Agrégation de Mathématiques

Exercices d'algèbre linéaire

P. HUBERT

La plupart des exercices ci-dessous se trouvent dans les livres suivants :

- E. Leichtnam, X. Schaeur, Exercices corrigés de mathématiques posés à l'oral des concours de polytechnique et des écoles normales supérieures (tome 1, 2).
- R. Mneimné, Testard, Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques,
- D. Perrin, Cours d'Algèbre,
- E. Ramis, C. Deschamp, J. Odoux, Cours de mathématiques spéciales (tome 1).

Les indications sont mentionnées entre $[[\]]$. Les exercices les plus difficiles sont repérés par une $*$ et ceux qui font partie intégrante du cours par un $\diamond$.

Dans tous les exercices, E est un espace vectoriel de dimension n sur un corps K .

1 Espaces vectoriels, endomorphismes : quelques résultats généraux

Exercice 1 $\diamond$: Soit u appartenant à $L(E)$ et pour tout k appartenant à $\mathbb{N}$, notons N^k le noyau de u^k et F^k l'image de u^k .

1. Montrer que les N^k forment une suite croissante pour l'inclusion et que $k^0 = \inf\{k \geq 0, \text{ tels que } N_k = N_{k+1}\}$ est bien défini.
2. Montrer que, pour tout $k \geq k_0$, $N_k = N_{k_0}$ et $F_k = F_{k_0}$.
3. Si $k_0 > 0$, montrer que $E = N_{k_0} \oplus F_{k_0}$.
4. Montrer que N_{k_0} et F_{k_0} sont stables par u , que la restriction de u à N_{k_0} est un endomorphisme nilpotent, que la restriction de u à F_{k_0} est un endomorphisme inversible.

Exercice 2: Soit K un corps infini et $E_1, \dots, E_s$ des sous-espaces stricts de E . Montrer que $E \neq \cup_{i=1}^s E_i$.

Exercice 3:

1. Soient f et g appartenant à $L(E)$ tels que $g + h$ est inversible et $gh = 0$. Montrer que $rg(g) + rg(h) = n$.
2. * Soit E un espace vectoriel de dimension nq et f appartenant à $L(E)$ tel que $f^q = 0$ et $rg(f) = (q - 1)n$. Prouver que $rg(f^{q-1}) = n$.
[[Appliquer le théorème du rang à $f, f|_{Im(f)}, \dots, f|_{Im(f^{q-1})}$]]

Exercice 4:

1. Soit u un endomorphisme de E tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

2. Montrer que M appartient à $K[N]$ si et seulement s'il existe $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$ tels que

$$M = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ & & \dots & & \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

3. A quelle condition $M \in K[N]$ est-elle inversible ?

Exercice 5: [Projecteurs]

1. Soit p un projecteur, montrer que $rg(p) = tr(p)$.
[[Cette propriété est fondamentale et extrêmement utile dans cet exercice ainsi que dans l'exercice 40.]]
2. Soient p et q deux projecteurs, montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $pq = qp = 0$.
3. On généralise ce résultat à k projecteurs. Soient $p_1, \dots, p_n$ n projecteurs, montrer que $p_1 + \dots + p_k$ est un projecteur si et seulement si, pour tout $i, j \in \{1, \dots, k\}$, avec $i \neq j$, $p_i p_j = 0$.
4. Soit p un projecteur et F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que F est stable par p si et seulement si $F = F_1 \oplus F_2$ où $F_1 = F \cap Ker(p)$ et $F_2 = F \cap Im(p)$.
Soit $f \in L(E)$, montrer que f commute avec p si et seulement si $Im(p)$ et $Ker(p)$ sont stables par f .

Exercice 6: Soit M une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que, pour tout nombre premier p , $\text{tr}(M) = \text{tr}(M^p)$.
[[Travailler dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.]]

Exercice 7 $\diamond$: Soit K un corps à q éléments, calculer le cardinal de $GL_n(K)$, celui de $SL_n(K)$.

2 Déterminants, applications

Exercice 8: [Déterminant circulant]

Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ des nombres complexes et $w = e^{2i\pi/n}$. Soient A et M les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & w & \cdots & w^{n-2} & w^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & w^{n-1} & \cdots & (w^{n-1})^{n-2} & (w^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix}$$

Calculer AM et en déduire $\det(A)$.

[[On pourra introduire le polynôme $a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$.]]

Exercice 9: [Déterminant tridiagonal]

Soient a, b, c trois nombres réels. Soit $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$\begin{cases} A_n(i, i) = a \text{ pour } i = 1 \dots n \\ A_n(i, i-1) = b \text{ pour } i = 2 \dots n \\ A_n(i, i+1) = c \text{ pour } i = 1 \dots n-1 \\ A_n(i, j) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On note $\Delta_n = \det(A_n)$. Etablir une relation de récurrence faisant intervenir Δ_n , Δ_{n-1} et Δ_{n-2} . En déduire la valeur de Δ_n .

Exercice 10: Soit A la matrice $n \times n$ dont le coefficient $A(i, j) = |i - j|$. Calculer $\det(A)$

[[On pourra faire des opérations sur les lignes de A]].

Exercice 11: Soient $a, b, x_1, \dots, x_n$ des nombres réels tels que $a \neq b$. On définit la matrice A par

$$\begin{cases} A(i, i) = x_i \text{ pour } i = 1 \dots n \\ A(i, j) = a \text{ si } i > j \\ A(i, j) = b \text{ si } i < j \end{cases} \quad \text{Le but de l'exercice est de calculer } D$$

le déterminant de A .

Pour tout t réel, on définit la matrice A_t par

$$\begin{cases} A_t(i, i) = x_i + t \text{ pour } i = 1 \dots n \\ A_t(i, j) = a + t \text{ si } i > j \\ A_t(i, j) = b + t \text{ si } i < j \end{cases}$$

On note D_t le déterminant de A_t .

1. Montrer que $D(t)$ est un polynôme en t de degré 1.
2. Calculer D_t pour deux valeurs particulières de t .

3. En déduire la valeur de $D = D_0$.

Exercice 12: Soit A la matrice définie par $A(i, j) = \min(i, j)$. On veut calculer $\det(A)$. On introduit la matrice B définie par :
$$\begin{cases} B(i, i) = 1 \text{ si } i \leq j \\ B(i, i) = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Montrer que ${}^tBB = A$. En déduire $\det(A)$.

Exercice 13: Soient A et B deux matrices à coefficients réels qui sont semblables dans $M_n(\mathbb{C})$, montrer qu'elles sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 14* : Soit V un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ tel qu'il existe p avec $1 \leq p \leq n$ tel que, pour tout $M \in V$, $rg(M) \leq p$. On veut montrer que $\dim(V) \leq np$.

1. Donner un exemple d'un tel V vérifiant l'hypothèse et dont la dimension est np .

2. Montrer qu'il suffit de montrer le résultat lorsque $\begin{pmatrix} I_p & O \\ 0 & O \end{pmatrix}$ appartient à V .
On suppose cela dans la suite de l'exercice.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ où A est une matrice $p \times p$ et D une matrice $(n-p) \times (n-p)$. On suppose que M appartient à V , montrer que $D = 0$ et $CB = 0$.

[[Considérer les matrices $M_\lambda = \begin{pmatrix} A + \lambda I_p & B \\ C & D \end{pmatrix}$, où λ est un paramètre réel.
Utiliser le fait que les mineurs d'ordre $(p+1)$ de M_λ sont nuls.]]

4. Montrer que V s'injecte dans $M_{p,n}(\mathbb{R})$ par l'application linéaire

$$\Phi : \begin{matrix} V & \rightarrow & M_{p,n}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} & \mapsto & (A, B + {}^t C) \end{matrix}$$

Conclure.

5. Application : Montrer que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ contient une matrice inversible.

3 Dualité

Exercice 15: Soit A appartenant à $M_n(K)$, on définit la forme linéaire ϕ_A par $\phi_A(M) = tr(AM)$.

1. Montrer que

$$\Phi : \begin{matrix} M_n(K) & \rightarrow & (M_n(K))^* \\ A & \rightarrow & \phi_A \end{matrix}$$

est un isomorphisme.

2. En déduire que si ψ est une forme linéaire sur $M_n(K)$ vérifiant $\psi(AB) = \psi(BA)$ pour tout $A, B \in M_n(K)$ alors ψ est colinéaire à la trace.

Exercice 16: Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension n . Soit u appartenant à $L(E)$ tel que $u^2 = -id$. Montrer que n est pair et que u n'admet pas d'hyperplan stable.

[[Faire intervenir la transposée de u .]]

Exercice 17: Soit $r \in \{1 \dots n - 1\}$ et u appartenant à $L(E)$. On suppose que u laisse invariants tous les sous-espaces vectoriels de dimension r . Montrer que u est une homothétie.

[[Commencer par considérer le cas $r = n - 1$ et introduire ${}^t u$.]]

4 Matrices inversibles, $GL_n(K)$, $SL_n(K)$

Exercice 18 $\diamond$: Soit A appartenant à $M_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|A_{i,i}| > \sum_{j \neq i} A_{i,j}$. Montrer que A est inversible.

Exercice 19 $\diamond$: Soit $\| \cdot \|$ une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ (ou $M_n(\mathbb{C})$) et u un endomorphisme vérifiant $\|u\| < 1$, montrer que $id - u$ est inversible.

Exercice 20 $\diamond$:

1. Montrer que les transvections sont conjuguées dans $GL_n(K)$.
[[Utiliser la réduite de Jordan.]]
2. Montrer que si $n \geq 3$, les transvections sont conjuguées dans $SL_n(K)$.
3. Lorsque $n = 2$, vérifier que toute transvection est conjuguée dans $SL_2(K)$ à une matrice de la forme $T_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où λ appartient à K^* . Montrer que T_λ et T_μ sont conjuguées si et seulement si λ/μ est un carré dans K^* .

5 Polynômes d'endomorphismes, valeurs propres

Exercice 21: Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel. Montrer que u est nilpotente si et seulement si $Tr(u^k)$ pour $0 \leq k \leq n$.

[[Utiliser le lien entre les coefficients et les racines d'un polynôme ainsi que les formules de Newton.]]

Exercice 22: Soit u un endomorphisme de E . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $K[u]$ est un corps.

2. $K[u]$ est un anneau intègre.
3. Le polynôme minimal de u est irréductible sur K .

Lorsque $K = \mathbb{C}$, que peut-on dire de u lorsque $\mathbb{C}[u]$ est un corps ?

Exercice 23: On suppose que $K = \mathbb{C}$.

1. Soient f et g appartenant à $L(E)$ tels que $fg - gf = f$, montrer que f est nilpotente.
2. On suppose qu'il existe λ, μ éléments de K tels que $fg - gf = \lambda f + \mu g$, montrer que f et g ont un vecteur propre commun.

Exercice 24:

1. $\diamond$ Soit f appartenant à $L(E)$, montrer que

$$\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \Leftrightarrow \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = E.$$

2. Soit P un polynôme à coefficients dans K tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. On suppose que $P(f) = 0$. Montrer que $\text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = E$.

[[Le seul cas intéressant est celui où 0 est valeur propre de f , utiliser alors le théorème de décomposition des noyaux.]]

Exercice 25: [Calcul des puissances d'une matrice]

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer χ_A et μ_A . Pour tout $q \in \mathbb{Z}$ calculer A^q .

[[Réduire en éléments simples $\frac{X^q}{\mu_A(X)}$ et substituer A .]]

6 Endomorphismes diagonalisables, trigonalisables

Exercice 26 $\diamond$:

1. Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ espace vectoriel et $x_1, \dots, x_k$ des vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes. Soit F un sous-espace stable par f et soit $w = x_1 + \dots + x_k$. On suppose que w appartient à F montrer que $x_1, \dots, x_k$ appartiennent à F .
2. Soit f un endomorphisme diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ et F un sous-espace vectoriel stable par f . Montrer que

$$F = \bigoplus_{i=1}^s F_i$$

où $F_i = F \cap E_i$, avec E_i sous-espace propre associé à λ_i .

Exercice 27: Soit $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est un nombre premier et soit f appartenant à $L(E)$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^p = f$.

Exercice 28: On suppose que $K = \mathbb{C}$ et que u appartient à $L(E)$.

1. P un polynôme à coefficients complexes. Trouver le spectre de $P(u)$ en fonction du spectre de u .
2. Supposons que u^2 est diagonalisable, montrer que u est diagonalisable si et seulement si $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$.
[[Utiliser le théorème de décomposition des noyaux.]]

Exercice 29: Soit f un endomorphisme diagonalisable et $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ ses valeurs propres de multiplicité $m_1, \dots, m_s$. On note $\mathcal{C}(f)$ le commutant de f .

1. Montrer que g appartient à $\mathcal{C}(f)$ si et seulement si g laisse invariant les sous-espaces propres par f .
2. En déduire que la dimension de $\mathcal{C}(f)$ est $\sum_{i=1}^s m_i$.
3. Vérifier que cette dimension est supérieure ou égale à n . A quelle condition a-t-on égalité ? A quelle condition a-t-on $\mathcal{C}(u) = K[u]$?

Exercice 30: Soit A appartenant à $M_n(\mathbb{C})$. On définit $\phi : \begin{matrix} M_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & M_n(\mathbb{C}) \\ M & \rightarrow & AM \end{matrix}$.

1. Montrer que λ appartient au spectre de A si et seulement si λ appartient au spectre de ϕ .
2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si ϕ est diagonalisable.

Exercice 31:

1. Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que, pour tout A appartenant à G , $A^2 = A$.
Montrer que G est abélien, formé de matrices diagonalisables.
2. Montrer que G est fini et qu'il existe k ($1 \leq k \leq n$) tel que G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^k$.
3. * En utilisant les questions précédentes, montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ n'est pas isomorphe à $GL_m(\mathbb{C})$ si $n \neq m$.
4. Vérifier que la preuve se généralise à tout corps K de caractéristique différente de deux. ($GL_n(K)$ n'est pas isomorphe à $GL_m(K)$ si $n \neq m$).

Exercice 32: Soient A et B appartenant à $M_n(\mathbb{C})$ deux matrices qui commutent. Montrer que $\rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B)$.

[[utiliser la trigonalisation simultanée.]]

Le résultat précédent est-il vrai sans hypothèse sur A et B ?

7 Applications des réductions de Dunford et Jordan

Exercice 33 $\diamond$: Soit M une matrice à coefficients réels, montrer que M et tM sont semblables.

[[Raisonnement dans $M_n(\mathbb{C})$ et utiliser l'exercice 6.]]

Exercice 34: On suppose ici que E est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.

1. Soit $f = \lambda id + N$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ et N est un endomorphisme nilpotent d'indice r . Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(f^q)_{q \in \mathbb{N}}$ soit bornée dans $L(E)$.

2. Même question lorsque q varie dans $\mathbb{Z}$.

3. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, donner une condition suffisante pour que la suite $(A^q)_{q \in \mathbb{N}}$ soit bornée.

[[Utiliser la question 1 et la réduction de Dunford.]]

4. Même question lorsque q varie dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 35 $\diamond$: [Endomorphismes simples]

Soit u un endomorphisme de E . On dit que u est simple si les seuls sous-espaces stables par u sont $\{O\}$ et E .

1. Montrer que u est simple si et seulement si son polynôme caractéristique est irréductible dans $K[X]$.

2. Supposons que $K = \mathbb{R}$ et soit f appartenant à $L(E)$. Montrer que f admet soit une droite stable soit un plan stable.

3. Applications : Quels sont les endomorphismes simples lorsque le corps de base est $\mathbb{C}$?

Donner un exemple de matrices 2×2 qui est simple dans $M_n(\mathbb{R})$ mais pas dans $M_n(\mathbb{C})$ (une matrice est simple si l'endomorphisme associé l'est).

Déterminer toutes les matrices simples dans $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 36: Soient f et g deux endomorphismes nilpotents. Montrer que f et g sont semblables si et seulement si, pour tout k appartenant à $\mathbb{N}$, $\dim(\text{Ker}(f^k)) = \dim(\text{Ker}(g^k))$.

[[Utiliser la forme réduite des endomorphismes nilpotents.]]

8 Topologie des matrices

Exercice 37 $\diamond$: Déterminer les normes subordonnées aux normes 1, 2, ∞ .

Exercice 38 $\diamond$: Montrer que

$$\Phi : \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{C}) & \rightarrow & GL_n(\mathbb{C}) \\ A & \mapsto & A^{-1} \end{array}$$

est continue.

Exercice 39 $\diamond$: Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\| \cdot \|$ une norme sur $M_n(\mathbb{C})$, on veut montrer que :

$$\rho(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|A^k\|)^{1/k}.$$

1. Montrer que si le résultat est vrai pour une norme fixée, il est vrai pour toute norme sur $M_n(\mathbb{C})$.
2. On suppose donc que $\| \cdot \|$ est une norme induite. Montrer que

$$\rho(A) \leq (\|A^k\|)^{1/k}, \text{ pour tout entier } k.$$

3. Montrer que si $\rho(A) < 1$ alors la suite (A^k) converge vers 0.
[[Utiliser la réduction de Dunford.]]

4. Soit $\varepsilon > 0$, en considérant la matrice $\frac{A}{\rho(A) + \varepsilon}$, montrer que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (\|A^k\|)^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

En déduire le résultat cherché.

Exercice 40: Soit $\mathcal{P}$, le sous-ensemble de $L(E)$ formé des projecteurs. Montrer que les composantes connexes de $\mathcal{P}$ sont de la forme : $\mathcal{P}_i = \{p \in \mathcal{P}, \text{ tels que } rg(p) = i\}$ où $i \in \{0, \dots, n\}$.

Exercice 41:

1. Soit P un polynôme unitaire de degré n à coefficients réels qui est scindé sur $\mathbb{R}$ et soit $\lambda = \alpha + i\beta$ un nombre complexe. Montrer que $|P(\lambda)| \geq \beta^n$.
2. Soit A une matrice à coefficients réels qui n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$, montrer que A n'est pas dans l'adhérence des matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$.
[[Raisonnement par l'absurde, introduire les polynômes caractéristiques de la suite de matrices diagonalisables qui tend vers A et utiliser la première question.]]
3. Déduire de ce qui précède que l'adhérence, dans $M_n(\mathbb{R})$, des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices trigonalisables sur $\mathbb{R}$.

9 Matrices à coefficients dans un anneau

Exercice 42: Soit λ un nombre complexe et $J(\lambda) \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice de Jordan définie par

$$\begin{cases} J(\lambda)_{(i,i)} = \lambda \\ J(\lambda)_{(i,i+1)} = 1 \\ J(\lambda)_{(i,j)} = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer le polynôme minimal et caractéristique de $J(\lambda)$ et appliquer le théorème d'unicité des invariants de similitude. En déduire les invariants de similitude de $J(\lambda)$.
2. Soit $J(\lambda)(X) = J(\lambda) - XI_n \in M_n(\mathbb{C}[X])$. Par des opérations élémentaires, trouver une matrice diagonale $(D_1, \dots, D_n)$ équivalente à $J(\lambda)(X)$ avec D_i divise D_{i+1} si $0 \leq i < n$. Vérifier que les D_i sont les invariants de similitude de $J(\lambda)$.

Remarque : Ceci est très général : étant donné $M \in M_n(K)$ une matrice carrée et $M(X) = M - XI_n \in M_n(K[X])$, il existe toujours (voir exercice suivant) une matrice diagonale $(D_1, \dots, D_n)$, équivalente à $M(X)$, avec D_i divise D_{i+1} si $0 \leq i < n$. Les D_i sont alors les invariants de similitude de M .

Exercice 43: Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice $n \times n$ à coefficients dans $K[X]$ où K est un corps. On veut montrer :

Il existe deux matrices P et $Q \in GL_n(K[X])$ telles que $A = PDQ$ où D est une matrice diagonale de coefficients $D_1, \dots, D_n$ vérifiant D_i divise D_{i+1} si $0 \leq i < n$. On veut de plus que P et Q soient des produits de matrices élémentaires $T_{i,j} = I + E_{i,j}$ avec $i \neq j$ où $E_{i,j}$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient (i, j) qui vaut 1.

1. Montrer que P est inversible dans $M_n(K[X])$ (ie $P \in GL_n(K[X])$) si et seulement si son déterminant est inversible dans $K[X]$ (c'est-à-dire si $\det(P) \in K$).
2. Montrer qu'une matrice élémentaire $T = T_{i,j}$ appartient à $GL_n(K[X])$.
3. Soit D_1 le PGCD des $a_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$. Soit T une matrice élémentaire, posons $A' = TA$. Montrer que le PGCD des coefficients de A' est D_1 . Montrer que le résultat est aussi vrai si on multiplie à droite par une matrice élémentaire.
4. Posons $\phi(A) = \text{Min}\{\text{degré}(a_{i,j})\}$. Montrer que
 - ou bien $\phi(A) = \text{degré}(D_1)$ et il existe (i, j) tel que $a_{i,j} = D_1$ à un inversible de $K[X]$ près. (D'autres égalités dans l'exercice sont à interpréter dans ce sens).
 - ou bien $\phi(A) > \text{degré}(D_1)$.

5. Supposons que $\phi(A) = \text{degré}(D_1)$. En faisant des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, montrer qu'il existe une matrice A' équivalente à A de la forme :

$$A' = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & M \\ 0 & \end{bmatrix}$$

où $M \in M_{n-1}(K[X])$ et tous les coefficients de M sont divisibles par D_1 .

6. * On se place dans le cas où $\phi(A) > \text{degré}(D_1)$. Montrer, qu'en appliquant un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, on se ramène au cas où $\phi(A) = \text{degré}(D_1)$.

[[Faire baisser $\phi(A)$ à chaque étape.]]

7. Montrer le résultat par récurrence sur la dimension.

8. On montre ci-dessous que les D_i sont uniques (à un inversible de $K[X]$ près).

- (a) Soit $A \in M_n(K[X])$, notons $\Delta_k(A)$ le PGCD des déterminants $k \times k$ extraits de A . Soit $A' = PA$, montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\Delta_k(A) \text{ divise } \Delta_k(A').$$

- (b) En déduire que si $A' = PA$, avec $P \in GL_n(K[X])$, alors

$$\Delta_k(A) = \Delta_k(A').$$

- (c) Déduire de la question précédente que $D_i = \Delta_i(A)$ pour $1 \leq i \leq n$. En déduire que les D_i sont uniques.

Remarque : Cet exercice est difficile tout particulièrement la question 6. On trouve une preuve presque claire dans Goblot "Algèbre commutative" P34-35. Le cas d'un anneau euclidien quelconque y est traité et c'est instructif.