en $z_0 = 0$ de la fonction $z \mapsto \mathrm{e}^{1/z}$ est

$$\mathrm{e}^{1/z} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,!\,z^n}\,, \quad z \neq 0\,.$$

Le théorème des résidus est encore valable en présence de singularités essentielles :

Théorème 12.1 (des résidus) *Si une fonction f est holomorphe dans $\Omega\backslash\{z_0,\dots,z_n\}$ avec* Ω simplement connexe*, alors pour tout chemin fermé $\Gamma \subset \Omega\backslash\{z_0,\dots,z_n\}$,*

$$\frac{1}{2\,i\,\pi} \oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=0}^{n} \text{Rés}\,(f; z_k)\ \ \mathrm{Ind}_{\Gamma}(z_k)\,.$$

Enfin, une version du théorème des résidus dans le même esprit que le théorème 4.4 est le

Théorème 12.2 (des résidus, encore) *Si une fonction f est holomorphe dans $\Omega\backslash\{z_0,\dots,z_n\}$, avec Ω un ouvert connexe non vide, et si Γ_0 et Γ_1 sont des chemins fermés simples orientés dans le sens trigonométrique et homotopes dans Ω tels que tous les points z_k appartiennent à la couronne de bord $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$, alors*

$$\oint_{\Gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \oint_{\Gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\,i\,\pi \sum_{k=0}^{n} \text{Rés}\,(f;z_k)\ .$$

Chapitre 4

Transformation de Laplace

1 Introduction

On a vu que la transformation de Fourier était une opération associant à un "signal", ou fonction d'une variable (spatiale ou temporelle ou autre) $x \in \mathbb{R}$ ayant un "bon comportement à l'infini" (rendant la fonction intégrable ou au moins de carré intégrable), une fonction de $\zeta \in \mathbb{R}$ (ζ étant homogène à $1/x$). On a également observé que plus le signal tendait rapidement vers 0 à l'infini, plus sa transformée de Fourier était régulière. En fait, dans le cas extrême où ce signal est à support compact, sa transformée de Fourier est carrément *analytique*. Après avoir étudié les fonctions de variable complexe, nous sommes plus précisément en mesure de démontrer le théorème suivant, qui caractérise les transformées de Fourier de fonctions régulières à support dans un compact donné.

Théorème 1.1 (Paley-Wiener) *Soit* $R > 0$.

– *Si f est une fonction localement intégrable et nulle en dehors de l'intervalle $]-R, R[$, alors sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ se prolonge en une fonction* entière F. *Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 0$, alors pour tout $m \leq k$ il existe $C_m > 0$ tel que*

$$|F(z)| \leq \frac{C_m}{(1 + |z|^m)} \, \mathrm{e}^{2\pi R |\mathrm{Im} z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

– *Si F est une fonction entière telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe $C_m > 0$ tel que*

$$|F(z)| \leq \frac{C_m}{(1 + |z|^m)} \, \mathrm{e}^{2\pi R |\mathrm{Im} z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

alors il existe une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support dans $[-R, R]$ telle que $\widehat{f}(\zeta) = F(\zeta)$ pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$.

Démonstration. La partie directe est facile à établir. Reprenons tout d'abord la définition de $\widehat{f}$. Par hypothèse f est évidemment intégrable et donc $\widehat{f}$ est définie par la formule

$$\widehat{f}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, \mathrm{e}^{-2i\pi\zeta x} \, \mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} f(x) \, \mathrm{e}^{-2i\pi\zeta x} \, \mathrm{d}x .$$

Soit alors

$$F(z) \,=\, \int_{-R}^{R} f(x)\, \mathrm{e}^{-2\,i\,\pi\,z\,x}\, \mathrm{d}x\,.$$

On a bien sûr $F(\zeta) \,=\, \widehat{f}(\zeta)$ pour tout $\zeta \in \mathbb{R}$. De plus, la fonction $z \,\mapsto\, \mathrm{e}^{-2\,i\,\pi\,z\,x}$ étant entière (c'est-à-dire holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier) et puisqu'on intègre sur un compact, le théorème 4.6 montre que F est entière. Enfin, en intégrant successivement par parties (les termes de bord sont nuls car f est à support compact strictement inclus dans $]-R, R[$ par hypothèse), on a

$$(2\,i\,\pi\,z)^m\; F(z) \,=\, \int_{-R}^{R} f^{(m)}(x)\; \mathrm{e}^{-2\,i\,\pi\,z\,x}\, \mathrm{d}x$$

pour tout $z \,\neq\, 0$. On en déduit l'inégalité

$$|2\,\pi\,z|^m\; |F(z)| \,\leq\, 2\,R\, \max_{|x|\leq R} |f^{(k)}(x)|\;\; \mathrm{e}^{2\,\pi\,R\,|\mathrm{Im}(z)|}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. En additionnant avec l'inégalité

$$|F(z)| \,\leq\, 2\,R\, \max_{|x|\leq R} |f(x)|\;\; \mathrm{e}^{2\,\pi\,R\,|\mathrm{Im}(z)|}\,,$$

on obtient l'inégalité annoncée avec

$$C_m \,=\, 2\,R\,(\, \max_{|x|\leq R} |f(x)| \,+\, \max_{|x|\leq R} |f^{(k)}(x)|/(2\,\pi)^m\,)\,.$$

C'est la partie réciproque qui nécessite vraiment de l'analyse complexe. Le fait d'avoir une estimation de la forme

$$|F(\zeta)| \,\leq\, \frac{C_m}{(1\,+\,|\zeta|^m)}\,, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}\,,$$

à tout ordre montre exprime que la restriction de F à $\mathbb{R}$ est *à décroissance rapide*. Cette restriction est de plus de classe $\mathcal{C}^\infty$ puisqu'analytique. On admettra que cela implique que $F|_{\mathbb{R}}$ est la transformée de Fourier d'une fonction f également de classe $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide, et cette fonction f est définie par

$$f(x) \,=\, \int_{\mathbb{R}} F(\zeta)\, \mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,\zeta\,x}\, \mathrm{d}\zeta\,.$$

Montrons alors que f est en fait à support compact inclus dans $[-R, R]$. Soient $x \in \mathbb{R}$, $\eta \,>\, 0$, $M \,>\, 0$, et C le contour rectangulaire de sommets $\pm M$ et $\pm M + i\eta$. D'après le théorème de Cauchy,

$$\oint_C F(z)\, \mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,z\,x}\, \mathrm{d}z \,=\, 0\,.$$

Or d'après les inégalités de l'hypothèse, les termes correspondant aux intégrales sur les bords verticaux tendent vers 0 lorsque M tend vers $+\infty$. On en déduit à la limite

$$\int_{\mathbb{R}} F(\zeta)\, \mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,\zeta\,x}\, \mathrm{d}\zeta \,=\, \int_{\mathbb{R}} F(\zeta\,+\,i\,\eta)\, \mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,(\zeta+i\,\eta)\,x}\, \mathrm{d}\zeta\,,$$

c'est-à-dire
$$f(x) \,=\, \mathrm{e}^{-2\pi\eta x} \int_{\mathbb{R}} F(\zeta + i\,\eta)\,\mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,\zeta\,x}\,\mathrm{d}\zeta\,.$$
En utilisant une fois de plus les inégalités de l'hypothèse, on obtient
$$|f(x)| \,\leq\, C_2\,\mathrm{e}^{2\,\pi\,\eta\,(R-x)} \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{1\,+\,\zeta^2}\,.$$
Ceci est vrai quel que soit $\eta > 0$. Si $x \,>\, R$, en faisant tendre η vers $+\infty$, le membre de droite tend vers 0 : c'est donc que $f(x) \,=\, 0$! Le cas de $x \,<\, -R$ est analogue, en choisissant un contour avec $\eta < 0$. □

La transformation de Fourier joue un rôle fondamental en analyse mathématique et permet, entre autres, de résoudre certaines équations aux dérivées partielles (équation de la chaleur, équation de Schrödinger libre, etc.). La transformation de Laplace est une opération de même nature, mais agissant sur des signaux définis sur une demi-droite seulement, et pouvant être non bornés à l'infini : typiquement des signaux temporels, dépendant d'une variable $t \in \mathbb{R}^+$.

Définition 1.1 *Une fonction $f\,:\,\mathbb{R}^+ \,\rightarrow\, \mathbb{C}$ est dite de* type exponentiel $a \in \mathbb{R}$ *s'il existe $C > 0$ tel que*
$$|f(t)| \,\leq\, C\,\mathrm{e}^{a\,t}\,, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+\,.$$

La transformée de Laplace d'une fonction localement intégrable et de type exponentiel est naturellement une fonction de variable complexe, grâce à l'observation suivante (petite extension de la partie directe du théorème 1.1).

Proposition 1.1 *Soit $f\,:\,\mathbb{R}^+ \,\rightarrow\, \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable et de type exponentiel a. Alors la fonction $t \,\in\, \mathbb{R}^+ \,\mapsto\, f(t)\,\mathrm{e}^{-\gamma\,t}$ est intégrable pour tout $\gamma \,>\, a$, et la fonction*
$$s \,\mapsto\, \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-s\,t}\,\mathrm{d}t$$
est holomorphe dans le demi-plan complexe $\{\,s \,\in\, \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Re}s \,>\, a\,\}$.

Démonstration. C'est une application immédiate du théorème 4.6. En effet, la fonction $s \,\mapsto\, f(t)\,\mathrm{e}^{-s\,t}$ est entière, et pour $t \in \mathbb{R}^+$, $s \,=\, \gamma \,+\, i\,\xi$ avec $\gamma \,\geq\, \gamma_0 \,>\, a$,
$$|f(t)\,\mathrm{e}^{-s\,t}| \,\leq\, C\,\mathrm{e}^{(a-\gamma_0)\,t}\,.$$
Cette dernière fonction étant intégrable, on en déduit que la fonction
$$s \,\mapsto\, \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-s\,t}\,\mathrm{d}t$$
est holomorphe dans le demi-plan complexe $\{\,s \,\in\, \mathbb{C}\,;\ \mathrm{Re}s \,\geq\, \gamma_0\,\}$, et ceci est vrai quel que soit $\gamma_0 > a$. □

Définition 1.2 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable et de type exponentiel a. Sa* transformée de Laplace *est la fonction*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}[f] : \ \{ s \in \mathbb{C} ; \ \mathrm{Re} s > a \} & \to & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & \mathcal{L}[f](s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t) \, \mathrm{e}^{-s\,t} \, \mathrm{d}t \,. \end{array}$$

Remarque 1.1 *On peut aussi définir la transformée de Laplace d'une fonction qui n'est pas nécessairement d'ordre exponentiel, pourvu que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\gamma t} \ f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$. C'est le cas notamment pour $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ et $\gamma > 0$, puisque d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\int_0^{+\infty} | \, f(t) \, \mathrm{e}^{-\gamma t} \, | \, \mathrm{d}t \leq \left(\int_0^{+\infty} | \, f(t) \, |^2 \, \mathrm{d}t \right) \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\gamma t} \, \mathrm{d}t \right) = \frac{1}{2\gamma} \, \| f \|_{L^2}^2 \,.$$

Remarque 1.2 *La transformation de Laplace s'exprime au moyen de la transformation de Fourier à travers la relation*

$$\mathcal{L}[f](\gamma + i\,\xi) = \widehat{(f\,g)}\,(\tfrac{1}{2\pi}\,\xi) \,,$$

où la fonction g est le produit de la fonction de Heaviside (valant 1 sur $\mathbb{R}^+$ et 0 sur $]-\infty, 0[$) et de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\gamma t}$.

Remarque 1.3 *Le comportement d'une fonction lorsque $t \to 0$, respectivement $t \to +\infty$, est lié à celui de sa transformée de Laplace lorsque $|z| \to \infty$, respectivement $z \to 0$. Attention, ceci dépend tout de même de quelques hypothèses !*

Proposition 1.2 *Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^+$.*

- *Si f est* bornée *(c'est-à-dire à dire de type exponentiel 0 !) alors sa transformée de Laplace tend vers 0 à l'infini :*

$$\lim_{|s| \overset{\mathrm{Re}s>0}{\longrightarrow} +\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0 \,.$$

- *Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et sa dérivée est de type exponentiel, alors*

$$\lim_{|s| \overset{\mathrm{Re}s>0}{\longrightarrow} +\infty} s\,\mathcal{L}[f](s) = \lim_{t \searrow 0} f(t) \,.$$

- *Si f admet une dérivée intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors*

$$\lim_{z \overset{\mathrm{Re}s>0}{\longrightarrow} 0} s\,\mathcal{L}[f](s) = \lim_{t \to +\infty} f(t) \,.$$

Démonstration. Le premier point est tout à fait élémentaire : si $|f(t)| \leq M$ pour tout $t > 0$ alors

$$|\,\mathcal{L}[f](z)\,| \leq M \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}s\, t}\, \mathrm{d}t = \frac{M}{\mathrm{Re}s} \to 0$$

lorsque Re$s \to +\infty$. Le second point passe une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](s) &= \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} f'(t)\, \mathrm{e}^{-s\,t}\, \mathrm{d}t - \frac{1}{s} \left[f(t)\, \mathrm{e}^{-s\,t} \right]_{t=0}^{t=+\infty} \\ &= \frac{1}{s}\, \mathcal{L}[f'](s) + \frac{1}{s} \lim_{t \searrow 0} f(t) \end{aligned}$$

pour Re$s > 0$. Or d'après le premier point, $\mathcal{L}[f'](s)$ tend vers 0 lorsque Re$s \to +\infty$. Donc

$$s\, \mathcal{L}[f](s) \to \lim_{t \searrow 0} f(t)$$

lorsque Re$s \to +\infty$. Quant au dernier point, on reprend la formule ci-dessus, valable pour Re$s > 0$:

$$s\, \mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f'(t)\, \mathrm{e}^{-s\,t}\, \mathrm{d}t + f(0)\,.$$

On peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue à l'intégrale lorsque Re$s \searrow 0$, puisque $|\, f'(t)\, \mathrm{e}^{-s\,t}\,| \leq |f'(t)|$ et f' est intégrable par hypothèse. On en déduit :

$$\lim_{\mathrm{Re}s \searrow 0} \int_0^{+\infty} f'(t)\, \mathrm{e}^{-s\,t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f'(t)\; \mathrm{d}t = \lim_{t \to +\infty} f(t) - f(0)\,.$$

(Le fait que la limite de f en $+\infty$ existe résulte de l'hypothèse faite sur f'.) Finalement, le terme $f(0)$ se simplifie et il reste

$$\lim_{\mathrm{Re}s \searrow 0} s\, \mathcal{L}[f](s) = \lim_{t \to +\infty} f(t)\,.$$

□

La transformation de Laplace est en particulier très utile pour la résolution d'équations différentielles linéaires. Pour la mettre en œuvre on a besoin de connaître quelques transformées classiques et règles de calcul.

2 Transformées de Laplace élémentaires

• Commençons par la fonction la plus simple qui soit : la fonction constante égale à 1. (Rappelons que la transformée de Fourier n'est même pas une fonction !). C'est une fonction de type exponentiel 0. Par définition, sa transformée de Laplace au point s, de partie réelle strictement positive, vaut

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s\,t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{s}\,.$$

De façon plus générale, on peut calculer la transformée de Laplace de la fonction polynomiale $p_n \,:\, t \,\mapsto\, t^n$, pour $n \in \mathbb{N}$, qui est une fonction de type exponentiel $\varepsilon > 0$, quel que soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\mathcal{L}[p_n](s) \,=\, \int_0^{+\infty} t^n \, \mathrm{e}^{-\,s\,t} \, \mathrm{d}t \,=\, \frac{n\,!}{s^{n+1}}$$

après intégrations par parties successives.

• Voyons la fonction $e_a \,:\, t \,\mapsto\, \mathrm{e}^{a\,t}$, qui est évidemment de type exponentiel a. On a par définition

$$\mathcal{L}[e_a](s) \,=\, \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(a\,-\,s)\,t} \, \mathrm{d}t \,=\, \frac{1}{s\,-\,a}$$

pour $\mathrm{Re} s \,>\, a$. Par linéarité, on en déduit immédiatement les transformées des fonctions $ch_a \,:\, t \,\mapsto\, \mathrm{ch}(a\,t)$ et $sh_a \,:\, t \,\mapsto\, \mathrm{sh}(a\,t)$:

$$\mathcal{L}[\mathrm{ch}_a](s) \,=\, \frac{1}{2}\,(\,\mathcal{L}[e_a](s) \,+\, \mathcal{L}[e_{-a}](s)\,) \,=\, \frac{s}{s^2\,-\,a^2}$$

et

$$\mathcal{L}[\mathrm{sh}_a](s) \,=\, \frac{1}{2}\,(\,\mathcal{L}[e_a](s) \,-\, \mathcal{L}[e_{-a}](s)\,) \,=\, \frac{a}{s^2\,-\,a^2}$$

pour $\mathrm{Re} s \,>\, |a|$.

• De façon analogue, la fonction $t \,\mapsto\, \mathrm{e}^{i\,a\,t}$ (de type exponentiel 0), a pour transformée de Laplace $s \,\mapsto 1/(s\,-\,i\,a)$ pour $\mathrm{Re} s \,>\, 0$, et par linéarité, les transformées des fonctions $c_a \,:\, t \,\mapsto\, \cos(a\,t)$ et $s_a \,:\, t \,\mapsto\, \sin(a\,t)$ sont :

$$\mathcal{L}[c_a](s) \,=\, \frac{s}{s^2\,+\,a^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}[s_a](s) \,=\, \frac{a}{s^2\,+\,a^2}$$

pour $\mathrm{Re} s \,>\, 0$.

• La fonction $g \,:\, t \,\mapsto\, \mathrm{e}^{-\,t^2}$ est de type exponentiel arbitrairement petit, donc sa transformée de Laplace est une fonction entière. Elle est définie par

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\,t^2}\,\mathrm{e}^{-\,s\,t} \, \mathrm{d}t \,=\, \mathrm{e}^{s^2/4} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\,(t+s/2)^2} \, \mathrm{d}t \,=\, \mathrm{e}^{s^2/4} \int_{s/2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\,u^2} \, \mathrm{d}u$$

si s est réel. En introduisant la fonction (dite *error function*)

$$s \,\mapsto\, \mathrm{erf}(s) \,:=\, \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{s} \mathrm{e}^{-\,u^2} \, \mathrm{d}u\,,$$

et en se rappelant que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\,u^2} \, \mathrm{d}u \,=\, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

on peut réécrire

$$\mathcal{L}[g](s) \,=\, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{e}^{s^2/4}\,(\,1\,-\,\mathrm{erf}(s/2)\,)$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Opération		Chang.$^{\text{t}}$ d'échelle	Dérivation	Intégration
Fonction à transformer	$f(t)$	$(a>0)$ $f(a\,t)$	$f'(t)$	$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$
Transformée de Laplace	$F(s)$	$\frac{1}{a}\,F\left(\frac{s}{a}\right)$	$s\,F(s)\,-\,f(0)$	$F(s)/s$

Opération		Translation	Produit par ...	Produit par ...
Fonction à transformer	$f(t)$	$f(t-t_0)\,\mathbf{1}_{t\geq t_0}$	$\mathrm{e}^{a\,t}$ $\mathrm{e}^{a\,t}\,f(t)$	$t^n,\ n\in\mathbb{N}$ $t^n\,f(t)$
Transformée de Laplace	$F(s)$	$\mathrm{e}^{-t_0\,s}\,F(s)$	$F(s-a)$	$(-1)^n\,\frac{\mathrm{d}^nF}{\mathrm{d}s^n}(s)$

TAB. 4.1 – Formulaire de base pour la transformée de Laplace.

3 Règles de calcul

On démontre de façon élémentaire les formules rassemblées dans le tableau 3, en faisant les hypothèses nécessaires pour que ces formules aient un sens.

4 Transformation de Laplace inverse

La remarque 1.2 et la formule d'inversion de Fourier permettent de deviner quelle doit être la formule pour la transformation de Laplace inverse. En effet, supposons f localement intégrable et de type exponentiel a et $F\;=\;\mathcal{L}[f]$ intégrable sur la droite verticale $\{z\,;\ \mathrm{Re}z\;=\;\gamma\}$ avec $\gamma>a$. Alors d'après le théorème 3.2, pour $t\geq 0$,

$$f(t)\,\mathrm{e}^{-\gamma\,t}\;=\;\int_{-\infty}^{+\infty}\,F(\gamma\,+\,2\,i\,\pi\,\zeta)\,\mathrm{e}^{2\,i\,\pi\,\zeta\,t}\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

soit encore

$$f(t)\;=\;\frac{1}{2\,\pi}\,\int_{-\infty}^{+\infty}\,F(\gamma\,+\,i\,\xi)\,\mathrm{e}^{(\gamma\,+\,i\,\xi)\,t}\,\mathrm{d}\xi\;=\;\frac{1}{2\,i\,\pi}\,\int_{\mathrm{Re}s=\gamma}\,F(s)\,\mathrm{e}^{s\,t}\,\mathrm{d}s\,.$$

Remarque 4.1 *Si l'on sait de plus que $F(s)$ tend vers 0 lorsque* Ims *tend vers l'infini, alors le théorème de Cauchy (version n^o 1 !) montre que l'intégrale ci-dessus ne dépend pas de $\gamma\;>\;a$. En effet, considèrons un contour rectangulaire inclus dans le demi-plan $\{\,s\,;\ \mathrm{Re}s\;>\;a\,\}$ de sommets $\gamma_0\pm i\,R$ et $\gamma_1\pm i\,R$. Les intégrales sur les bords horizontaux tendent vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$ car :*

$$\left|\,\int_{\gamma_0}^{\gamma_1}\,F(\gamma\,\pm\,i\,R)\,\mathrm{e}^{(\gamma\,\pm\,i\,R)\,t}\,\mathrm{d}s\right|\;\leq\;(\gamma_1-\gamma_0)\,\mathrm{e}^{\gamma_1\,t}\,\max_{[\gamma_0,\gamma_1]}\,|\,F(\gamma\,\pm\,i\,R)\,|\,.$$

En utilisant cette approche et en traitant plus finement les intégrales sur les bords horizontaux, on démontre le résultat suivant, qui assure l'existence d'une transformée de Laplace inverse pour une classe bien précise de fonctions holomorphes.

Théorème 4.1 (Paley-Wiener) *Soit F une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{\, s\,;\ \mathrm{Re} s\, >\, 0\,\}$. On suppose F de carré intégrable sur toute droite verticale et que*

$$\sup_{\gamma>0} \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\, F(\gamma\, +\, i\,\xi)\,|^2\, \mathrm{d}\xi =:\, C\, <\, \infty\,.$$

Alors il existe $f\, \in\, L^2(\mathbb{R}^+)$ telle que $F\, =\, \mathcal{L}[f]$. De plus, $\|f\|_{L^2}^2\, =\, C$.

Démonstration. On va bien entendu utiliser la remarque 1.2 et ce qu'on sait de la transformation de Fourier. En particulier, puisque $\zeta \in \mathbb{R}\, \mapsto\, F(\gamma\, +\, 2\,i\,\pi\,\zeta)$ est de carré intégrable pour tout $\gamma\, >\, 0$, il existe une fonction $h_\gamma\, \in\, L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\widehat{h_\gamma}(\zeta)\, =\, F(\gamma\, +\, 2\,i\,\pi\,\zeta)$$

pour tout $\zeta\, \in\, \mathbb{R}$. Il s'agit de démontrer qu'en fait $h_\gamma(x)\, \mathrm{e}^{\gamma\, x}$ ne dépend pas de γ et que c'est une fonction de x à support dans $\mathbb{R}^+$.

Or, d'après la formule de Plancherel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\, h_\gamma(x)\,|^2\, \mathrm{d}x\, =\, \int_{-\infty}^{+\infty} |\, \widehat{h_\gamma}(\zeta)\,|^2\, \mathrm{d}\zeta\, =\, \int_{-\infty}^{+\infty} |\, F(\gamma\, +\, 2\,i\,\pi\,\zeta)\,|^2\, \mathrm{d}\zeta\, =\, C\,.$$

Si l'on montre qu'effectivement $f(x)\, :=\, h_\gamma(x)\, \mathrm{e}^{\gamma\, x}$ ne dépend pas de γ, alors l'estimation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\,2\,\gamma\, x}\, |\, f(x)\,|^2\, \mathrm{d}x\, \leq\, C\, <\, \infty$$

impliquera nécessairement $f_{|\mathbb{R}^{-*}}\, =\, 0$: il suffit de faire tendre γ vers $+\infty$ pour obtenir une contradiction au cas où f prendrait des valeurs non nulles sur un intervalle inclus dans $|\mathbb{R}^{-*}$.

Le gros du travail est donc de montrer que $h_\gamma(x)\, \mathrm{e}^{\gamma\, x}$ ne dépend pas de γ. Ceci est compliqué par le fait que nos hypothèses ne nous permettent pas d'utiliser la formule d'inversion de Fourier pour calculer $h_\gamma(x)$ (la fonction $\zeta\, \in\, \mathbb{R}\, \mapsto\, F(\gamma\, +\, 2\,i\,\pi\,\zeta)$ est seulement supposée de carré intégrable).

Fixons $x\, \in\, \mathbb{R}$ et considérons un contour rectangulaire Γ_R inclus dans le demi-plan $\{\, s\,;\ \mathrm{Re} s\, >\, 0\,\}$ de sommets $\gamma_0\, \pm\, i\,R$ et $\gamma_1\, \pm\, i\,R$ avec $\gamma_0\, <\, \gamma_1$. On a d'après le théorème de Cauchy

$$\int_{\Gamma_R} F(s)\, \mathrm{e}^{s\, x}\, \mathrm{d}s\, =\, 0\,.$$

Les intégrales sur les bords horizontaux sont de même nature et valent

$$I(\pm R)\, =\, \mp \int_{\gamma_0}^{\gamma_1} F(\gamma\, \pm\, i\,R)\, \mathrm{e}^{(\gamma\, \pm\, i\,R)\, x}\, \mathrm{d}\gamma\,.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|I(r)|^2 \leq \left(\int_{\gamma_0}^{\gamma_1} |\,F(\gamma\,+\,i\,r)\,|^2\,\mathrm{d}\,\gamma\right)\left(\int_{\gamma_0}^{\gamma_1} \mathrm{e}^{2\,\gamma\,x}\,\mathrm{d}\gamma\right).$$

De plus, d'après le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\gamma_0}^{\gamma_1} |\,F(\gamma\,+\,i\,r)\,|^2\,\mathrm{d}\,\gamma\,\mathrm{d}r &= \int_{\gamma_0}^{\gamma_1}\int_{-\infty}^{+\infty} |\,F(\gamma\,+\,i\,r)\,|^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\gamma \\ &\leq 2\,\pi\,C\,(\gamma_1-\gamma_0) < \infty\,.\end{aligned}$$

Ceci implique l'existence d'une suite strictement croissante (R_n) tendant vers $+\infty$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\gamma_0}^{\gamma_1} |\,F(\gamma\,\pm\,i\,R_n)\,|^2\,\mathrm{d}\,\gamma = 0\,.$$

En effet, avant de construire (R_n), on commence par prouver que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $M > 0$ il existe $R \geq M$ tel que

$$\int_{\gamma_0}^{\gamma_1} |\,F(\gamma\,\pm\,i\,R)\,|^2\,\mathrm{d}\,\gamma \leq \varepsilon\,.$$

(s'il existait $\varepsilon_0 > 0$ et $M_0 > 0$ tels que pour tout $R \geq M_0$ l'intégrale soit supérieure à ε, alors l'intégrale double ci-dessus en (r, γ) serait infinie). Il est alors facile de construire par récurrence une suite strictement croissante (R_n) tendant vers $+\infty$ telle que

$$\int_{\gamma_0}^{\gamma_1} |\,F(\gamma\,\pm\,i\,R_n)\,|^2\,\mathrm{d}\,\gamma \leq \frac{1}{n+1}$$

par exemple.

D'où aussi $\lim_{n\to+\infty} I(\pm R_n) = 0$. Il reste donc à la limite dans l'égalité fournie par le théorème de Cauchy sur les contours Γ_{R_n} les seules intégrales sur les droites verticales :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-R_n}^{R_n} F(\gamma_1\,+\,i\,\xi)\,\mathrm{e}^{(\gamma_1\,+\,i\,\xi)\,x}\,\mathrm{d}\xi - \int_{-R_n}^{R_n} F(\gamma_0\,+\,i\,\xi)\,\mathrm{e}^{(\gamma_0\,+\,i\,\xi)\,x}\,\mathrm{d}\xi = 0\,.$$

Si l'on sait que $\zeta \in \mathbb{R} \mapsto F(\gamma_0 + \pi\,\xi)$ et $\zeta \in \mathbb{R} \mapsto F(\gamma_1 + i\,\pi\,\xi)$ sont intégrables, on en déduit directement par la formule d'inversion de Fourier que $h_{\gamma_1}(x)\,\mathrm{e}^{\gamma_1\,x} = h_{\gamma_1}(x)\,\mathrm{e}^{\gamma_0\,x}$. Sinon on utilise le fait que, quel que soit γ la suite de fonctions $(G_n : \xi \mapsto \mathbf{1}_{|\xi|\leq R_n}\,F(\gamma + i\,\xi))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^2 vers $\xi \mapsto F(\gamma\,+\,i\,\xi))$. Ceci implique que la transformée de Fourier inverse de G_n (qui est donnée par la formule d'inversion puisque G_n est à support compact) convergent dans L^2 vers la transformée de Fourier inverse de $\xi \mapsto F(\gamma\,+\,i\,\xi))$ c'est-à-dire h_γ par définition. Or la convergence dans L^2 implique, au prix de l'extraction d'une sous-suite, la convergence presque partout. Donc pour presque tout x,

$$\lim_{n'\to+\infty}\int_{-R_{n'}}^{R_{n'}} F(\gamma_1\,+\,i\,\xi)\,\mathrm{e}^{i\,\xi)\,x}\,\mathrm{d}\xi = h_\gamma(x)\,.$$

Par suite

$$h_{\gamma_1}(x)\,\mathrm{e}^{\gamma_1 x} \;=\; h_{\gamma_1}(x)\,\mathrm{e}^{\gamma_0 x}$$

pour presque tout x. $\square$

Remarque 4.2 *Pour une fonction F holomorphe dans le demi-plan $\{\,s\,;\ \mathrm{Re}s \,>\, a\,\}$ avec a un nombre réel non nécessairement nul, et*

$$\sup_{\gamma>a}\frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\,F(\gamma\,+\,i\,\xi)\,|^2\,\mathrm{d}\xi \;<\;\infty\,,$$

on obtient aussi une transformée de Laplace inverse f, qui n'est pas dans L^2 (si $a > 0$) mais telle que $t \;\mapsto\; \mathrm{e}^{-\,a\,t}\,f(t)$ soit dans L^2. On utilise pour cela le fait que $s \;\mapsto\; F(s+a)$ satisfait les hypothèses du théorème 4.1 et l'observation présente dans le tableau 3

$$\mathcal{L}[t \;\mapsto\; \mathrm{e}^{-\,a\,t}\,f(t)](s) \;=\; \mathcal{L}[f](s+a)\,.$$

Ainsi donc, sous les hypothèses du thèorème 4.1 et l'hypothèse supplémentaire $\zeta \in \mathbb{R} \;\mapsto\; F(\gamma\,+\,i\,\pi\,\xi)$ intégrable, on a bien la formule attendue pour la transformée de Laplace inverse f de F

$$f(t) \;=\; \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\gamma\,+\,i\,\xi)\,\mathrm{e}^{(\gamma\,+\,i\,\xi)\,t}\,\mathrm{d}\xi \;=\; \frac{1}{2\,i\,\pi}\int_{\mathrm{Re}s=\gamma} F(s)\,\mathrm{e}^{s\,t}\,\mathrm{d}s\,.$$

On peut utiliser cette formule et la théorie des résidus pour calculer f. La méthode consiste alors à considérer un contour constitué du segment $[\gamma\,-\,i\,M\,,\,\gamma\,+\,i\,M]$ fermé à gauche par un arc de cercle.

Théorème 4.2 *Supposons que F soit une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash\{z_0,\ldots,z_n\}$. Soit $\gamma \,>\, \max(0,\mathrm{Re}z_0,\ldots,\mathrm{Re}z_n)$. On suppose de plus qu'il existe $C > 0$ et $m > 0$ tels que pour tout z, $\mathrm{Re}z \;\leq\; \gamma$,*

$$|F(z)| \;\leq\; \frac{C}{|z|^m}\,.$$

Alors on a pour tout $t > 0$,

$$\frac{1}{2\,i\,\pi}\int_{\mathrm{Re}s=\gamma} F(s)\,\mathrm{e}^{s\,t}\,\mathrm{d}s \;=\; \sum_{k=0}^{n} \text{Rés}\left(F\,\mathrm{e}^{t\cdot}\,;z_k\right)\,,$$

où l'intégrale est semi-convergente si $m \in]0,1]$ et absolument convergente si $m > 1$. Si de plus les points $z_0,\ldots,z_n$ sont des pôles de F alors la fonction $f\,:\;t \;\mapsto\; \frac{1}{2\,i\,\pi}\int_{\mathrm{Re}s=\gamma} F(s)\,\mathrm{e}^{s\,t}\,\mathrm{d}s$ est de type exponentiel et $\mathcal{L}[f] \;=\; F$.

Démonstration. On fixe une fois pour toutes $\gamma > \max(0, \mathrm{Re}z_0, \dots, \mathrm{Re}z_n)$. Le fait que l'intégrale $\int_{\mathrm{Re}s=\gamma} F(s)\, \mathrm{e}^{s\,t}\, \mathrm{d}s$ soit semi-convergente découle classiquement d'intégrations par parties.

Soit $R > 0$. Il existe un unique $\alpha \in]0, \pi/2[$ tel que $R\, \cos\alpha = \gamma$. On note $M = \sin\alpha$ et on considère le contour

$$\Gamma_R = \{\, z\,;\, \mathrm{Re}z = \gamma \text{ et } \mathrm{Im}z \in [-M, M] \} \cup \{\, z = R\,\mathrm{e}^{i\,\theta}\,;\ \theta \in [\alpha, 2\pi - \alpha]\, \}$$

orienté dans le sens trigonométrique. Si $R > \max(|z_0|, \dots, |z_n|)$, tous les points $z_0, \dots, z_n$ sont à l'intérieur de Γ_R et le théorème des résidus montre donc que

$$\int_{\Gamma_R} F(z)\, \mathrm{e}^{z\,t}\, \mathrm{d}z = 2\, i\, \pi \sum_{k=0}^{n} \text{Rés}\left(F\, \mathrm{e}^{t\cdot}\, ;\, z_k\right) .$$

Tout le travail consiste à montrer que l'intégrale sur l'arc de cercle

$$C_R := \{\, z = R\,\mathrm{e}^{i\,\theta}\,;\ \theta \in [\alpha, 2\pi - \alpha]\, \}$$

tend vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$. Car alors, on en déduira que l'intégrale sur le segment $\{\, z\,;\, \mathrm{Re}z = \gamma$ et $\mathrm{Im}z \in [-M, M]\}$ a une limite lorsque R (et donc M) tend vers $+\infty$, ce qui signifie que l'intégrale $\int_{\mathrm{Re}s=\gamma} F(s)\, \mathrm{e}^{s\,t}\, \mathrm{d}s$ est semi-convergente, et qu'en plus elle vaut $2\, i\, \pi \sum_{k=0}^{n} \text{Rés}\,(F\, \mathrm{e}^{t\cdot}\, ;\, z_k)$ comme annoncé.

Or

$$\left| \int_{C_R} F(z)\, \mathrm{e}^{z\,t}\, \mathrm{d}z \right| = \left| \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} F(R\,\mathrm{e}^{i\theta})\, \mathrm{e}^{R\,t\,\mathrm{e}^{i\theta}}\, i\, R\,\mathrm{e}^{i\theta}\, \mathrm{d}\theta \right| \leq \frac{C}{R^{m-1}} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \mathrm{e}^{R\,t\,\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta\,.$$

La clé de la démonstration réside dans la dépendance de α par rapport à R : rappelons que $R\, \cos\alpha = \gamma$. On décompose :

$$\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \mathrm{e}^{R\,t\,\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta = \int_{\alpha}^{\pi/2} \mathrm{e}^{R\,t\,\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \mathrm{e}^{R\,t\,\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta + \int_{3\pi/2}^{2\pi-\alpha} \mathrm{e}^{R\,t\,\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta\,.$$

L'intégrale du milieu se traite de façon classique. Pour tout $t > 0$ on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \mathrm{e}^{R\,t\,\cos\theta}\, \mathrm{d}\theta &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-R\,t\,\sin\theta}\, \mathrm{d}\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-R\,t\,\sin\theta}\, \mathrm{d}\theta \\
&\leq 2 \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-R\,t\,\theta/(2\pi)}\, \mathrm{d}\theta \\
&\leq \frac{4\pi}{R\,t}\,.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\int_{\alpha}^{\pi/2} \mathrm{e}^{R\,t\,\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \leq \int_{\alpha}^{\pi/2} \mathrm{e}^{R\,t\,\cos\alpha}\,\mathrm{d}\theta \;=\; (\pi/2-\alpha)\,\mathrm{e}^{\gamma\,t}\,.$$

Or

$$\sin(\pi/2-\alpha) \;=\; \cos\alpha \;=\; \frac{\gamma}{R}\,,$$

donc $(\pi/2-\alpha) \;\sim\; \frac{\gamma}{R}$ lorsque R tend vers $+\infty$. La dernière intégrale se traite de façon analogue. On en déduit l'existence de $K = K(t;\gamma) > 0$ tel que

$$\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \mathrm{e}^{R\,t\,\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \;\leq\; \frac{K}{R}\,,$$

ce qui suffit, avec $m > 0$, pour montrer que $\int_{C_R} F(z)\,\mathrm{e}^{z\,t}\,\mathrm{d}z$ tend vers 0.

Ceci prouve donc la formule

$$\frac{1}{2\,i\,\pi}\int_{\mathrm{Re}s=\gamma} F(s)\,\mathrm{e}^{s\,t}\,\mathrm{d}s \;=\; \sum_{k=0}^{n} \text{Rés}\left(F\,\mathrm{e}^{t\cdot}\,;z_k\right)\,.$$

Si les points $z_0,\ldots,z_n$ sont des pôles, alors on montre facilement que les résidus sont des fonctions de t de type exponentiel. En effet, à un pôle z_k correspond une suite $(c_j^k)_{j=1..p}$ telle que

$$z \;\mapsto\; F(z) \;-\; \sum_{j=1}^{p} \frac{c_j^k}{(z-z_k)^j}$$

ait une singularité artificielle en z_k. Par suite,

$$\text{Rés}\left(F\,\mathrm{e}^{t\cdot}\,;z_k\right) \;=\; \sum_{j=1}^{p} c_j^k\,\text{Rés}\left(z \;\mapsto\; \frac{\mathrm{e}^{t\,z}}{(z-z_k)^j}\,;z_k\right) \;=\; \sum_{j=1}^{p} c_j^k\,\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\,\mathrm{e}^{t\,z_k}\,.$$

Pour finir, on vérifie sans peine que la transformée de Laplace de $t \;\mapsto\; \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\,\mathrm{e}^{t\,z_k}$ est $s \;\mapsto\; \frac{1}{(s-z_k)^j}$. Comme la fonction

$$z \;\mapsto\; F(z) \;-\; \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{p} \frac{c_j^k}{(z-z_k)^j}$$

est entière et d'après l'hypothèse sur F, majorée en module par une constante sur $|z|^m$, $m \;>\; 0$, cette fonction est identiquement nulle grâce au théorème 9.2 (Liouville). Ceci prouve que $\mathcal{L}[f] \;=\; F$.

□

Exemple. La fonction $z \mapsto F(z) = \frac{1}{z-a}$ satisfait les hypothèses du théorème avec $m = 1$. Et on a immédiatement

$$\text{Rés}\left(F\,\mathrm{e}^{t\cdot}\,;a\right) \;=\; \mathrm{e}^{t\,a}\,.$$

On retrouve le résultat connu.

Dans le cas d'une simple fonction rationnelle, on peut aussi bien utiliser sa *décomposition en éléments simples* et obtenir de façon élémentaire sa transformée de Laplace inverse comme combinaison de fonctions trigonométriques et hyperboliques.

Mais pour des fonctions plus compliquées, la théorie des résidus s'avère utile.

Une autre approche pour calculer une transformée de Laplace inverse consiste à décomposer la fonction donnée en produits de fonctions dont on connaît les transformées inverses et à utiliser le résultat général suivant. Pour cela, rappelons que la transformée de Fourier change les produits en produits de convolution : si h et k sont deux fonctions intégrables, alors la fonction $h * h$, définie par

$$(h \,*\, k)(x) \;=\; \int\; h(x-y)\;k(y)\;\mathrm{d}y$$

a pour transformée de Fourier le produit $\widehat{h}\,\widehat{k}$. Appliquons ce résultat à $h(t) \;=\; \mathbf{1}_{t\geq 0}(t)\;\mathrm{e}^{-\gamma\,t}\,f(t)$ et $k(t) \;=\; \mathbf{1}_{t\geq 0}(t)\;\mathrm{e}^{-\gamma\,t}\,g(t)$. On a alors

$$(h \,*\, k)(t) \;=\; \mathbf{1}_{t\geq 0}(t)\;\mathrm{e}^{-\gamma\,t}\int_0^t\; f(t-y)\;g(y)\;\mathrm{d}y\,.$$

Afin d'éviter les confusions, notons $f \star g$ la fonction définie par :

$$(f \,\star\, g)(t) \;=\; \int_0^t\; f(t-y)\;g(y)\;\mathrm{d}y\,.$$

L'opération $\star$ est aussi appelée *produit de convolution*.

Proposition 4.1 *Si f et g sont deux fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}^+$ et de type exponentiel a et b respectivement, alors la fonction*

$$t \geq 0 \;\mapsto\; (f \,\star\, g)(t) \;=\; \int_0^t\; f(t-y)\;g(y)\;\mathrm{d}y$$

est aussi localement intégrable et de type exponentiel $c = \max(a, b)$.

Démonstration. On remarque comme dans le cas de la convolution sur $\mathbb{R}$ que $\star$ est symétrique (faire le changement de variables $u = t - y$). Supposons $a \leq b$. Alors il existe une constante C telle que

$$|(f \,\star\, g)(t)| \;\leq\; C\;\int_0^t\; \mathrm{e}^{b\,(t-y)}\;\mathrm{e}^{a\,y}\;\mathrm{d}y \;=\; C\,\mathrm{e}^{b\,t}\;\frac{1}{b-a}\;(1 \,-\, \mathrm{e}^{(a-b)\,t}) \;\leq\; \frac{C}{b-a}\,\mathrm{e}^{b\,t}\,.$$

□

Ainsi

$$\mathcal{L}[f \star g](\gamma + i\,\xi) = (\widehat{h * k})(\frac{1}{2\pi}\xi) = (\widehat{h}\,\widehat{k})(\frac{1}{2\pi}\xi) = \mathcal{L}[f](\gamma + i\,\xi)\,\mathcal{L}[g](\gamma + i\,\xi)\,.$$

Autrement dit, la transformée de Laplace inverse d'un produit, si elle existe, est le produit de convolution des transformées de Laplace inverses de chaque terme du produit. On peut aussi voir cette formule directement.

Proposition 4.2 *Si f et g sont deux fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}^+$ et de type exponentiel alors*

$$\mathcal{L}[f \star g] = \mathcal{L}[f]\,\mathcal{L}[g]\,.$$

Démonstration. Par définition,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f \star g](s) &= \int_0^{+\infty}\int_0^t f(t-y)\,g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{e}^{-s\,t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty}\int_t^{+\infty} f(t-y)\,\mathrm{e}^{-s\,(t-y)}\quad g(y)\,\mathrm{e}^{-s\,y}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(u)\,\mathrm{e}^{-s\,u}\quad g(y)\,\mathrm{e}^{-s\,y}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u \\ &= \mathcal{L}[f](s)\,\mathcal{L}[g](s)\,. \end{aligned}$$

□

Cette propriété, la théorie des résidus et le tableau 3 permettent de calculer bon nombre de transformées de Laplace inverses. On va voir que c'est utile par exemple pour résoudre des équations différentielles ou aux dérivées partielles.

5 Applications de la transformation de Laplace

La transformation de Laplace est précieuse pour résoudre des problèmes d'évolution sous forme d'équations différentielles *linéaires*. De façon générale, soit à résoudre le système d'équations différentielles linéaires

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\,\mathbf{u} + \mathbf{f}\,,$$

où l'inconnue $\mathbf{u}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $\mathbf{A}$ est une matrice $d \times d$ à coefficients réels, et $\mathbf{f}$ est une fonction donnée (correspondant à un forçage, souvent appelé *terme source*). Si $\mathbf{A}$ est *indépendante* de t, l'exponentielle complexe fournit la solution explicite à ce problème, sous la forme :

$$\mathbf{u}(t) = \mathrm{e}^{t\,\mathbf{A}}\,\mathbf{u}(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\,\mathbf{A}}\,\mathbf{f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Cependant, cette expression a l'inconvénient de nécessiter le calcul de $\mathrm{e}^{\mathbf{A}}$, qui n'est pas toujours aisé (il faut en principe réduire $\mathbf{A}$ dans une base de vecteurs propres, éventuellement généralisés si $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable). De plus, cette expression est réservée aux systèmes *à coefficients constants*, c'est-à-dire $\mathbf{A}$ indépendant de t. On va voir que la transformation de Laplace permet de résoudre plus facilement le problème à coefficients constants, et aussi de résoudre certains problèmes à coefficients variables.

Commençons par le cas d'un système à coefficients constants et appliquons lui la transformation de Laplace. En désignant $\mathbf{U} = \mathcal{L}[\mathbf{u}]$, $\mathbf{F} = \mathcal{L}[\mathbf{f}]$ et $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0)$ on doit avoir

$$s\,\mathbf{U}(s) - \mathbf{u}_0 = \mathbf{A}\,\mathbf{U}(s) + \mathbf{F}(s)\,.$$

Si

$$\mathrm{Re}s > a := \max\{\,\mathrm{Re}\lambda\,;\ \text{dét}\,(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0\,\}$$

on en déduit de façon équivalente :

$$\mathbf{U}(s) = (\,s\mathbf{I} - \mathbf{A}\,)^{-1}\,(\,\mathbf{u}_0 + \mathbf{F}(s)\,)$$

et donc, au moins formellement :

$$\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2\,i\,\pi}\int_{\mathrm{Re}s=\gamma} \mathrm{e}^{s\,t}\,(\,s\mathbf{I} - \mathbf{A}\,)^{-1}\,(\,\mathbf{u}_0 + \mathbf{F}(s)\,)\,\mathrm{d}s$$

pour $\gamma > a$ et $t > 0$. Cette formule abstraite est fort utile dans l'analyse mathématique de problèmes d'évolution. Plus concrètement, le calcul de la transformée de Laplace inverse de $s \mapsto (\,s\mathbf{I} - \mathbf{A}\,)^{-1}\,(\,\mathbf{u}_0 + \mathbf{F}(s)\,)$ permet de calculer la solution explicite du système d'équations différentielles pour une quelconque donnée initiale $\mathbf{u}_0$. En pratique, ceci nécessite seulement l'inversion de la matrice $(\,s\mathbf{I} - \mathbf{A}\,)$ (en fait, un pivot de Gauss) et non la réduction complète de $\mathbf{A}$.

La transformée de Laplace est aussi utile pour la résolution de certains problèmes à coefficients variables. Plus précisément, si une équation scalaire d'ordre n

$$y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \cdots + a_0\,y = f$$

(qui peut toujours s'écrire sous forme d'un système en condisérant l'inconnue vectorielle $\mathbf{u}$ de composantes $(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$) a des coefficients polynomiaux de degré m strictement inférieur à n, la transformation de Laplace change cette équation en une équation d'ordre m (donc en principe plus facile à résoudre que l'équation de départ).

A Appendice : compléments de calcul différentiel et intégral

Un théorème fondamental pour les passages à la limite sous le signe $\int$ est le

Théorème A.1 (de convergence dominée de Lebesgue) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur un intervalle I (pas nécessairement borné) de $\mathbb{R}$ (ce qui signifie f_n mesurable, et $\int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$ quel que soit n). On suppose que*

$$f_n(t) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(t) \quad \textit{pour presque tout } \; t \in I\,,$$

et il existe une fonction intégrable g telle que

$$|f_n(t)| \leq g(t) \quad \textit{pour presque tout } \; t \in I\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

À l'origine de ce théorème se trouve un lemme parfois utile en soi.

Lemme A.1 (Fatou) *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Alors*

$$\int \liminf_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

On déduit du théorème de Lebesgue des résultats de continuité et de dérivabilité sous le signe $\int$:

Corollaire A.1 *Soit f une fonction de $(\mathbf{x},t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ telle que $t \mapsto f(\mathbf{x},t)$ soit intégrable sur un intervalle I pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x},t)$ soit* continue *au point $x_0 \in \Omega$ pour presque tout $t \in I$. S'il existe une fonction intégrable g telle que*

$$|f(\mathbf{x},t)| \leq g(t) \quad \textit{pour presque tout } \; t \in I \; \textit{ et pour tout } \; x \in \Omega\,,$$

alors l'application

$$F\,:\,\mathbf{x} \mapsto \int_I f(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}t$$

est continue au point $\mathbf{x}_0$.

Corollaire A.2 *Soit f une fonction de $(\mathbf{x},t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ telle que $t \mapsto f(\mathbf{x},t)$ soit intégrable sur un intervalle I pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x},t)$ soit* différentiable *au point $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ pour presque tout $t \in I$. S'il existe une fonction intégrable g telle que*

$$|\mathrm{d}f(\mathbf{x},t)| \leq g(t) \quad \textit{pour presque tout } \; t \in I \; \textit{ et pour tout } \; \mathbf{x} \in \Omega\,,$$

alors l'application

$$F \, : \, \mathbf{x} \, \mapsto \, \int_I f(\mathbf{x}, t) \, \mathrm{d}t$$

est différentiable au point $\mathbf{x}_0$ *et ses dérivées partielles sont données par*

$$\partial_{x_j} F(\mathbf{x}) \, = \, \int_I \partial_{x_j} f(\mathbf{x}, t) \, \mathrm{d}t \, .$$

En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, on en déduit un résultat analogue pour les fonctions holomorphes :

Corollaire A.3 *Soit f une fonction de $(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ telle que $t \, \mapsto \, f(z, t)$ soit intégrable sur un intervalle I pour tout $z \in \Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$, et $z \, \mapsto \, f(z, t)$ soit* holomorphe *au point $z_0 \in \Omega$ pour presque tout $t \in I$. S'il existe une fonction intégrable g telle que*

$$|\partial_z f(z, t)| \, \leq \, g(t) \quad \textit{pour presque tout} \;\; t \in I \;\; \textit{et pour tout} \;\; z \in \Omega \, ,$$

alors l'application

$$F \, : \, z \, \mapsto \, \int_I f(z, t) \, \mathrm{d}t$$

est holomorphe au point z_0 et sa dérivée est donnée par

$$\partial_z F(z) \, = \, \int_I \partial_z f(z, t) \, \mathrm{d}t \, .$$

Une autre résultat fondamental du calcul intégral est le

Théorème A.2 (de Fubini) *Si f est une fonction de deux variables réelles et à valeurs dans $\mathbb{C}$, mesurable et intégrable sur $X \times Y$, c'est-à-dire telle que*

$$\int_{X \times Y} |f(x, y)| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, < \, +\infty \, ,$$

alors $f(\cdot, y)$ est intégrable sur X pour presque tout $y \in Y$, de même que $f(x, \cdot)$ est intégrable sur Y pour presque tout $x \in X$, et

$$\int_X \Big(\int_Y f(x, y) \, \mathrm{d}y \Big) \, \mathrm{d}x \, = \, \int_Y \Big(\int_X f(x, y) \, \mathrm{d}x \Big) \, \mathrm{d}y \, .$$