Cours de Mathématiques 2
première partie : Analyse 2

DEUG MIAS 1^e année, 2^e semestre.

Maximilian F. Hasler

Département Scientifique Interfacultaire

B.P. 7209 — F–97275 SCHOELCHER CEDEX

Fax : 0596 72 73 62 — e-mail : `mhasler@univ-ag.fr`

version du 21 avril 2002

Table des matières

Préface 3

Préface à la deuxième édition 4

1 Calcul intégral 5

1.1 Intégrale de Riemann 5
1.1.1 Subdivisions et sommes de Darboux 5
1.1.2 Fonctions Riemann–intégrables, intégrale de Riemann 7
1.1.3 Sommes de Riemann 9
1.2 Propriétés de l'intégrale de Riemann 11
1.3 Intégrale de Riemann et primitives 14
1.3.1 Primitive d'une fonction continue 15
1.4 Pratique du Calcul intégral 16
1.4.1 Intégrale indéfinie 17
1.4.2 Primitives des fonctions usuelles 17
1.4.3 Intégration par parties 18
1.4.4 Formule de Taylor avec reste intégral 20
1.4.5 Changement de variable d'intégration 21
1.4.6 Formule de la moyenne généralisée. 22
1.5 Intégration de fractions rationnelles : décomposition en éléments simples 24
1.5.1 Division euclidienne 24
1.5.2 Polynômes irreductibles 25
1.5.3 Pôles et éléments simples 26
1.5.4 Calcul des coefficients d'une décomposition en éléments simples 27
1.5.5 Application au calcul de primitives 30
1.5.6 Primitives des fonctions rationnelles de $\sin x$ et $\cos x$ 32
1.5.7 Autres fractions rationnelles 33

Préface

Ces notes de cours sont issues de l'enseignement du module de Mathématiques 2 (U.E. MIP2) du DEUG MIAS, au Département Scientifique Interfacultaire de l'Université Antilles–Guyane (campus de Schoelcher), au printemps 2001.

La première partie « Analyse 2 » de ce cours traite des sujets

1. Calcul intégral,
2. Fonctions équivalentes et développements limités,
3. Equations différentielles du 1^{er} et 2^{nd} ordre,
4. Fonctions à valeur dans $\mathbb{R}^2$ et courbes paramétrées.

Cette partie est la suite du cours de Mathématiques 1 du premier semestre, qui traitait des sujets

0. Eléments de logique élémentaire,
1. Calcul dans $\mathbb{R}$,
2. Suites réelles (convergence, limite,...),
3. Calcul dans $\mathbb{C}$ et fonctions circulaires,
4. Fonctions numériques de la variable réelle,
5. Fonctions usuelles et fonctions réciproques.

Dans le présent cours, on fera éventuellement appel à des notions faisant partie de ces sujets, qui devraient donc être maîtrisés.

Le chapitre sur le calcul intégral est de loin le plus volumineux. Il commence par une introduction à l'intégrale de Riemann. Cette notion ne figure pas explicitement au programme, on peut donc passer directement à la notion de primitive et ainsi définir l'intégrale indéfinie et définie. (Dans ce cas, le théorème fondamental du calcul infinitésimal devient trivial, et seules les fonctions continues sont intégrables.) Le chapitre termine sur la décomposition en éléments simples, qui en constitue presque la moitié. Dans cette partie plutôt algébrique, on admet quelques résultats concernant la décomposition de polynômes.

Etant limité dans le temps (ce cours devrait être enseigné en un total de 16 heures), on peut admettre quelques autres démonstrations un peu techniques (intégrabilité de fonctions continues, théorème de Taylor-Young).

Les chapitres sont presque indépendants, mais on utilise l'intégration pour les équations différentielles, et les développements limités pour l'analyse des points singuliers des courbes paramétrées. Notons aussi que nous faisons le lien avec l'algèbre linéaire (notion de sous-espace vectoriel, application linéaire, noyau) lors de l'intégration et dans le cadre des équations différentielles linéaires.

En cette année 2001, le cours magistral a commencé avec le 2^e chapitre, pour pouvoir donner plus rapidement des exercices calculatoires aux étudiants (par rapport au chapitre sur l'intégration, qui comprend une partie théorique avant de donner les techniques pour des calculs appliqués.

En ce qui concerne les équations différentielles, on se limite à celles du 1er ordre qui sont à variables séparées ou alors linéaires, et celles du 2nd ordre qui sont linéaires, à coefficients constants.

Schoelcher, mai 2001

Préface à la deuxième édition

La structure globale du cours n'a pas changé, mais quelques modifications concernant la mise en page et la présentation ont été faites.

Les fonctions négligeables et équivalentes constituent maintenant des sous-chapitres indépendantes précédant celui des D.L.

Quelques notions concernant l'intégrale de Riemann sont présentés un peu différemment, et une figure a été ajoutée.

Les passages trop sommaires dans les D.L. ont été complétés.

Quelques erreurs ont été éliminées et une figure ajoutée dans le dernier chapitre.

Schoelcher, avril 2002

1 Calcul intégral

Ce chapitre donne une introduction à l'intégrale de Riemann, et de quelques propriétés fondamentales qui sont conséquence des définitions.

Ensuite, on établit le lien entre cette intégrale et les primitives, pour enfin se dédier à la pratique du calcul intégral avec quelques recettes. Une grande partie du cours est consacrée aux méthodes de la décomposition en éléments, pour l'intégration des fractions rationelles.

1.1 Intégrale de Riemann

Le programme ne précise pas si la définition de l'intégrale de Riemann doit figurer dans le cours. Certains collègues commencent ce cours directement avec la définition de la primitive d'une fonction, et $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := F(b) - F(a)$ Ainsi, le théorème fondamental de l'analyse, qui établit le lien entre l'intégration et la dérivation, devient trivial.

A mon avis, ce cours est quand même l'occasion ou jamais de définir l'intégrale de Riemann. Même si on passe sur les détails, on peut donner les trois définitions de ce premier chapitre et évoquer l'interprétation géométrique qui est très liée à la définition des sommes de Darboux.

1.1.1 Subdivisions et sommes de Darboux

Définition 1 *Une* **subdivision** *d'ordre n d'un intervalle $[a, b]$ est une partie finie $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ telle que*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\,.$$

On notera $S_{a,b}$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

Exemple 1.1.1 (subdivision équidistante) *Lorsque $x_i = a + i\,h$ avec $h = \frac{b-a}{n}$, on parle de la* subdivision équidistante d'ordre n *de $[a, b]$; on la note parfois $[a, b]_n$. Le nombre h est le* pas (uniforme) *de cette subdivision.*

Définition 2 *La* **somme de Darboux inférieure** *resp.* **supérieure** *de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ relativement à une subdivision $X = \{x_0, \dots, x_n\}$ sont définies par*

$$s(f,X) := \sum_{i=1}^{n} h_i \inf f(I_i) \text{ resp. } S(f,X) := \sum_{i=1}^{n} h_i \sup f(I_i) \, ,$$

où $h_i = x_i - x_{i-1}$ est la longueur du i^e sous-intervalle $I_i = [x_{i-1}, x_i]$.

Les sommes de Darboux sont des réels bien définis ssi la fonction f est bornée, c'est-à-dire$\exists M \in \mathbb{R} : f([a,b]) \subset [-M, M]$.

Sauf mention du contraire, dans tout ce qui suit, les fonctions considérées seront toujours bornées sur l'intervalle en question, sans que celà soit nécessairement dit explicitement.

Remarque 1.1.1 *Etudier l'***interprétation géométrique** *des sommes de Darboux comme aire des rectangles de base $[x_{i-1}, x_i]$, encadrant l'épigraphe de f de en-dessous resp. au-dessus.*

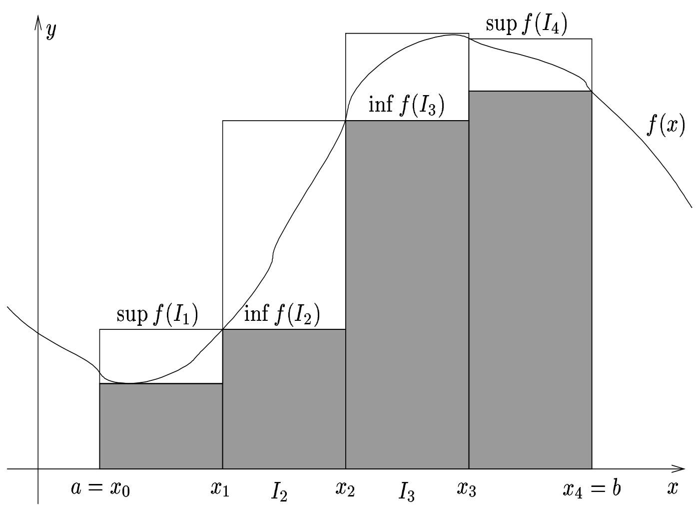

FIG. 1 – Somme de Darboux inférieure (hachurée) et supérieure (hachuré plus blanc) de $f(x)$ pour une subdivision équidistante d'ordre 4 de $[a, b]$.

Exercice 1.1.1 *Montrer qu'en ajoutant un point x_* (entre x_{i-1} et x_i) à X, la somme* *de Darboux inférieure (resp. supérieure) croît (resp. décroît). En déduire qu'on a*

$$\forall X, Y \in S_{a,b} : X \subset Y \implies s(f, X) \leq s(f, Y) \text{ et } S(f, X) \geq S(f, Y) .$$

Utiliser le résultat précédent et la subdivision $Z = X \cup Y$ pour montrer que

$$\forall X, Y \in S_{a,b} : s(f, X) \leq S(f, Y) .$$

Solution. $s(f, X) \leq s(f, Z) \leq S(f, Z) \leq S(f, Y)$.

Remarque 1.1.2 *Lorsque $X \subset Y$ pour $X, Y \in S_{a,b}$, on dit que Y est* **plus fine** *que X. (C'est une relation d'ordre partiel sur $S_{a,b}$.)*

1.1.2 Fonctions Riemann–intégrables, intégrale de Riemann

Définition 3 *La fonction f est* **Riemann–intégrable sur** $[a, b]$ *ssi les deux nombres*

$$s_a^b(f) := \sup_{X \in S_{a,b}} s(f, X) , \quad S_a^b(f) := \inf_{X \in S_{a,b}} S(f, X) .$$

coïncident ; ce nombre est alors appellé l'intégrale de Riemann de f sur $[a, b]$ (ou de a à b), et noté $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
L'ensemble des fonctions Riemann–intégrables sur $[a, b]$ est noté $R_{0,a}b$.

Remarque 1.1.3 *L'existence de $s_a^b(f)$ et $S_a^b(f)$ est évidente : il suffit de constater que les ensembles $\{s(f, X); X \in S_{a,b}\}$ et $\{S(f, X); X \in S_{a,b}\}$ sont non-vides (prendre $\{a, b\} \in S_{a,b}$) et majorés resp. minorés d'après l'exercice précédent. On peut aussi montrer que $s_a^b(f)$ et $S_a^b(f)$ sont atteints lorsque le* pas de la subdivision, *$|X| = \max |x_i - x_{i-1}|$ tend vers zéro. La taille de ce pas induit la structure d'une base de filtre sur $S_{a,b}$, permettant de considérer la limite de $s(f, X)$ et $S(f, X)$ en X.*

Remarque 1.1.4 *Revenir sur l'interprétation géométrique de $s_a^b(f)$ et $S_a^b(f)$, en considérant la limite de subdivisions de plus en plus fines.*

Remarque 1.1.5 *La "variable d'intégration" x dans $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est une "variable muette", c'est-à-dire elle peut être remplacée par n'importe quelle autre variable (qui n'intervient pas déjà ailleurs dans la même formule).*

Donnons encore une propsition d'ordre plutôt technique, avant d'énoncer une condition d'intégrabilité suffisante dans tous les cas que nous allons rencontrer.

Proposition 4 *(Critère d'intégrabilité de Riemann.) Une fonction f est Riemann–intégrable sur $[a, b]$ ssi pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une subdivision $X \in S_{a,b}$ telle que $S(f, X) - s(f, X) < \varepsilon$.*

Démonstration : Par déf. de $s_a^b(f)$ et $S_a^b(f)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X', X'' \in S_{a,b}$: $S(f, X') - S_a^b(f) < \varepsilon/2$ et $s_a^b(f) - s(f, X'') < \varepsilon/2$. Avec $X = X' \cup X''$, il vient que $S(f, X) - s(f, X) < S(f, X') - s(f, X'') < \varepsilon + S_a^b(f) - s_a^b(f)$. Donc si $f \in R_{0,a} b \iff S_a^b(f) = s_a^b(f)$, on a la subdivision souhaitée. Réciproquement, si une telle subdivision existe pour tout $\varepsilon > 0$, alors S_a^b et s_a^b coïncident évidemment.$\square$

Théorème 5 *Toute fonction monotone ou continue sur un intervalle $[a, b]$ est Riemann–intégrable.*

Démonstration : Si f est monotone, le $\sup$ et $\inf$ est atteint au bord de chaque sous-intervalle I_i. On a donc $S(f, X) - s(f, X) = \sum h_i \, |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq |X| \sum |f(x_i) - f(x_{i-1})| = |X| \cdot |f(b) - f(a)|$. Il suffit donc de choisir le pas de la subdivision assez petit, $|X| < \varepsilon / |f(b) - f(a)|$, pour que ceci soit inférieur à un ε donné, d'où l'intégrabilité d'après le critère de Riemann.
Pour une fonction continue, la démonstration est admise dans le cadre de ce cours. A titre indicatif : $|f(x_i) - f(x_{i-1})|$ est à remplacer par $f(\xi_i^{\sup}) - f(\xi_i^{\inf})$, où $\xi_i^{\sup}, \xi_i^{\inf}$ sont les points de l'intervalle fermé et borné I_i en lesquels la fonction continue f atteint son maximum et minimum. On utilise maintenant le fait qu'une fonction continue sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y est *uniformément continue*, c'est-à-dire pour $\varepsilon > 0$ donné il existe $\eta > 0$ (**indépendant** du point x) tel que $|x - y| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Donc, pour $|X| < \eta$, on a $S(f, X) - s(f, X) < \eta \cdot n \cdot \varepsilon$. Ceci devient aussi petit que voulu, car on peut prendre des subdivisions équidistantes pour lesquelles $n = (b - a)/|X| \sim (b - a)/\eta$, il suffit donc de prendre ε assez petit.
Pour montrer qu'une fonction continue est uniformément continue sur un intervalle borné $[a, b]$, on peut utiliser que l'ensemble des boules ouvertes $B_\eta(x)$ telles que $y \in B_\eta(x) \Longrightarrow f(y) \in B_\varepsilon(f(x))$, est un recouvrement ouvert de $[a, b]$, dont on peut extraire un recouvrement fini d'après le théorème de Heine–Borel. Le minimum de ces η correspond au η de l'uniforme continuité (au pire pour 2ε au lieu de ε).
(Pour une démonstration du théorème de Heine–Borel, voir ailleurs...)$\square$

Corollaire 6 *De même, une fonction (bornée !) continue sauf en un nombre fini de points, ou monotone sur chaque sous-intervalle d'une partition finie de $[a, b]$, est Riemann–intégrable. (On peut en effet utiliser l'additivité des sommes de Darboux, $s(f, X \cup Y) = s(f, X) + s(f, Y)$ pour $X \in S_{a,c},\ Y \in S_{c,b}$ qui entraîne celle de $s_a^b(f)$ et de même pour $S_a^b(f)$.)*

Remarque 1.1.6 (fonction de Dirichlet) *La fonction de Dirichlet,*

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est pas Riemann–intégrable, car on a

$$\forall X \in S_{a,b} : \ s(f, X) = 0 \ , \quad S(f, X) = b - a \ .$$

En effet, sur chaque $I = [x_{i-1}, x_i]$ il existe un point irrationnel, donc $\inf_I f = 0$, mais aussi un point rationnel, d'où $\sup_I f = 1$. Ainsi $s(f, X) = 0$ et $S(f, X)$ est somme des longeurs des sous-intervalles et donc égale à $b - a$.

Remarque 1.1.7 *Le pas uniforme des subdivisions équidistantes simplifie beaucoup l'expression des sommes de Darboux (exercice !).*
On peut montrer que pour $f \in R_{0,a}b$, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s(f, [a, b]_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, [a, b]_n)$$

La réciproque est vraie si f est continue.

1.1.3 Sommes de Riemann

Les sommes de Darboux ne sont pas très utiles pour le calcul effectif d'une intégrale, par exemple à l'aide d'un ordinateur, car il est en général assez difficile de trouver les inf et sup sur les sous-intervalles. On considère plutôt

$$s_n(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(x_{i-1}) \ \text{ ou } \ S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(x_i) \ .$$

Plus généralement :

Définition 7 *Si* $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ *vérifie* $\forall i \in \{1, ..., n\}, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, *on appelle* (X, ξ) *une* subdivision pointée *et*

$$S(f, X, \xi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \, f(\xi_i)$$

la somme de Riemann *associée à la subdivision pointée* (X, ξ). *Si on pose de plus* $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, *on a*

$$S(f, X, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \, \Delta x_i \ ,$$

c'est de là que vient la notation $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Théorème 8 *Si* $f \in R_{0,a}b$, *alors les sommes de Riemann* $S(f, X, \xi)$ *tendent vers* $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, *independamment du choix des* ξ_i, *lorsque la subdivision devient de plus en plus fine.*

<u>Démonstration :</u> Par définition, il est évident que $s(f, X) \leq S(f, X, \xi) \leq S(f, X)$. Soit $f \in R_{0,a}b$ et X tel que $S(f, X) - s(f, X) < \varepsilon$. Alors on a aussi $S(f, X, \xi) - s_a^b < \varepsilon$, quel que soit le choix des ξ_i, et a fortiori pour tout $X' \supset X$. D'où le résultat.$\square$

Si f est continue, f atteint son minimum et maximum sur chaque $[x_{i_1}, x_i]$ en un certain $\xi_i^{\min}$ et $\xi_i^{\max}$. On obtient donc les sommes de Darboux comme cas particulier des sommes de Riemann, en associant à chaque X des points $\xi^{\min}$, $\xi^{\max}$ tels que $s(f, X) = S(f, X, \xi^{\min}),\ S(f, X) = S(f, X, \xi^{\max})$.

En particulier, lorsque la fonction est monotone, par exemple croissante, sur un sous-intervalle I_i, alors $\xi_i^{\min} = x_{i-1}$ et $\xi_i^{\max} = x_i$. Les sommes de Riemann s_n et S_n données en début de ce paragraphe coïncident donc avec les sommes de Darboux inférieure et supérieure pour une fonction croissante.

1.2 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Proposition 9 *Pour $f \in R_{0,a}b$, on a*

$$\forall X \in S_{a,b} : s(f,X) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq S(f,X)\ . \qquad (sIS)$$

En particulier, on a

$$(b-a)\inf f([a,b]) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq (b-a)\sup f([a,b])\ . \qquad (iIs)$$

Démonstration : L'inégalité (sIS) est conséquence immédiate de la définition de s_a^b resp. S_a^b. Pour montrer (iIs), il suffit de prendre $X = \{a,b\}$.□

Théorème 10 (de Chasles) *Soit $a \leq c \leq b$. Alors,*

$$f \in R_{0,a}b \iff (\ f \in R_{0,a}c \wedge f \in R_{0,c}b\ )$$

et on a la **relation de Chasles** *:*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Démonstration : Pour tout $X \in S_{a,c},\ Y \in S_{c,b}$, on a évidemment $X \cup Y \in S_{a,b}$ et $s(f, X \cup Y) = s(f,X) + s(f,Y)$. Ceci entraîne $s_a^b(f) = s_a^c(f) + s_c^b(f)$. Le même s'applique à $S_a^b(f)$. Ainsi l'intégrabilité sur $[a,c]$ et $[c,b]$ implique celle sur $[a,b]$, et la relation de Chasles. Réciproquement, tout $Z \in S_{a,b}$ qui contient c se décompose en $X \cup Y$ avec $X \in S_{a,c},\ Y \in S_{c,b}$, et on a les mêmes relations pour les sommes de Darboux. Pour passer à $s_a^b(f)$ et $S_a^b(f)$, on peut toujours supposer $c \in Z$, quitte à l'ajouter, sans perte de généralité. On en déduit le théorème. (Exercice : détailler cette démonstration.)□

Définition 11 *Pour $b < a$, on définit*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

et pour $b = a$, $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Remarque 1.2.1 *Avec ces conventions, la relation de Chasles est valable quel que soit l'ordre de a, b, c (par exemple aussi pour $a < b < c$). C'est en effet la principale motivation pour ces définitions, ce qui laisse deviner l'utilité et importance de cette relation dans les applications.*
Il convient d'être très vigilant concernant cette généralisation lorsqu'on utilise des inégalités (telles que celles de la Prop. 13), qui ne sont généralement valables que pour $a < b$.

Proposition 12 *$R_{0,a}b$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$–espace vectoriel $\mathbb{R}^{[a,b]}$ des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, et $I : R_{0,a}b \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est une forme linéaire sur $R_{0,a}b$. Autrement dit, $o \in R_{0,a}b$ et surtout*

$$\forall f, g \in R_{0,a}b,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha\, f + \beta\, g \in R_{0,a}b$$

et

$$\int_a^b (\alpha\, f(x) + \beta\, g(x))\ \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Démonstration : Les sommes de Darboux ne sont pas linéaires (car $\sup$ et $\inf$ ne sont pas additives). Passons donc par les sommes de Riemann, dont la linéarité, $S(\alpha f + \beta g, X, \xi) = \alpha S(f, X, \xi) + \beta S(g, X, \xi)$, est évidente, ce qui donne, par passage à la limite $|X| \to 0$, le résultat souhaité. (Exercice : détailler ceci...)□

Proposition 13 *Pour $f, g \in R_{0,a}b$, ($a < b$), on a :*

$$f \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0\,, \tag{1}$$

$$f \leq g \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{2}$$

$$|f| \in R_{0,a}b \quad \textit{et} \quad \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,. \tag{3}$$

Démonstration : (1) : $f \geq 0 \Longrightarrow s(f, X) \geq 0$ et $s(f, X) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
(2) : $g \geq f \Longrightarrow g - f \geq 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \int(g - f) \geq 0 \overset{(lin)}{\Longrightarrow} \int g \geq \int f$.
(3) : on a $-|f| \leq f \leq |f|$, avec le (2) donc $\int f \leq \int |f|$ et $-\int f \leq \int |f|$.□

Remarque 1.2.2 *La réciproque du (1) est évidemment fausse, c'est-à-dire $\int f \geq 0$ n'implique pas $f \geq 0$. (Contre-exemple : $\sin x$ sur $[-\pi, \pi]$.)*

Remarque 1.2.3 *Dans le cas $\forall f \in R_{0,a}b$, $f \geq 0$, on a que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire de l'épigraphe*

$$E = \left\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ et } 0 \leq y \leq f(x) \,\right\}\,.$$

Théorème 14 (de la moyenne) *Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$ (fonction continue de $[a, b] \to \mathbb{R}$). Alors*

$$\exists c \in [a, b] : \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{moyenne de } f \text{ sur } [a,b]} = f(c)$$

Démonstration : f étant continue, on a

$$\exists x_i, x_s \in [a, b] : f(x_i) = \inf f([a, b]), f(x_s) = \sup f([a, b])\,.$$

D'après l'éq. (iIs),

$$f(x_i) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq f(x_s)\,.$$

D'après le thm. des valeurs intermédiaires appliqué à f (continue) entre x_i et x_s, on a $\exists c \in]x_i, x_s[$ (ou $]x_s, x_i[$) tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;.$$

□

1.3 Intégrale de Riemann et primitives

En principe il est possible de calculer des intégrales en utilisant simplement la définition en terme des sommes de Darboux. Or, ceci est généralement assez lourd et difficile. De plus, ayant fait le calcul de l'intégrale sur un intervalle, il faut le refaire pour chaque autre intervalle à laquelle on s'intéresse (à moins de pouvoir faire un changement de variables plus ou moins compliqué).

Exemple 1.3.1 *Calculer* $J_k = \int_0^1 x^k \,\mathrm{d}x$ *pour* $k = 1$ *et* $k = 2$*, en utilisant des subdivisions équidistantes de* $[0, 1]$.

Solution. Comme x^k est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle est intégrable et les sommes de Darboux coïncident avec les sommes de Riemann

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n}\right)^k \;;\;\; S_n = s_n + \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{i=1}^{n} i^k \;.$$

Pour $k = 1$, cette somme est bien connue : $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2} n(n+1)$, et donc

$$S_n = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n}) \;,\;\; J_1 = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$$

Pour $k = 2$, il faut utiliser $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$, d'où

$$S_n = \frac{1}{6}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} \implies J_2 = \frac{1}{3} \;.$$

(Pour trouver la valeur de $\sum i^2$, on peut utiliser $\sum i^2 = \sum i(i-1) + \sum i$, et observer que la pemière expression est la valeur de $\sum (x^i)''$ en $x = 1$. En permutant somme et dérivées, on calcule alors la 2^e dérivée de la somme géométrique égale à $(1 - x^{n+1})/(1 - x)$, puis sa limite en $x = 1$.)

On voit que la méthode se généralise à n'importe quel $k \in \mathbb{N}$, mais pour $k \in \mathbb{R}$ les choses se compliquent. Aussi, pour calculer $\int_a^b x^k \,\mathrm{d}x$ avec $[a, b] \neq [0, 1]$, il faut faire des changements de variables pour se ramener au cas ci-dessus.

L'objet de ce chapitre est d'introduire la notion de primitive d'une fonction, qui permettra d'éviter ce genre de calcul, en utilisant les conclusions du présent et les méthodes des suivants chapitres.

1.3.1 Primitive d'une fonction continue

Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur D.

Définition 15 *Une fonction $F : D \to \mathbb{R}$ est* **une primitive** *de f dans D ssi*
• F est dérivable sur D, et
• $F' = f$ dans D.

Proposition 16 *Si F et G sont deux primitives de f, alors $F - G$ est une constante sur tout intervalle $I \subset D$.*

Démonstration : Soit $a, x \in I$. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction $h = F - G$, dérivable sur $[a, x] \subset I$ comme somme de fonctions dérivables. On a donc

$$\exists c \in]a, x[: (F - G)(x) - (F - G)(a) = (x - a) \underbrace{(F - G)'(c)}_{=f(c)-f(c)=0}$$

Donc $F(x) - G(x) = F(a) - G(a)$, ce qui est une constante, indépendante de x qui peut parcourir l'ensemble des points de I.$\square$

Remarque 1.3.1 *Le mot « intervalle » est essentiel dans cette proposition : si D est réunion d'intervalles (ouverts) disjoints, $F - G$ peut être différent sur chacun des intervalles.*

Existence d'une primitive

Théorème 17 *Toute fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possède une primitive, donnée par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.*

Démonstration : Vérifions que la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ convient.
D'abord, cette intégrale existe pour tout $x \in [a, b]$ car f continue sur $[a, b]$ donc $f \in R_{0,a}b$. Calculons

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(relation de Chasles)} \end{aligned}$$

D'après le thm. de la moyenne, $\exists\xi \in [x, x+h]$ tel que

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi)\ .$$

Donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{\xi\to x} f(\xi) = f(x)\ .$$

(NB : Si $x = a$ ou $x = b$ on ne peut considérer que la limite à gauche ou à droite, c'est-à-dire $h > 0$ ou $h < 0$.)□

Remarque 1.3.2 *Ce résultat permet d'identifier l'intégration comme une anti-différentiation (à une constante près), puisque $F' = f$ pour $F(x) = \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Intérêt de la primitive

D'après le thm précédent, $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f, et d'après la proposition 16, toute primitive de f est égale à F, à une constante près. Donc, si $\tilde{F}$ est une primitive quelconque de f, alors $\tilde{F} = F + c$, et

$$\tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ ,$$

en utilisant la relation de Chasles.

Ainsi, la connaissance d'une primitive quelconque F d'une fonction f sur un ensemble D permet de calculer l'intégrale de f sur n'importe quel intervalle $[a, b] \subset D$, en appliquant la formule

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\,F(x)\,\Big]_a^b \equiv F(b) - F(a)\ .$$

Ainsi, bien que cela soit possible, on n'utilise dans la pratique quasiment jamais la définition de l'intégrale de Riemann en terme de sommes de Darboux, pour la calculer. Sauf exceptions, on cherchera toujours une primitive de f par les méthodes qui seront développées dans la suite, pour appliquer la formule ci-dessus.

1.4 Pratique du Calcul intégral

Nous allons ici aborder quelques méthodes pour calculer des primitives d'une large classe de fonctions.

1.4.1 Intégrale indéfinie

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ continue. On note $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ l'une quelconque des primitives de f, définie à une constante près que l'on ajoute toujours explicitement.

Exemple 1.4.1 $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$. *Ici,* $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, *on peut donc avoir des constantes différentes sur* $]-\infty,0[$ *et sur* $]0,\infty[$. *Autrement dit,* C *est une* fonction *constante sur chaque sous-intervalle de* D.

On dit que $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ est **l'intégrale indéfinie** de f, alors que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ s'appelle **intégrale définie**.

Remarque 1.4.1 *On utilise la notion d'intégrale indéfinie comme synonyme de primitive. On pourrait faire une distinction plus rigoureuse en définissant l'intégrale indéfinie* $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ *comme l'une quelconque des fonctions de la forme* $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$, *ou* $a \in D$ *n'est pas spécifié. (C'est ainsi qu'on la détermine et qu'on l'utilise, dans l'esprit du sous-chapitre qui précède.) Les deux définitions sont équivalentes au détail près qu'on n'obtient alors pas* toutes *les primitives par les intégrales indéfinies : en effet, en changeant la borne inférieure* a *on ne peut pas obtenir toutes les constantes, si* D *est borné ou si les primitives de* f *sont bornées, c'est-à-dire si* $\lim_{x\to\pm\infty}\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$ *est finie.*

1.4.2 Primitives des fonctions usuelles

Par dérivation, on vérifie aisément la validité des relations données dans le tableau 1. De même, on vérifie par dérivation (règle de chaîne !) que

$$\begin{aligned} \int u'(x)\,f(u(x))\,\mathrm{d}x &= F(u(x)) \\ \text{avec} \qquad & F(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Cette formule sera étudiée plus en détail dans le paragraphe 1.4.5. Elle permet d'utiliser les formules élémentaires ci-dessus pour toute une classe de fonctions élémentaires « composées ». Son application notamment au cas $u(x) = a\,x + b$ (et donc $u' = a$) est immédiate et donne :

$$\int f(a\,x+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,F(a\,x+b)$$

Exercice 1.4.1 *Généraliser le formulaire précédent, en remplaçant* x *dans l'intégrand par* $a\,x+b$.

$$
\begin{aligned}
\int x^\alpha \,\mathrm{d}x &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) \\
\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x &= \ln|x| + C \\
\int \cos x \,\mathrm{d}x &= \sin x + C \\
\int \sin x \,\mathrm{d}x &= -\cos x + C \\
\int e^x \,\mathrm{d}x &= e^x + C \\
\int ch\, x \,\mathrm{d}x &= \operatorname{sh} x + C \quad \text{(rappel : } \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})) \\
\int sh\, x \,\mathrm{d}x &= \operatorname{ch} x + C \quad \text{(rappel : } \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})) \\
\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x &= \arctan x + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x &= \arcsin x + C \qquad (-1 \leq x \leq 1) \\
\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}x &= \operatorname{Arsh} x + C \;=\; \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C_2
\end{aligned}
$$

TAB. 1 – Primitives des fonctions usuelles

1.4.3 Intégration par parties

Proposition 18 *Pour $f, g \in \mathcal{C}^1(I \to \mathbb{R})$, on a*

$$\int f'(x)\, g(x) \,\mathrm{d}x = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x) \,\mathrm{d}x$$

ou encore, avec $I = [a, b]$ et en utilisant les intégrales définies :

$$\int_a^b f'(x)\, g(x) \,\mathrm{d}x = \Big[f(x)\, g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x) \,\mathrm{d}x$$

<u>Démonstration :</u> On a

$$\begin{aligned} f(x)\,g(x)\ (+C) = \int (fg)'(x)\,\mathrm{d}x &= \int [f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)]\,\mathrm{d}x \\ &= \int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x\ , \end{aligned}$$

D'où (en absorbant la constante d'intégration dans les intégrales indéfinies) la première partie de la proposition. La deuxième partie s'obtient en prenant la valeur en b moins la valeur en a.□

Remarque 1.4.2 *Cette relation est souvent utilisé pour diminuer successivement le degré d'un polynôme $g(x)$ qui multiplie une fonction $f'(x)$ que l'on sait intégrer.*
Elle sert aussi pour l'intégration des expressions faisant intervenir les fonctions trigonometriques, où l'on retombe sur la fonction d'origine après deux intégrations.

Exemple 1.4.2 *Calculons la primitive $\int x^2 e^x\,\mathrm{d}x$. On posera deux fois successivement $f = e^x = f'$:*

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x\,\mathrm{d}x &= x^2 e^x - \int 2\,x\,e^x\,\mathrm{d}x \\ &= x^2 e^x - 2\,x\,e^x + 2\int e^x\,\mathrm{d}x \\ &= x^2 e^x - 2\,x\,e^x + 2\,e^x + C \end{aligned}$$

Exemple 1.4.3 *Calculons la primitive $\int \sin x\,e^x\,\mathrm{d}x$. On posera successivement $f = \sin x$, puis $f = \cos x$:*

$$\begin{aligned} \int \sin x\,e^x\,\mathrm{d}x &= \sin x\,e^x - \int \cos x\,e^x\,\mathrm{d}x \\ &= \sin x\,e^x - \left[\cos x\,e^x - \int (-\sin x)\,e^x\,\mathrm{d}x\right] \\ &= (\sin x - \cos x)\,e^x - \int \sin x\,e^x\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On met tous les $\int$ dans le membre de gauche et obtient après division par 2 :

$$\int \sin x\,e^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,(\sin x - \cos x)\,e^x \quad (+C)$$

1.4.4 Formule de Taylor avec reste intégral

Comme application importante de l'intégration par parties, démontrons le

Théorème 19 (formule de Taylor avec reste intégral)
Pour $a, x \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,x])$, on a

$$f(x) = f(a)+f'(a)\,(x-a)+...+\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(a)\,(x-a)^n+\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,\mathrm{d}t\,. \tag{4}$$

(**Rappel :** on note $\mathcal{C}^k(I)$ les fonctions k fois continûment dérivables sur I.)

Cette formule de Taylor avec reste intégral est historiquement la première parmi les différentes formules de Taylor (cf. chap. **??**, page **??**), trouvée par Monsieur Brook Taylor (1685–1731).

Elle sert pour le calcul de *développements limités* qui seront étudiés au chapitre suivant. Elle donne une approximation polynômiale de la fonction f au voisinage de a : en effet, si x est proche de a, alors les termes de la forme $(x-a)^k$ deviennent très petits, d'autant plus que k est élevé. Le dernier terme, appelé « **reste intégral** » du développement, tend encore plus vite vers zéro que $(x-a)^n$ (comme on le démontre au chapitre **??**).

Démonstration : Pour $n = 0$, la formule est vraie : en effet, elle s'écrit dans ce cas

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

ce qui exprime simplement le fait que f est une primitive de f', lorsque $f \in \mathcal{C}^1([a,x])$.

Supposons maintenant (4) vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et que $f^{(n+1)}$ admette une dérivée $f^{(n+2)}$ continue sur $[a,x]$. Ainsi, les deux facteurs dans le reste intégral vérifient les conditions suffisantes pour pouvoir faire une intégration par partie, avec $u = f^{(n+1)} \Longrightarrow u' = f^{(n+2)}$ et $v'(t) = (x-t)^n \Longrightarrow v(t) = \frac{-1}{n+1}(x-t)^{n+1}$. Alors

$$\begin{aligned}&\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,\mathrm{d}t\\ &\quad= \left[f^{(n+1)}(t)\,\tfrac{-1}{n+1}(x-t)^{n+1}\right]_a^x - \tfrac{-1}{n+1}\int_a^x f^{(n+2)}(t)\,(x-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

La borne supérieure du crochet donne zéro et pour la borne inférieure les signes $(-)$ se compensent, on a donc

$$\begin{aligned}&\int_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,\mathrm{d}t\\ &\quad= \tfrac{1}{n+1}\,f^{(n+1)}(a)\,(x-a)^{n+1} + \tfrac{1}{n+1}\int_a^x f^{(n+2)}(t)\,(x-t)^{n+1}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

et en reportant ceci dans (4), on trouve la formule au rang $n+1$.□

1.4.5 Changement de variable d'intégration

Proposition 20 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi : J \to I$ un difféomorphisme, c'est-à-dire une bijection telle que φ et φ^{-1} soient continûment dérivables. Dans ce cas,*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi^{-1}(x)) \quad \textit{avec} \quad F(t) = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \;\; (+C) .$$

Autrement dit, $F \circ \varphi^{-1}$ est une primitive de f. En terme d'intégrales définis, on a

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t .$$

Démonstration : Il faut et il suffit de montrer que $F \circ \varphi^{-1}$ a comme dérivée f. Or, d'après la règle de chaîne, on a

$$(F \circ \varphi^{-1})' = F' \circ \varphi^{-1} \cdot (\varphi^{-1})'$$

Or, $F' = f \circ \varphi \cdot \varphi'$ et $(\varphi^{-1})' = 1/(\varphi' \circ \varphi^{-1})$ (ce qui se montre en dérivant $\varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$). Donc

$$(F \circ \varphi^{-1})' = f \cdot \varphi' \circ \varphi^{-1} \cdot 1/(\varphi' \circ \varphi^{-1}) = f .$$

Pour une intégrale définie, on a donc

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x &= F(\varphi^{-1}(\beta)) - F(\varphi^{-1}(\alpha)) \\ &= \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

ce qui revient au même que la formule donnée dans l'énoncé avec $a = \varphi^{-1}(\alpha)$ et $b = \varphi^{-1}(\beta)$.□

Applications — Disposition pratique :

Ce théorème permet de calculer $\int f$ si l'on sait calculer $\int f \circ \varphi \cdot \varphi'$, ou réciproquement. Il est à la base de tout « l'art de l'intégration », qui consiste à trouver les bons changements de variables $x = \varphi(t)$.

Dans la pratique, on écrit alors

$$x = \varphi(t) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t) .$$

On écrit symboliquement $\mathrm{d}x = \varphi'(t)dt$, et on substitue ces deux équations dans l'intégrale en question :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\underbrace{\varphi(t)}_{=x})\ \underbrace{\varphi'(t)dt}_{=\mathrm{d}x}$$

Puis, ayant trouvé la primitive $F(t)$ du membre de droite, on retourne à la variable x en substituant $t = \varphi^{-1}(x)$.

Exemple 1.4.4 *Calculons la primitive $\int \sin x \cos x\,\mathrm{d}x$ sur l'intervalle $]-1,1[$. Posons $\sin x = t \Longrightarrow \cos x dx = \mathrm{d}t$. C'est justifié car $\sin$ est une bijection différentiable de $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ sur $[-1,1]$, et la fonction réciproque $x = \arcsin t$ est également dérivable à l'interieur de cette intervalle. D'où*

$$\int \underbrace{\sin x}_{=t} \underbrace{\cos x dx}_{=\mathrm{d}t} = \int t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,t^2 + C = \frac{1}{2}(\sin x)^2 + C\ .$$

N.B. : En terme des définitions de la proposition, on a travaillé avec φ^{-1} plutôt qu'avec φ ; c'est souvent plus ainsi qu'on procède dans la pratique.

Remarque 1.4.3 *Il faut s'assurer que la fonction φ est effectivement une bijection, généralement en considérant ses propriétés de monotonie. Dans le cas echéant, il faut découper l'intervalle d'intégration en des sous-intervalles sur lesquels φ est monotone.*

1.4.6 Formule de la moyenne généralisée.

Comme application intéressante des changements de variable, considérons le

Théorème 21 (de la moyenne, généralisé.) *Soient $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$ et $g > 0$ sur $]a,b[$. Alors,*

$$\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Exercice 1.4.2 *Démontrer ce théorème, en étudiant la fonction $G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ pour justifier le changement de variable $u(x) = a + G(x)\cdot(b-a)/G(b)$.*

Solution : La fonction G est bien définie (g intégrable car continue) et dérivable sur $[a,b]$, avec $G' = g > 0$ sur $]a,b[$. Donc G est strictement croissante sur $]a,b[$, et idem pour u, qui est donc bijection de $[a,b]$ sur $[u(a),u(b)] = [a,b]$. u est dérivable et

$u' = g.(b-a)/G(b)$. Ainsi on peut faire le changement de variable pour passer de x à u :

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x(u))\,\mathrm{d}u.\frac{G(b)}{b-a}\ .$$

En utilisant le théorème de la moyenne pour $u \mapsto f(x(u))$,

$$\exists \widetilde{u} \in [a,b] : \int_a^b f(x(u))\,\mathrm{d}u = (b-a)\,f(x(\widetilde{u}))\ ,$$

on a le résultat cherché, avec $\xi = x(\widetilde{u})$ (puisque $G(b) = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$).

1.5 Intégration de fractions rationnelles : décomposition en éléments simples

Dans ce (long) chapitre, on montre comment on trouve une primitive pour toute fraction rationnelle $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, où A, B sont de polynômes. On procède par étapes, en illustrant la théorie à l'aide de l'exemple

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{2\,x^6 + 3\,x^5 - 3\,x^4 - 3\,x^3 - 3\,x^2 - 18\,x - 5}{x^5 + x^4 - 2\,x^3 - x^2 - x + 2}$$

La première partie de ce chapitre est plutôt algébrique : nous citons et utilisons ici plusieurs théorèmes importants d'algèbre sans démonstration, qui n'a pas sa place dans ce cours d'analyse.

1.5.1 Division euclidienne

1^e étape : On utilise le

> **Théorème 22 (et définition : division euclidienne)**
> *Soient $A, B \in \mathbb{R}[X]$, $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple (Q, R) de $\mathbb{R}[X]$ tel que*
> $$A = B\,Q + R \quad \textit{et} \quad \deg R < \deg B$$
> *On dit que Q est le quotient et R le reste de la division euclidienne de A par B.*

Ainsi on peut écrire

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{B(x)\,Q(x) + R(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

avec $\deg R < \deg B$. Le polynôme $Q(x)$ s'appelle **partie entière** de la fraction rationnelle.

Exemple 1.5.1 *On effectue la division euclidienne comme suit :*

$$\begin{array}{r|l}
2\,x^6 + 3\,x^5 - 3\,x^4 - 3\,x^3 - 3\,x^2 - 18\,x - 5 & x^5 + x^4 - 2\,x^3 - x^2 - x + 2 \\ \cline{2-2}
\underline{2\,x^6 + 2\,x^5 - 4\,x^4 - 2\,x^3 - 2\,x^2 + 4\,x} \quad\; & 2x + 1 \\
x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - 22\,x - 5 & \\
\underline{x^5 + x^4 - 2\,x^3 - x^2 - x + 2} & \\
x^3 \qquad - 21\,x - 7 &
\end{array}$$

On a donc

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{x^3 - 21\,x - 7}{x^5 + x^4 - 2\,x^3 - x^2 - x + 2}\ .$$

1.5.2 Polynômes irreductibles

2^e étape : On considère donc dorénavant une fraction rationnelle $R(x)/B(x)$ telle que $\deg R < \deg B$. Pour procéder, on pose

Définition 23 *Les* **polynômes irréductibles** *(sur $\mathbb{R}$) sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racine réelle (c'est-à-dire $a\,X^2 + b\,X + c$ avec $\Delta = b^2 - 4\,a\,c < 0$).*
Un polynôme est **unitaire** *ssi le coefficient du terme de plus haut degré est 1.*

On se servira du

Théorème 24 *Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ se décompose de manière unique en un produit de la forme*

$$P(X) = a\,(X-r_1)^{m_1} \cdots (X-r_p)^{m_p}(X^2+b_1X+c_1)^{n_1} \cdots (X^2+b_qX+c_q)^{n_q}$$

c'est à dire d'une constante a qui est le coefficient du terme de plus haut degré de P, et de polynômes irréductibles unitaires : r_i sont les racines (distinctes) de P, m_i leurs multiplicités, et les facteurs de degré 2 sont sans racine réelle (c'est-à-dire avec $\Delta = b_j^2 - 4\,c_j < 0$).

On utilise cette décomposition pour le polynôme $B(x)$ au dénominateur de la fraction rationnelle. On suppose de plus que le numérateur n'a pas de facteur commun avec le dénominateur, sinon on simplifie par ce facteur commun.

Exemple 1.5.2 *Pour trouver la factorisation $B(x)$, on commence par chercher des racines "évidentes" en tâtonnant (i.e. en essayant pour x les valeurs 0, ± 1,...). On trouve que $B(1) = 0$ et $B(-2) = 0$, donc $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$ divise $B(x)$. On effectue la division euclidienne*

$$\begin{array}{rr|l} x^5 + x^4 - 2\,x^3 & - x^2 - x + 2 & x^2 + x - 2 \\ \cline{3-3} \underline{x^5 + x^4 - 2\,x^3} & & x^3 - 1 \\ 0 & - x^2 - x + 2 & \\ & \underline{-x^2 - x + 2} & \\ & 0 & \end{array}$$

Or, $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, par conséquent,

$$B(x) = (x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)$$

En effet, $x^2 + x + 1$ est un trinôme du 2nd degré à discriminant négatif.

1.5.3 Pôles et éléments simples

3^e étape

Définition 25 *On dit que $f(x) := \frac{A(x)}{B(x)}$, $A, B \in \mathbb{R}[X]$, est une fraction rationnelle irréductible ssi les polynômes A et B sont sans facteur commun.*
On appelle pôles de la fraction rationnelle irréductible les racines du polynôme B.
Soit $B(X) = a\,(X-r_1)^{m_1}\cdots(X-r_p)^{m_p}(X^2+b_1X+c_1)^{n_1}\cdots(X^2+b_qX+c_q)^{n_q}$ la décomposition irréductible de B.
On appelle **éléments simples de** 1^e **espèce** *relatifs aux pôles r_i, les m_i fonctions rationnelles du type*

$$\frac{A_1}{x-r_i}\,,\ \ \frac{A_2}{(x-r_i)^2}\,,\ \ \ldots\,,\ \ \frac{A_{m_i}}{(x-r_i)^{m_i}}\,,$$

où les A_k sont des constantes réelles.
On appelle **éléments simples de** 2^e **espèce** *relatifs aux polynômes irréductibles $X^2+b_jX+c_j$, les n_j fonctions rationnelles du type*

$$\frac{B_1\,x+C_1}{x^2+b_jx+c_j}\,,\ \ \frac{B_2\,x+C_2}{(x^2+b_jx+c_j)^2}\,,\ \ \ldots\,,\ \ \frac{B_{n_j}\,x+C_{n_j}}{(x^2+b_jx+c_j)^{n_j}}\,,$$

où les B_k, C_k sont des constantes réelles.

Exemple 1.5.3 *Décrire les éléments simples de*

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{x^3-21\,x-7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

- *éléments simples de 1^e espèce :*
  $\cdot$ le pôle $x=1$ de multiplicité 2 $\rightsquigarrow$ 2 éléments simples :

$$\frac{A_1}{x-1}\,,\ \ \frac{A_2}{(x-1)^2}\,,$$

  $\cdot$ pôle $x=-2$ de multiplicité 1 $\rightsquigarrow$ 1 éléments simple : $\dfrac{A_3}{x+2}$.
- *éléments simples de 2^e espèce : $\cdot$ 1 seul, associé au facteur irreductible x^2+x+1 : $\dfrac{B_1\,x+C_1}{x^2+x+1}$.*

Attention : il faut toujours d'abord s'assurer de la décomposition complète du dénominateur ! Par exemple, $B(x)$ aurait pu être écrit comme $B(x)=(x-1)(x+2)(x^3-1)$; ce qui ne permet pas de voir immédiatement les éléments simples.

Théorème 26 *Soit $f(x) = A(x)/B(x)$ une fct. rationnelle irréductible. Alors*

1. *Si $A = BQ + R$, $\deg R < \deg B$ (div.euclidienne de A par B), on a $f = \frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$ dans D_f.*
2. *$\frac{R}{B}$ se décompose de manière unique comme somme de tous les éléments simples relatifs à B :*

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \sum_i \sum_k \frac{A_{ik}}{(x - r_i)^k} + \sum_j \sum_\ell \frac{B_{jk}\, x + C_{jk}}{(x^2 + b_j x + c_j)^k}\ . \qquad (des)$$

Exercice 1.5.1 *Donner la* structure *de la décomposition en éléments simples de $f(x) = R(x)/B(x)$.*
On a

$$\begin{aligned}\frac{R(x)}{B(x)} &= \frac{x^3 - 21\,x - 7}{(x+2)(x-1)^2(x^2+x+1)} \\ &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + + \frac{A_3}{x+2} + \frac{B_1\,x + C_1}{x^2+x+1}\ . \qquad (*)\end{aligned}$$

NB : quand on ne demande que la structure *de la décomposition, on peut laisser les A_i, B_j, C_j indéterminées.*

1.5.4 Calcul des coefficients d'une décomposition en éléments simples

4^e étape : (la plus dure...)

(a) : POUR LES PÔLES SIMPLES DE MULTIPLICITÉ 1

On multiplie l'éq. (des) par $(x - r_i)$, et on prend $x = r_i$: dans le membre de droite ne survit que A_i, dont la valeur est donné par le membre de gauche, $R(r_i)/B'(r_i)$ avec $B'(x) = B(x)/(x - r_i)$ (simplifié).

Par exemple, appliquons ceci au calcul de A_3 : En multipliant (*) par $(x + 2)$, on a

$$\frac{x^3 - 21\,x - 7}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = (x+2)\left(\frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2}\right) + A_3 + (x+2)\,\frac{B_1\,x + C_1}{x^2+x+1}$$

et en posant $x = -2$,

$$\frac{-8 + 21{\cdot}2 - 7}{9{\cdot}3} = A_3 \iff A_3 = 1\ .$$

(b) : LES COEFF. A_{im_i} DES PÔLES DE MULTIPLICITÉ m_i

Pour trouver le coefficient A_{i,m_i} qui correspond à un pôle d'ordre m_i, on multiplie par $(x-r_i)^{m_i}$, puis on prend $x = r_i$: de manière analogue à ce qui précède, on trouve le coeff. recherché.

Dans notre exemple, on détermine ainsi A_2 en multipliant par $(x-1)$:

$$\frac{x^3 - 21\,x - 7}{(x+2)(x^2+x+1)} = (x-1)\,A_1 + A_2 + (x-1)\left(\frac{A_3}{x+2} + \frac{B_1\,x + C_1}{x^2+x+1}\right)$$

et en prenant $x = 1$, $A_2 = (1-21-7)/(3{\cdot}3) = -3$.

(c) : LES COEFF. B_{jn_j}, C_{jn_j} DES FACTEURS QUADRATIQUES

On peut appliquer la même méthode, mais avec les racines complexes de ces facteurs $x^2 + b_j x + c_j$. Pour celà, on multiplie par le facteur $(x^2 + b_j\,x + c_j)^{n_j}$, puis on prend x égal à une des racines complexes du facteur, pour trouver (avec la partie réelle et imaginaire) les coeff. B_j et C_j : Dans notre cas,

$$x^2 + x + 1 = \frac{x^3 - 1}{x - 1}\ ,$$

les racines sont donc les 2 racines 3es non-triviales de l'unité, $j = \exp\frac{2\,\pi\,i}{3}$. (En effet, il convient de vérifier que $x = j$ est vraiment un pôle en calculant $R(j) = 1 - 21\,j - 7 \neq 0$.)

En multipliant (*) par $x^2 + x + 1$

$$\frac{x^3 - 21\,x - 7}{(x-1)^2(x+2)} = (x^2+x+1)\left(\frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x+2}\right) + B_1\,x + C_1$$

et en prenant $x = j$, on trouve ainsi

$$\frac{1 - 21\,j - 7}{j^3 + 2\,j^2 - 2\,j^2 - 4\,j + j + 2} = B_1\,j + C_1$$

$$B_1\,j + C_1 = \frac{-6 - 21\,j}{3 - 3\,j} = -\frac{2 + 7\,j}{1 - j}$$

ce qui donne (partie réelle et imaginaire) les coefficients B et C après un petit calcul. Cependant, ici ce calcul de nombres complexes est un peu lourd et on utilisera plutôt une autre méthode, par exemple celle des limites.

(d) : LES AUTRES COEFF. A_{ik} DES PÔLES DE MULTIPLICITÉ $m_i > 1$

Ces coefficients peuvent aussi se calculer par la **méthode du changement de variable** $t = x - r_i$. Ceci nous ramène à un pôle en $t = 0$. Pour calculer les coefficients associés à ce pôle, on fait la division par les autres facteurs de $B(t + r_i)$ suivant les puissances croissantes en t, à l'ordre $m_i - 1$; c'est-à-dire on s'arrête lorsque le reste ne contient que des termes de degré supérieur ou égale à m_i, de façon à pouvoir mettre en facteur t^{m_i}. Le quotient donne alors tous les coefficients associés au pôle r_i.

Exemple 1.5.4 *Dans notre exemple, le changement de variable est* $t = x - 1 \iff x = t + 1$*, donc*

$$\frac{x^3 - 21\,x - 7}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)} = \frac{t^3 + 3\,t^2 - 18\,t - 27}{t^2(t+3)(t^2+3\,t+3)} \; .$$

On divise alors $t^3 + 3\,t^2 - 18\,t - 27$ *par* $(t+3)(t^2+3\,t+3) = 9 + 12\,t + 6\,t^2 + t^3$ *suivant les puissances croissantes, à l'ordre 1 :*

$$\begin{array}{r|l}
-27 - 18\,t \;+\; 3\,t^2 \;+\; t^3 \qquad\quad & \underline{9 + 12\,t + 6\,t^2 + t^3} \\
\underline{-27 - 36\,t - 18\,t^2 - 3\,t^3} \qquad\quad & -3 + 2\,t \\
18\,t + 21\,t^2 + 4\,t^3 \qquad\quad & \\
\underline{18\,t + 24\,t^2 + 12\,t^3 + 2\,t^4} & \\
-3\,t^2 - 8\,t^3 - 2\,t^4 &
\end{array} \; .$$

D'où :

$$-27 - 18\,t + 3\,t^2 + t^3 = (-3 + 2\,t)(9 + 12\,t + 6\,t^2 + t^3) + (-3\,t^2 - 8\,t^3 - 2\,t^4)$$

En divisant par $t^2\,(t+3)(t^2+3\,t+3)$*, on a donc*

$$\frac{-27 - 18\,t + 3\,t^2 + t^3}{t^2\,(t+3)(t^2+3\,t+3)} = \frac{-3 + 2\,t}{t^2} + \frac{-3 - 8\,t - 2\,t^2}{(t+3)(t^2+3\,t+3)} \; ,$$

et on déduit du premier terme que $A_1 = 2$ *et* $A_2 = -3$*.*

NB : cette méthode est surtout intéressante s'il y a un pôle de multiplicité élevée (≥ 4**) et peu d'autres facteurs dans** $B(x)$**, ou alors s'il s'agit dès le début d'un pôle en** $x = 0$ **(ce qui évite le changement de variable).**

(e) : MÉTHODES GÉNÉRALES POUR LES COEFF. RESTANTS

(i) : méthode des limites

Cette méthode consiste à multiplier d'abord par la plus basse puissance qui intervient dans la décomposition en éléments simples, et de prendre la limite $x \to \infty$ (où il suffit de garder les puissances les plus élevées). Ainsi, on a dans le membre de droite la somme des coefficients qui correspondent à cette puissance, qui permet de déterminer un coefficient en terme des autres.

Exemple 1.5.5 *Dans notre exemple, on multiplie par* x*, la limite donne alors*

$$\lim \frac{x^4}{x^5} = 0 = A_1 + A_3 + B_1$$

et donc $B_1 = -A_1 - A_3 = -2 - 1 = -3$*.*

(ii) : méthode des valeurs particulières

Une autre méthode consiste à simplement prendre des valeurs particulières pour x (différents des pôles) et ainsi d'avoir un système d'équations qui permettra de déterminer les coefficients manquants.

Exemple 1.5.6 *Dans notre exemple, prenons $x = 0$:*

$$\frac{-7}{2} = -A_1 + A_2 + \frac{A_3}{2} + C_1$$

et donc $C_1 = -\frac{7}{2} + A_1 - A_2 - \frac{A_3}{2} = -\frac{7}{2} + 2 + 3 - \frac{1}{2} = -4 + 5 = 1.$

Remarque : dans le cas général, il faut ainsi créer un système d'autant d'équations (indépendantes) qu'il reste de coefficients à déterminer.

(iii) : par identification

La méthode générique qui marche toujours mais qui n'est pas toujours pas la plus rapide, consiste à réécrire la somme des éléments simples sur le dénominateur commun qui est $B(x)$, et d'identifier les coeff. des mêmes puissances de x du membre de gauche (coefficients de $R(x)$) et du membre de droite (les A, B, C multipliés par une partie des facteurs de $B(x)$).

Ainsi on obtient un système d'équations linéaires dont la solution donne les coefficients (manquants).

1.5.5 Application au calcul de primitives

Avec la technique étudiée dans ce chapitre, on peut intégrer toute fonction rationnelle $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$. En effet, on commence par simplifier $A(x)$ par les facteurs irréductibles de $B(x)$ pour désormais pouvoir supposer $f(x)$ irréductible. Ensuite, au cas ou $\deg A \geq \deg B$, on effectue la division euclidienne pour avoir

$$f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)} \quad \text{avec} \quad \deg R < \deg B\ .$$

Enfin, on décompose $\frac{R(x)}{B(x)}$ en éléments simples. On n'a donc plus qu'à trouver les primitives pour les deux types d'éléments simples,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-r)^k} \quad \text{et} \quad \int \frac{A\,x + B}{(x^2 + b\,x + c)^k}\,\mathrm{d}x\ .$$

La première intégrale ne pose pas de problème, sa primitive est

$$\frac{(x-r)^{-k+1}}{-k+1} \quad \text{si} \quad k \neq 1 \quad \text{et} \quad \ln|x-r| \quad \text{si} \quad k = 1\ .$$

Considérons donc le 2e type d'intégrale. On l'écrit d'abord sous la forme

$$\frac{A\,x + B}{(x^2 + b\,x + c)^k} = D\,\frac{2\,x + b}{(x^2 + b\,x + c)^k} + \frac{E}{(x^2 + b\,x + c)^k}$$

avec $D = \frac{A}{2}$ et $E = B - b\,D$. Ainsi, le premier terme est de la forme $D\,u'\,u^{-k}$, avec la primitive $\frac{D}{-k+1}u^{-k+1}$ (resp. $D\ln|u|$ pour $k=1$).

Tout ce qui reste donc à calculer est la primitive $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+b\,x+c)^k}$ ($\Delta < 0$).

Pour ce faire, on se ramène par un changement de variable à cette intégrale avec $b = 0$ et avec $c = 1$, en posant successivement $u = x + \frac{b}{2}$, puis $t = \sqrt{c - b^2/4}\,u$).
Pour calculer $\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^k}$, on pose $t = \tan\theta$, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\mathrm{d}t = (1+\tan^2\theta)\mathrm{d}\theta$.
[justifier ce chgt de variable !]
Alors

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^k} = \int \frac{(1+\tan^2\theta)d\theta}{(1+\tan^2\theta)^k} = \int \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\tan^2\theta)^{k-1}} = \int (\cos\theta)^{2k-2}\ \mathrm{d}\theta$$

(rappel : $1/\cos^2\theta = 1+\tan^2\theta$).
Pour $k = 1$, une primitive est $\theta = \arctan t$. Sinon, on fait une intégration par partie d'un facteur $\cos x$ pour diminuer l'exposant de 2 :

$$\begin{aligned}\int \cos^{2k-2} x\,\mathrm{d}x &= [\cos^{2k-3} x \sin x] - \int (2k-3)\cos^{2k-4} x(-\sin x)\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= [\cos^{2k-3} x \sin x] + (2k-3)\int \cos^{2k-4} x(1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2k-2}\left([\cos^{2k-3} x\sin x] + (2k-3)\int \cos^{2k-4} x\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

où la dernière ligne est obtenue en faisant passer toutes les $\int \cos^{2k-2} x\,\mathrm{d}x$ dans le membre de gauche puis en divisant par le coefficient $4-2k$. Avec $\cos^{2k-3} x\sin x = \cos^{2k-2} x \tan x$ et $\cos^2 x = 1+\tan^2 x$, on a enfin

$$\begin{aligned}I_k &:= \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^k} \\ &= \frac{1}{2k-2}\left(\left[\frac{t}{(1+t^2)^{k-1}}\right] + (2k-3)I_{k-1}\right)\end{aligned}$$

ce qui permet, avec $I_1 = \arctan t$, de calculer I_k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 1.5.1 *Dans la pratique, on effectue le changement de variables pour passer de $x^2 + b\,x + c$ à $1 + \tan^2\theta$ en une seule fois.*

Exemple 1.5.7 *On écrira par exemple*

$$\begin{aligned}x^2+x+1 &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4}\left(\left[\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2 + 1\right) = \frac{3}{4}(\tan^2\theta + 1)\ ,\end{aligned}$$

avec $\tan\theta = \sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

1.5.6 Primitives des fonctions rationnelles de $\sin x$ et $\cos x$

Définition 27 *On dit que $f(x)$ est une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$ s'il existent des polynômes (en 2 variables) $A, B \in \mathbb{R}[X, Y]$ (c'est-à-dire $A = \sum a_{ij} X^i Y^j$, idem pour B) tels que $f(x) = A(\sin x, \cos x)/B(\sin x, \cos x)$.*

Exemple 1.5.8 $f(x) = \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x \cos^2 x}$ *: ici, $A = Y - X$, $B = X Y^2$.*

Méthode d'intégration : On distingue 3 cas (aide mnémotechnique : la nouvelle variable est chaque fois invariante sous la transformation considérée)

– si $f(-x) = -f(x)$, on pose $t = \cos x$ (invariant, or $\sin(-x) = -\sin(x)$)
– si $f(\pi - x) = -f(x)$, on pose $t = \sin x$ (invar., or $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$)
– si $f(\pi + x) = f(x)$, on pose $t = \tan x$ (invar., mais $\sin$, $\cos$ chgt de signe)

Exemple 1.5.9 $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x + \sin^2 x}$. *On pose $t = \cos x$, $\mathrm{d}t = -\sin x dx$, donc*

$$\int f(x)dx = \int \frac{-\mathrm{d}t}{t^3 + (1 - t^2)} ,$$

on arrive ainsi à une simple fraction rationnelle à intégrer, et on substituera finalement $t = \cos x$ dans le résultat.

1.5.7 Autres fractions rationnelles

Dans les cas suivants, on peut encore se ramener à la recherche d'une primitive d'une fraction rationnelle :

Théorème 28

a) $f(e^x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, thx)$ **:** *on pose* $t = e^x,\ x = \ln t,\ \mathrm{d}x = \frac{1}{t}\mathrm{d}t$. *Avec* $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(t - t^{-1})$, $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(t + t^{-1}\right)$, *on retrouve une fraction rationnelle en* t.

b) $f\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{a\,x+b}{c\,x+d}}\right)$ **avec** $ad - bc \neq 0$ **:** *on pose*

$$y = \sqrt[n]{\frac{a\,x+b}{c\,x+d}} \iff x = \frac{b - d\,y^n}{c\,y^n - a},\ \mathrm{d}x = \frac{a\,d - b\,c}{(c\,y^n - a)^2} n\,y^{n-1}\mathrm{d}y.$$

et on retrouve encore une fraction rationnelle en y.

c) $f(x, \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c})$ **:** *On transforme la racine en une des formes suivantes :*
- $\sqrt{t^2+1}$ *: on pose alors* $t = \operatorname{sh} u \implies \sqrt{t^2+1} = \operatorname{ch} u$
- $\sqrt{t^2-1}$ *: on pose alors* $t = \pm \operatorname{ch} u\ (u > 0) \implies \sqrt{t^2-1} = \operatorname{sh} u$
- $\sqrt{1-t^2}$ *: on pose alors* $t = \sin u$ *ou* $t = \cos u$

Dans chacun des cas, on retombe sur une fraction rationnelle d'un des types qui précèdent (avec $\operatorname{ch}, \operatorname{sh}$ *ou* $\sin, \cos$*).*

Exemple 1.5.10 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 4\,x + 5}}$ *: on a* $x^2 + 4\,x + 5 = (x+2)^2 + 1$*, on posera donc* $x + 2 = \operatorname{sh} u$*, d'ou* $\sqrt{x^2+4\,x+5} = \operatorname{ch} u$*,* $\mathrm{d}x = \operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u$ *et*

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\operatorname{sh} u - 2}{\operatorname{ch} u}\ \operatorname{ch} u\,\mathrm{d}u = \int (\operatorname{sh} u - 2)\,\mathrm{d}u \\ &= \operatorname{ch} u - 2\,u = \sqrt{x^2 + 4\,x + 5} - 2\operatorname{Arsh}(x+2)\ .\end{aligned}$$