Cours de Mathématiques

MPSI-2 Lycée Fermat

Alain Soyeur

Table des matières

Chapitre 1

Raisonnement, ensembles

1.1 Logique.

Une *proposition* est un énoncé qui peut prendre deux valeurs logiques : V (vrai) ou F (faux).
En mathématiques, on part d'un petit nombre de propositions que l'on suppose vraies (les *axiomes*) et l'on essaie d'étendre le nombre d'énoncés vrais au moyen de *démonstrations*. Pour cela on utilise des règles de logique.
À partir de deux propositions quelconques A et B, on en fabrique de nouvelles dont on définit la valeur logique en fonction des valeurs logiques de A et de B. Une « table de vérité » résume cela :

A	B	non A	A et B	A ou B	$A \Rightarrow B$	$A \Longleftrightarrow B$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

L'évaluation des nouvelles propositions en fonction de la valeur des anciennes paraît naturelle sauf pour l'implication. En effet, si la proposition A vaut F, quelle que soit la valeur de vérité de la proposition B, la proposition $A \Rightarrow B$ sera évaluée à V. On utilise en mathématiques l'implication pour obtenir de nouveaux résultats. Si l'on sait qu'un résultat A est vrai et si l'on montre que l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie, alors d'après la table de vérité, on en déduit que la proposition B est vraie, ce qui étend les résultats mathématiques.
Pour montrer que $A \Rightarrow B$ est vrai, on peut utiliser l'un des deux raisonnements suivants :

Raisonnement direct : Supposons A vrai, et montrons qu'alors B est vrai ;
Raisonnement par contraposée : Supposons B faux et montrons que A est faux.

`Exemple 1.` On considère un nombre réel $x \geq 0$ et les deux propositions :
- A : Pour tout réel ε strictement positif, $0 \leq x \leq \varepsilon$;
- B : $x = 0$.

Montrer que $A \Rightarrow B$.

Pour montrer une équivalence $A \Longleftrightarrow B$, on procède en deux temps :
1. On montre que $A \Rightarrow B$ est vrai ;
2. On montre que $B \Rightarrow A$ est vrai.

`Exemple 2.` On considère une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et les deux propositions
- A : f est une fonction paire et impaire ;
- B : f est la fonction nulle.

Montrer que $A \Longleftrightarrow B$.
Remarque 1. Pour montrer l'équivalence de trois propositions $A \Longleftrightarrow B \Longleftrightarrow C$, il suffit de montrer trois implications convenablement choisies, par exemple $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$ et $C \Rightarrow A$.

Raisonnement par l'absurde.
On suppose qu'une proposition B est fausse. Si on aboutit à une contradiction avec une proposition A que l'on sait être vraie, alors on a montré que B est vraie.

`Exemple 3.` Montrer que le réel $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

1.2 Ensembles

Sans rentrer dans les détails, un ensemble est une « collection » d'objets appelés *éléments*. On note $\boxed{x \in E}$ si l'objet x est un élément de E.
Soit $P(x)$ une propriété dépendant d'un objet x d'un ensemble E. On note :
- $\forall x \in E,\ P(x)$ lorsque la propriété est vraie *pour tous* les éléments x ;
- $\exists x \in E,\ P(x)$ lorsqu'*il existe* au moins un élément x de l'ensemble E pour lequel la propriété est vraie ;
- $\exists! x \in E,\ P(x)$ lorsqu'*il existe un unique* élément de l'ensemble E pour lequel la propriété est vraie.

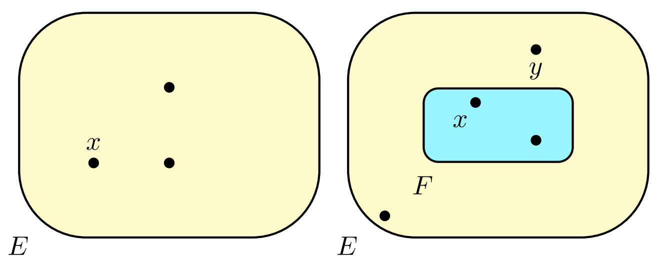
Il faut savoir nier une proposition dépendant de quantificateurs :

Exercice 1-1

Quelle est la négation des propositions suivantes :
1. $\forall x \in E,\ P(x)$;
2. $\exists x \in E,\ P(x)$;
3. $\forall x \in E,\ \exists y \in E,\ P(x,y)$;
4. $\exists x \in E,\ \forall y \in E,\ P(x,y)$;
5. $\exists r \in \mathbb{R},\ \exists s \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \leq r$ et $s \leq r$.

Remarque 2. Nous utiliserons beaucoup les mots « soit » et « posons » dans nos démonstrations cette année.
- Pour montrer une proposition de la forme : $\forall x \in E, \quad P(x)$ (*quel que soit* x dans E, x vérifie une propriété) on commence la démonstration par : « Soit $x \in E$ ». Imaginez qu'une personne extérieure mette en doute votre résultat. Elle vous donne un élément x *de son choix*. Vous n'avez pas le droit de choisir vous même cet élément, et vous devez montrer que cet élément vérifie bien la propriété.
- Pour montrer une proposition de la forme : $\exists x \in E$ tel que $P(x)$ (il existe un objet x vérifiant la propriété $P(x)$), il vous suffit *d'exhiber* un élément x vérifiant cette propriété. La démonstration contiendra alors la phrase : « Posons $x = \ldots$ Vérifions que x convient ... »
- Pour montrer qu'une proposition de la forme : $\forall x \in E, P(x)$ est fausse (c'est à dire que $\exists x \in E$ tel que $P(x)$ est faux), il suffit d'exhiber un *contre-exemple* : « Posons $x = \ldots$ ». Pour cet élément x, $P(x)$ est fausse.

Si E et F sont deux ensembles, on note $\boxed{E \subset F}$ lorsque tous les éléments de E sont des éléments de F : $\forall x \in E$, $x \in F$.



(a) $x \in E$ (b) $F \subset E$

FIG. 1.1 – *Notations ensemblistes*

Un ensemble particulier est l'*ensemble vide* noté $\emptyset$. Il ne contient aucun élément, et pour tout ensemble E, on a $\emptyset \subset E$.

`Exemple 4.` Soit l'ensemble $E = \{\{\emptyset\}, 1, \mathbb{N}, \{0,1,2\}\}$. Mettre le signe $\in$ ou $\notin$ et $\subset$ ou $\not\subset$ correct entre les objets suivants :
- $\emptyset \ldots E$;
- $\{\emptyset\} \ldots E$;
- $\mathbb{N} \ldots E$;
- $\{\emptyset, \mathbb{N}\} \ldots E$.

Pour montrer que $E \subset F$, on utilise le plan suivant : Soit $x \in E$. ... $x \in F$.

Définition 1.1 : Egalité de deux ensembles
On note $E = F$ ssi
$$E \subset F \text{ et } F \subset E$$

Pour montrer que $E = F$, on utilise le plan suivant :
1. Montrons que $E \subset F$: ... ;
2. Montrons que $F \subset E$: ....

Définition 1.2 : Intersection, union, complémentaire
Soient E et F deux ensembles. On définit de nouveaux ensembles :
- **Intersection** $E \cap F$: $x \in E \cap F$ lorsque $x \in E$ *et* $x \in F$;
- **Union** $E \cup F$: $x \in E \cup F$ lorsque $x \in E$ *ou* $x \in F$;
- **Complémentaire** $E \setminus F$: $x \in E \setminus F$ lorsque $x \in E$ *et* $x \notin F$.

Exercice 1-2

On considère trois ensembles A,B,C. Montrer que
$$(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \Rightarrow (B \subset C)$$

Exercice 1-3

On considère trois ensembles A,B,C. Comparer les ensembles :
1. $A \cap (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cup (A \cap C)$;
2. $A \cup (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Définition 1.3 : ensemble des parties de E
Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de E.

`Exemple 5.` Si $E = \{a,b,c\}$, $\mathcal{P}(E) = \big\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\big\}$

Exercice 1-4

Écrire l'ensemble $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(E)\big)$ lorsque $E = \{a,b\}$.

Définition 1.4 : Produit cartésien
Soient E et F deux ensembles. On note $E \times F$ l'ensemble des « couples » (x,y) avec $x \in E$ et $y \in F$. L'ensemble $E \times F$ s'appelle le *produit cartésien* des ensembles E et F.
On définit de même pour n ensembles $E_1,\dots,E_n$, l'ensemble $E_1 \times \dots \times E_n$ formé des n-uplets $(x_1,\dots,x_n)$ avec $x_1 \in E_1,\dots,x_n \in E_n$.

Remarque 3. Ne pas confondre un couple de deux éléments (x,y) avec la paire $\{x,y\}$.

Remarque 4. Soit E un ensemble de référence, et $\mathcal{P}(x)$ une propriété qui dépend de l'élément $x \in E$. On peut définir l'ensemble des éléments de l'ensemble E pour lesquels la propriété est vraie :
$$F = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x) \text{ est vrai }\}$$

Il est nécessaire d'utiliser un ensemble de référence E sous peine d'aboutir à des paradoxes.

1.3 Applications

DÉFINITION 1.5 : **Définition d'une application**
Soient E et F deux ensembles. Soit $G \subset E \times F$ un sous-ensemble de couples vérifiant :

$$\forall x \in E \ ; \exists ! y \in F \text{ tel que } (x,y) \in G$$

A chaque élément de x, on fait alors correspondre l'unique élément y noté $f(x)$ de l'ensemble F tel que $(x,y) \in G$. On dit que G est un *graphe fonctionnel*.

$$\underset{x}{E} \xrightarrow{f} \underset{y=f(x)}{F}$$

La donnée (E,F,G) (ensemble de départ, d'arrivée et graphe fonctionnel) s'appelle une *application* de l'ensemble E vers l'ensemble F notée plus simplement :

$$f : E \mapsto F \text{ ou } E \xrightarrow{f} F$$

Remarque 5.

- Fonction et application sont synonymes.
- On notera $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F. (On trouve également la notation F^E).

DÉFINITION 1.6 : **Égalité de deux applications**
Soient $f : E \mapsto F$ et $f' : E' \mapsto F'$ deux applications. On dit que qu'elles sont égales et l'on note $f = f'$ lorsque elles ont même ensemble de départ : $E = E'$, même ensemble d'arrivée : $F = F'$ et lorsque

$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$$

Pour montrer que $f = g$, on utilise le plan suivant :
Soit $x \in E$.
...
$f(x) = g(x)$

DÉFINITION 1.7 : **Identité**
Soit E un ensemble. On appelle *identité* de E l'application

$$\mathrm{id}_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$$

DÉFINITION 1.8 : **Restriction et prolongement d'une fonction**
Soit $f : E \mapsto F$ une application.

- Soit un sous-ensemble $E' \subset E$. On définit *la* restriction de l'application f au sous-ensemble E' comme étant l'application

$$f_{|E'} : \left\{ \begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

- Si $E \subset E'$, une application $\widetilde{f} : E' \mapsto F$ est *un* prolongement de l'application $f : E \mapsto F$ si et seulement si $\widetilde{f}_{|E} = f$, c'est à dire que $\forall x \in E$, $f(x) = \widetilde{f}(x)$.

DÉFINITION 1.9 : **Composée d'applications**
Soit deux applications $f : E \mapsto F$, $g : F \mapsto G$, on définit l'application *composée* notée $h = g \circ f : E \mapsto G$ par la correspondance :

$$\forall x \in E, \ h(x) = g\big(f(x)\big)$$

$$\underset{x}{E} \xrightarrow{f} \underset{f(x)}{F} \xrightarrow{g} \underset{g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)}{G}$$

Remarque 6. Lorsqu'il s'agit de composer des applications, il est bon d'utiliser des schémas d'applications pour vérifier la validité des composées.

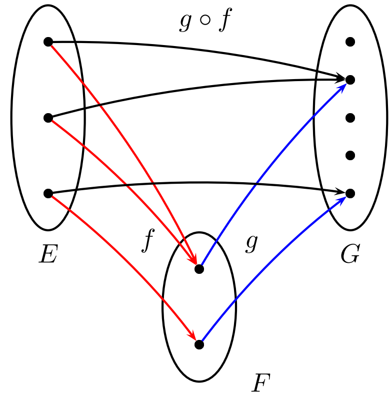


Fig. 1.2 – *Composée de deux applications*

Théorème 1.1 : « Associativité » de la composition

1. Pour trois applications
$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$$
on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
2. Si $f : E \mapsto F$, on a
$$f \circ \mathrm{id}_E = f \text{ et } \mathrm{id}_F \circ f = f$$

Définition 1.10 : Applications injectives, surjectives, bijectives

Soit $f : E \mapsto F$ une application. On dit que
- f est *injective* ssi $\forall (x,y) \in E^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$;
- f est *surjective* ssi $\forall y \in F,\ \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$;
- f est *bijective* ssi f est injective et surjective.

Pour montrer que f est injective :
Soit $x \in E$ et $y \in E$. Supposons que $f(x) = f(y)$.
...
Alors $x = y$.

Pour montrer que f est surjective :
Soit $y \in F$.
Posons $x = \dots$,
On a bien $y = f(x)$.

Pour montrer que f est bijective :

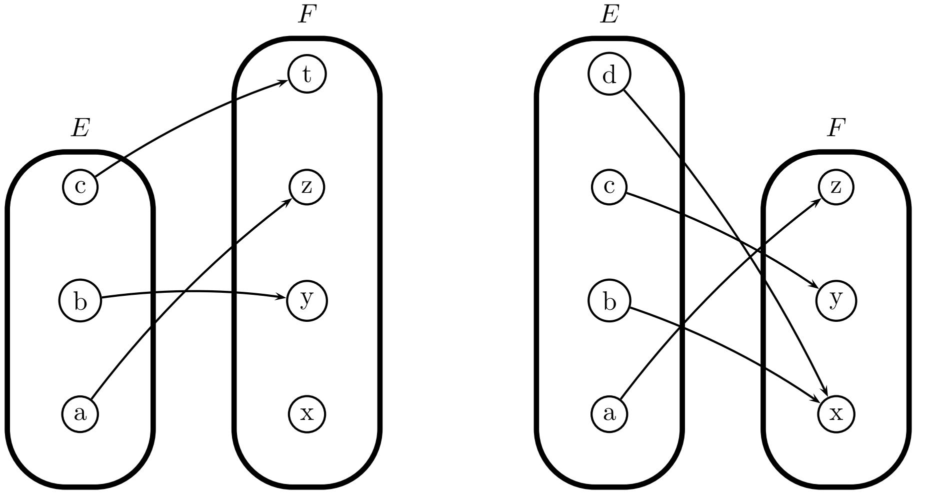
1. Montrons que f est injective ;
2. Montrons que f est surjective.

Remarque 7.
- Dire que f est injective revient à dire (par contraposée) que
$$\forall (x,y) \in E^2,\ (x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y))$$
Deux éléments distincts de l'ensemble de départ ont deux images distinctes.
- Dire que f est surjective revient à dire que tout élément de l'ensemble d'arrivée possède au moins un antécédent.
- Dire que f est bijective revient à dire que tout élément de l'ensemble d'arrivée possède un et un seul antécédent :
$$\forall y \in F,\ \exists! x \in E \text{ tq } y = f(x)$$

Exercice 1-5

Les applications de $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ suivantes sont-elles injectives, surjectives ?

$$x \to x^2 \quad x \to x^3 \quad x \to \sin x$$



f injective, non surjective $\qquad$ f non injective, surjective

FIG. 1.3 – *Injection, surjection*

Exercice 1-6

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y,x+2y) \end{array} \right.$. Est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 1-7

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers pairs. Montrer que l'application

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \right.$$

est une bijection. (Il y a donc « autant » d'entiers que d'entiers pairs !)

THÉORÈME 1.2 : Propriétés des composées

Soient $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ deux applications.

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective ;
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective ;
- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ;
- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

THÉORÈME 1.3 : Bijection réciproque

Soit $f : E \mapsto F$ une application.

$$\underbrace{\big(f \text{bijective}\big)}_{(i)} \iff \underbrace{\left(\exists! g \in \mathcal{F}(F,E) \text{ tq } \begin{cases} f \circ g = \mathrm{id}_F \\ g \circ f = \mathrm{id}_E \end{cases} \right)}_{(ii)}$$

Lorsque f est bijective, on note note l'application g du théorème $g = f^{-1}$. C'est la *bijection réciproque* de l'application f.

$$E \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} F$$

Remarque 8. N'introduire l'application f^{-1} que lorsqu'elle existe, c'est à dire lorsque l'application f est bijective !

Exercice 1-8

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{si } n \neq 0 \end{cases} \end{array} \right.$. Étudier l'injectivité et la surjectivité des

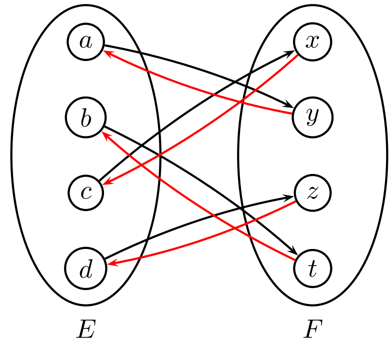


FIG. 1.4 – *Application bijective et bijection réciproque :* $y = \phi(a)$, $a = \phi^{-1}(y)$

applications f et g. Déterminer les applications $g \circ f$ et $f \circ g$. Conclusion ?

Exercice 1-9

Soit E un ensemble et $f : E \mapsto E$ une application vérifiant $f \circ f = f$. Montrer que :

1. f injective $\Rightarrow f = \mathrm{id}_E$;
2. f surjective $\Rightarrow f = \mathrm{id}_E$.

THÉORÈME 1.4 : **bijection réciproque d'une composée**

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux bijections, alors l'application $g \circ f$ est bijective et

$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$$

Exercice 1-10

Soient deux applications $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto E$. On suppose que l'application $g \circ f \circ g \circ f$ est surjective et que l'application $f \circ g \circ f \circ g$ est injective. Montrer qu'alors les deux applications f et g sont bijectives.

DÉFINITION 1.11 : **Fonction caractéristique**

Soit un ensemble E et une partie $A \subset E$ de cet ensemble. On appelle *fonction caractéristique* de la partie A, l'application

$$\chi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array} \right.$$

THÉORÈME 1.5 : **Opérations usuelles en termes de fonction caractéristique**

Soit un ensemble E et deux parties $A \subset E$ et $B \subset E$ de cet ensemble. On définit de nouvelles fonctions à valeurs dans $\mathbb{N}$ par les formules :

$$(\chi_A + \chi_B) : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1,2\} \\ x & \mapsto & \chi_A(x) + \chi_B(x) \end{array} \right. \qquad \chi_A\chi_B : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \chi_A(x) \times \chi_B(x) \end{array} \right.$$

Avec ces notations, on caractérise les parties $A \cap B$, $E \setminus A$ et $A \cup B$:

$$\chi_{E \setminus A} = 1 - \chi_A, \quad \chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B, \quad \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$$

Exercice 1-11

Soit un ensemble E. Pour deux parties $A \subset E$ et $B \subset E$, on appelle *différence symétrique* de ces deux parties, la partie de E définie par

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

a. Exprimer la fonction caractéristique de la partie $A \triangle B$ à l'aide des fonctions caractéristiques de A et de B ;

b. En déduire que pour trois parties $(A,B,C) \in \mathcal{P}(E)^3$, on a $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

Définition 1.12 : Image directe, réciproque
Soit une application $f : E \mapsto F$ et deux parties $A \subset E$ et $B \subset F$.
a) On appelle *image réciproque* de B par f, la partie de E notée :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \text{ tq } f(x) \in B\}$$

b) On appelle *image directe* de A par f, la partie de F notée :

$$f(A) = \{y \in F \text{ tq } \exists x \in A \text{ avec } y = f(x)\}$$

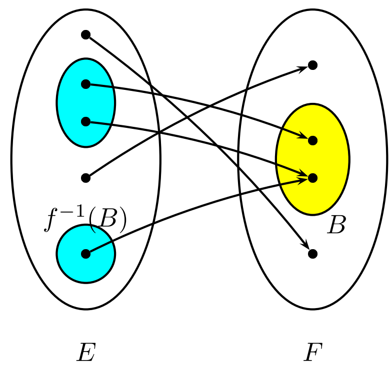


Fig. 1.5 – *Image réciproque*

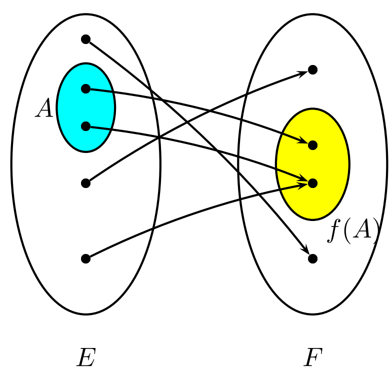


Fig. 1.6 – *Image directe*

Remarque 9. Attention, la notation $f^{-1}(B)$ n'a rien à voir avec une éventuelle bijection réciproque : $f^{-1}(B)$ est un *sous-ensemble* de l'ensemble de départ de f.

Pour montrer que $x \in f^{-1}(B)$: Calculons $f(x)$ ... Donc $f(x) \in B$ Par conséquent, $x \in f^{-1}(B)$.

Pour montrer que $y \in f(A)$: Posons $x = \dots$ On a bien $y = f(x)$ et $x \in A$. Par conséquent, $y \in f(A)$.

Remarque 10. L'image réciproque est en général plus facile à manier que l'image directe.
Remarque 11. Une application $f : E \mapsto F$ est surjective ssi $f(E) = F$.

Exercice 1-12

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x \end{cases}$. Déterminez (après avoir vérifié que les notations sont correctes) :

- $f^{-1}(0)$;
- $f^{-1}(\{0\})$;
- $f^{-1}([0,+\infty[)$;
- $f([0,\pi])$;
- $f(\{0\})$;
- $f(\mathbb{R})$.

Exercice 1-13

Soit $f : E \mapsto F$, et $A_1,A_2 \subset E$, $B_1,B_2 \subset F$. Montrer que

1. $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;
2. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
3. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
4. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$;
5. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
6. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;
7. $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$;
8. $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$.

Définition 1.13 : **Partie stable**
Soit une application $f : E \mapsto E$, et une partie $A \subset E$. On dit que la partie A est *stable* par l'application f lorsque $f(A) \subset A$. Cela est équivalent à dire que :

$$\forall x \in A, f(x) \in A$$

1.4 Familles

Définition 1.14 : **Familles**
Soit un ensemble I (*les indices*) et un ensemble E. On appelle famille d'éléments de E indexée par I, une application

$$\phi : \begin{cases} I & \longrightarrow & E \\ i & \mapsto & a_i \end{cases}$$

On note cette application $(a_i)_{i \in I}$.

`Exemple 6.` Si $E = \mathbb{R}$ et $I = \mathbb{N}$, cela définit une *suite* de réels.

Définition 1.15 : **Famille de parties**
Soit un ensemble E et un ensemble I. On définit une famille de parties de E :

$$(A_i)_{i \in I} \text{ où } \forall i \in I, A_i \in \mathcal{P}(E)$$

Et l'on note

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \text{ tq } \forall i \in I,\, x \in A_i\} \qquad \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \text{ tq } \exists i \in I,\, x \in A_i\}$$

`Exemple 7.` Si $E = \mathbb{R}$ et pour $k \in \mathbb{N}$, $A_k = [-k,k]$, déterminez les ensembles

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \text{ et } \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

Exercice 1-14

Soit un ensemble E et une famille de parties de E, $(A_i)_{i \in I}$. Montrer que :

$$E \setminus \Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \bigcap_{i \in I} (E \setminus A_i)$$

$$E \setminus \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I}(E \setminus A_i)$$

Exercice 1-15

Soit une application $f : E \mapsto F$ et une famille de parties de F, $(B_i)_{i\in I}$. Montrer que

$$f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$$

1.5 Relations

Définition 1.16 : **Relation**
Soit un ensemble E. Une *relation binaire* sur E est un sous-ensemble $G \subset E \times E$. Si $(x,y) \in E^2$, on écrira :

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow (x,y) \in G$$

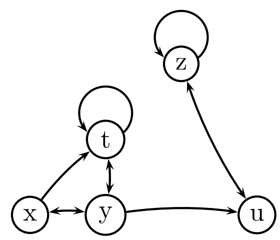


Fig. 1.7 – *Représentation sagittale d'une relation*

Définition 1.17 : **Propriétés des relations**
Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est :

- *réflexive* ssi $\forall x \in E$, $x\mathcal{R}x$;
- *symétrique* ssi $\forall (x,y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$;
- *antisymétrique* ssi $\forall (x,y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$;
- *transitive* ssi $\forall (x,y,z) \in E^3$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$;

1.5.1 Relation d'équivalence

Définition 1.18 : **Relation d'équivalence**
On dit qu'une relation sur un ensemble E est une relation d'équivalence si elle est

1. réflexive ;
2. symétrique ;
3. transitive ;

`Exemple 8.` La relation d'égalité sur un ensemble :

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x = y$$

est une relation d'équivalence.

Définition 1.19 : **Classes d'équivalence**
Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. On note pour un élément $x \in E$:

$$C_x = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$$

L'ensemble C_x s'appelle la *classe d'équivalence* de l'élément x.

Définition 1.20 : **Partition**
Soit un ensemble E et une famille de parties de E : $(A_i)_{i\in I}$. On dit que cette famille de parties est une *partition* de l'ensemble E si et seulement si :
1. Chaque classe est non vide : $\forall i \in I,\ A_i \neq \emptyset$;
2. Les classes distinctes sont deux à deux disjointes : $\forall (i,j) \in I^2,\ C_i \cap C_j \neq \emptyset \Rightarrow C_i = C_j$;
3. Les classes recouvrent l'ensemble E : $\cup_{i\in I} A_i = E$.

Théorème 1.6 : **Les classes d'équivalence forment une partition**
Soit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur un ensemble E. La famille $(C_x)_{x\in E}$ des classes d'équivalences associées forme une partition de l'ensemble E.

Remarque 12. Réciproquement, étant donnée une partition $(A_i)_{i\in I}$ d'un ensemble E, on peut définir la relation définie par :

$$x\mathcal{R}y \iff \exists i \in I \mid x \in A_i \text{ et } y \in A_i$$

On montre que cette relation est une relation d'équivalence et que les classes d'équivalences associées sont les ensembles A_i.

Exercice 1-16
Sur $E = \mathbb{Z}$, on définit la relation $n\mathcal{R}p \iff p - n$ est pair. Montrer que c'est une relation d'équivalence et déterminer ses classes d'équivalences.

1.5.2 Relation d'ordre

Définition 1.21 : **Relation d'ordre**
Soit une relation $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'ordre si elle est :
1. réflexive ;
2. antisymétrique ;
3. transitive.

Remarque 13. Une relation d'ordre permet de *comparer* deux éléments. Lorsque $x\mathcal{R}y$, on dit que l'élément x est « plus petit » que l'élément y, et on préfère noter

$$x \preceq y$$

La transitivité et l'antisymétrie empêchent d'avoir un cycle formé d'éléments distincts de la forme :

$$x_1 \preceq x_2 \preceq \cdots \preceq x_n \preceq x_1$$

Définition 1.22 : **Ordre total**
Soit une relation d'ordre $\preceq$ sur un ensemble E. On dit que deux éléments $(x,y) \in E^2$ sont *comparables* pour cet ordre si et seulement si $x \preceq y$ ou alors $y \preceq x$.
Lorsque tous les couples d'éléments de l'ensemble E sont comparables, on dit que la relation d'ordre est *totale*.

Remarque 14. Soit un ensemble X et $E = \mathcal{P}(X)$. Sur l'ensemble E, on définit la relation

$$\forall (A,B) \in E^2, \quad A\mathcal{R}B \iff A \subset B$$

1. Montrez que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre ;
2. Cet ordre est-il total ?

Remarque 15. Soit l'ensemble $E = \mathbb{R}^2$. On définit les deux relations d'ordre suivantes :
- L'*ordre produit* :
$$(x,y) \preceq_1 (x',y') \iff x \leq x' \text{ et } y \leq y'$$
- L'*ordre lexicographique* :
$$(x,y) \preceq_2 (x',y') \iff x \leq x' \text{ ou alors } x = x' \text{ et } y \leq y'$$

L'ordre produit est un ordre partiel et l'ordre lexicographique est un ordre total.

Définition 1.23 : **Élements remarquables**
Soit une relation d'ordre $\preceq$ sur un ensemble E et une partie $A \subset E$. On définit les notions suivantes :
- Un élément $M \in E$ est un *majorant* de la partie A si et seulement si $\forall a \in A,\ a \preceq M$;
- Un élément $m \in E$ est un *minorant* de la partie A si et seulement si $\forall a \in A,\ m \preceq a$;
- Un élément $a \in A$ est un *plus petit élément* de A si et seulement si $\forall x \in A,\ a \preceq x$;
- Un élément $a \in A$ est un *plus grand élément* de A si et seulement si $\forall x \in A,\ x \preceq a$;
- Un élément $m \in A$ est un *élément minimal* de A si et seulement si $\forall x \in A,\ x \leq m \Rightarrow x = m$;
- Un élément $M \in A$ est un *élément maximal* de A si et seulement si $\forall x \in A,\ M \leq x \Rightarrow x = M$.

Théorème 1.7 : **Unicité d'un plus petit élément**
Si $a \in A$ est un plus petit (grand) élément de la partie A, il est unique.

Remarque 16. Il se peut qu'il n'existe pas de plus petit (grand) élément d'une partie.

Exercice 1-17
Dans $\mathbb{N}$, on considère la relation de divisibilité :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \quad n/m \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } m = kn$$

1. Vérifier que cette relation définit un ordre partiel sur $\mathbb{N}$;
2. L'ensemble $\mathbb{N}$ admet-il un plus petit (grand) élément pour cet ordre ?
3. Quels sont les éléments maximaux (minimaux) de $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ pour cet ordre ?

1.6 Loi de composition interne

Définition 1.24 : **Loi de composition interne**
Soit E un ensemble. On appelle *loi de composition interne* une application de $E \times E$ dans E :

$$\phi : \begin{cases} E \times E & \longrightarrow & E \\ (a,b) & \mapsto & a \star b \end{cases}$$

Remarque 17. Pour simplifier les notations, on note $ab = a \star b = \phi(a,b)$. Il n'y a aucune raison à priori pour que $ab = ba$. On peut itérer une lci : si $(a,b,c) \in E^3$, on notera

$$(a \star b) \star c = \phi\big(\phi(a,b),c\big)$$

$$a \star (b \star c) = \phi\big(a,\phi(b,c)\big)$$

Il n'y a aucune raison à priori pour que ces deux éléments soient égaux.

Exemples :

- $E = \mathbb{N}$, la multiplication et l'addition des entiers sont des lci.
- Si G est un ensemble, sur $E = \mathcal{F}(G,G)$, la composition des applications définit une lci
- Si G est un ensemble, sur $\mathcal{P}(G)$, l'union et l'intersection définissent des lci.

Définition 1.25 : **Propriétés d'une lci**
Soit $\star$ une lci sur un ensemble E. On dit que $\star$ est :
- *commutative* ssi $\forall (a,b) \in E^2,\ a \star b = b \star a$
- *associative* ssi $\forall (a,b,c) \in E^3,\ a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$
- Un élément $e \in E$ est dit *neutre* ssi $\forall x \in E,\ e \star x = x \star e = x$

Pour montrer que $\star$ est commutative :
1. *Soit* $(x,y) \in E^2$
2. $x \star y = y \star x$
3. Donc $\star$ est commutative

Pour montrer que $\star$ est associative :
1. *soit* $(x,y,z) \in E^3$
2. $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$
3. Donc $\star$ est associative

Pour montrer que $e \in E$ est neutre :
1. *Soit* $x \in E$
2. $e \star x = x$, $x \star e = x$
3. Donc e est neutre.

Exemples :
- $(\mathbb{N},+)$, $+$ est commutative et associative, 0 est l'unique élément neutre ;
- $(\mathbb{N},\times)$, $\times$ est commutative et associative, 1 est l'unique élément neutre ;
- $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\circ)$, $\circ$ est associative mais pas commutative. L'application $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ est un élément neutre ;
- $(\mathcal{P}(G),\cup)$, la loi est commutative, associative, la partie $\emptyset$ est neutre pour cette loi.

Remarque 18. Si une loi de composition interne est *commutative* et *associative*, on définit les notations suivantes pour $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$:
- Lorsque la loi est notée additivement, on définit

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \cdots + x_n$$

- et lorsque la loi est notée multiplicativement,

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \star \cdots \star x_n$$

Théorème 1.8 : **Unicité de l'élément neutre**
Si $(E,\star)$ possède un élément neutre, il est unique.

Définition 1.26 : **Monoïde**
Un ensemble $(E,\star)$ muni d'une loi de composition interne associative et admettant un élément neutre est appelé un monoïde.

`Exemple 9.` $(\mathbb{N},+)$ est un monoïde d'élément neutre 0.

`Exemple 10.` On considère un ensemble fini A appelé *alphabet*, et on définit un *mot* sur A comme étant une suite finie de lettres de A. On notera $m = a_1 \dots a_n$ un tel mot. On définit également le mot vide ε. Sur l'ensemble $A^\star$ des mots de A, on définit la *concaténation* de deux mots : si $m_1 = a_1 \dots a_n$ et si $m_2 = b_1 \dots b_p$, on note $m_1.m_2 = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_p$. Alors l'ensemble des mots muni de la concaténation, $(A^\star,.)$ est un monoïde d'élément neutre le mot vide ε. Ce monoïde est très utilisé en informatique théorique en théorie des langages.

Définition 1.27 : **Symétrique**
On suppose que $(E,\star)$ possède un élément neutre e. Soit un élément $x \in E$. On dit qu'un élément $y \in E$ est un *symétrique* (ou un *inverse*) de l'élément x si et seulement si :

$$x \star y = y \star x = e$$

Théorème 1.9 : **Unicité du symétrique**
Dans un monoïde $(E,\star)$, si un élément $x \in E$ possède un symétrique, ce symétrique est unique.

Pour montrer que $y \in E$ est l'inverse de $x \in E$:
1. $x \star y = e$;
2. $y \star x = e$;
3. Donc $y = x^{-1}$.

Remarque 19. Si un élément $x \in E$ possède un symétrique $y \in E$, alors l'élément y possède également un symétrique qui est l'élément x :

$$(x^{-1})^{-1} = x$$

Remarque 20. L'élément neutre est toujours son propre symétrique : $e^{-1} = e$.

Définition 1.28 : Groupe
On appelle *groupe* un ensemble G muni d'une lci $\star$ vérifiant :

1. la loi $\star$ est associative ;
2. G possède un élément neutre ;
3. Tout élément x de G admet un symétrique.

Si de plus la loi $\star$ est commutative, on dit que le groupe est *abélien* (ou *commutatif*).

Remarque 21. Lors d'une étude abstraite d'un groupe, on note x^{-1} le symétrique d'un élément x (notation multiplicative). Mais si la lci est notée $+$, par analogie avec les groupes de nombres, le symétrique de l'élément x sera noté $-x$. C'est une difficulté qu'il faut bien comprendre !

`Exemple 11.` Dans les cas suivants, dire si l'ensemble est un groupe. Préciser l'élément neutre, et déterminer le symétrique éventuel d'un élément x :
$(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{R},\times)$, $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathbb{C},+)$, $(\mathbb{C}^*,\times)$, $(\mathcal{B}(E,E),\circ)$, $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+)$, $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\times)$.

Théorème 1.10 : Règles de calcul dans un groupe
Soit $(G,\times)$ un groupe.

1. L'élément neutre est unique ;
2. Tout élément possède un *unique* symétrique ;
3. Pour tout élément x d'un groupe, on a $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$.
4. On peut *simplifier* : $\forall(a,x,y) \in G^3$;
$$\begin{cases} a \star x = a \star y & \Rightarrow x = y \\ x \star a = y \star a & \Rightarrow x = y \end{cases}$$
5. Soit $(a,b) \in G^2$. L'équation $a \star x = b$ possède une unique solution :
$$x = a^{-1} \star b$$
6. $\forall(x,y) \in G^2$, $(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$.

Chapitre 2

Les nombres complexes

2.1 Définitions

On définit les lois suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

- $(x,y) + (x',y') = (x + x',y + y')$
- $(x,y) \times (x',y') = (xx' - yy',xy' + x'y)$.

On vérifie que $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois est un *corps* commutatif noté $\mathbb{C}$.
Si $a \in \mathbb{R}$, on « identifie » a avec le complexe $(a,0)$.
En notant $i = (0,1)$, on vérifie que

- $i^2 = (-1,0)$
- $i \times (a,0) = (0,a)$

Et on adopte alors les notations définitives :

$$(a,b) = (a,0) + i \times (b,0) = a + ib$$

DÉFINITION 2.1 : **Partie réelle, imaginaire**
Soit $z = a + ib$, un complexe.

- $a = \mathrm{Re}(z)$ est la *partie réelle* de z
- $b = \mathrm{Im}(z)$ est la *partie imaginaire* de z.

THÉORÈME 2.1 : **Conjugué d'un complexe**
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Le *conjugué* de z est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$. On a les propriétés suivantes :

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{1} = 1$

Les propriétés suivantes sont intéressantes pour caractériser les complexes réels et imaginaires purs :

- $z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z$;
- $z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -\overline{z}$.

DÉFINITION 2.2 : **Affixe, image**
Soit $M = (a,b)$ un point ou un vecteur de $\mathbb{R}^2$, on appelle *affixe* de M de coordonnées (a,b) le nombre complexe $z = [M] = a + ib$.
Soit $z = a + ib$ un élément de $\mathbb{C}$ alors on pourra définir le *point image* et le vecteur image de z par $M = (a,b)$.

Remarque 22. $z \mapsto \bar{z}$ représente la symétrie par rapport à Ox et $z \mapsto z + b$ représente la translation de vecteur l'image de b.

DÉFINITION 2.3 : **Module d'un nombre complexe**
C'est le réel défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$$

$|z - a|$ représente la distance du point d'affixe z au point d'affixe a.

Remarque 23. On exprime l'inverse d'un complexe non-nul à l'aide du conjugué :

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}}$$

Remarque 24. Il faut savoir développer pour $(z,z') \in \mathbb{C}^2$,

$$\left|z + z'\right|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2$$

PROPOSITION 2.2 : **Inégalité entre module et parties réelles-imaginaires**
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On a les inégalités suivantes :

$$\left|\operatorname{Re} z\right| \leq |z| \text{ et } \left|\operatorname{Im} z\right| \leq |z|$$

THÉORÈME 2.3 : **Inégalité triangulaire**

1. Si $z,z' \in \mathbb{C}$,

$$\boxed{\Big||z| - |z'|\Big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|}$$

avec égalité dans la dernière majoration si et seulement si les images des complexes z et z' sont sur une même demi-droite passant par l'origine.

2. Pour n complexes $z_1, \dots, z_n$,

$$|z_1 + \dots + z_n| \ \leq \ |z_1| + \dots + |z_n|$$

THÉORÈME 2.4 : **Groupe** $(\mathbb{U},\times)$
L'ensemble des nombres complexes de module 1 muni de la multiplication est un groupe multiplicatif noté $\left(U,\times\right)$.

DÉFINITION 2.4 : **Disque ouvert, fermé**
L'ensemble $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ est appelé disque ouvert de centre a, de rayon r.
L'ensemble $\overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$ est appelé disque fermé de centre a, de rayon r.

PROPOSITION 2.5 : **Calcul d'une somme géométrique**
Soit un complexe $z \in \mathbb{C}$ et un entier $n \in \mathbb{N}$. On appelle *somme géométrique*, la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + z^2 + \dots + z^n$$

Cette somme se calcule :

$$\boxed{S_n = \begin{cases} (n+1) & \text{si } z = 1 \\ \dfrac{z^{n+1} - 1}{z - 1} & \text{si } z \neq 1 \end{cases}}$$

Exercice 2-1

Calculer pour $z \in \mathbb{C}$ et $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $n < p$ la somme :

$$S_{n,p} = z^n + z^{n+1} + \dots + z^p = \sum_{k=n}^{p} z^k$$

2.2 Rappels de trigonométrie

On suppose connues les propriétés des fonctions sin, cos, tan et cotan ainsi que le cercle trigonométrique.

Exercice 2-2

Simplifier $\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta)$, $\cos(5\pi + \theta)$, $\tan(3\pi + \theta)$, $\operatorname{cotan}(\frac{\pi}{2} - \theta)$, $\tan(\frac{5\pi}{2} + \theta)$.

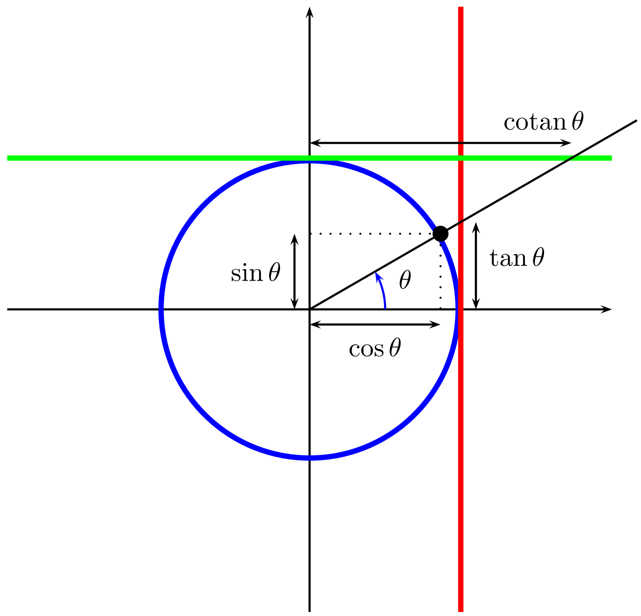


FIG. 2.1 – *Cercle trigonométrique*

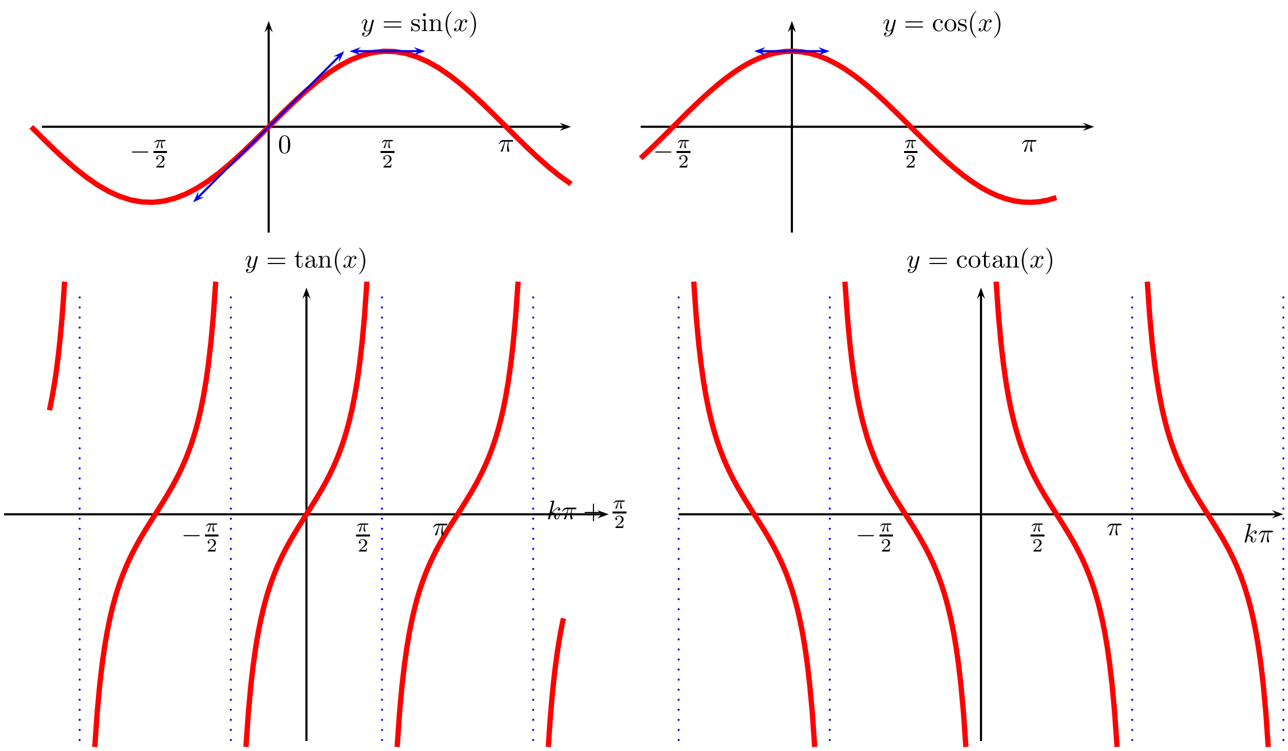


FIG. 2.2 – *Fonctions* sin, cos, tan *et* cotan

Exercice 2-3

Résoudre $\cos\theta = \cos\theta'$, $\sin\theta = \sin\theta'$, $\tan\theta = \tan\theta'$.

PROPOSITION 2.6 : **Formules fondamentales**

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b\\
\cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b\\
\sin(a+b) &= \sin a\cos b + \sin b\cos a\\
\sin(a-b) &= \sin a\cos b - \sin b\cos a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a\\
&\sin(2a) = 2\sin a\cos a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}\\
\tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}\\
\tan(2a) &= \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}
\end{aligned}$$

Exercice 2-4

Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta$.

Exercice 2-5

Simplifier $\sqrt{1+\cos\theta}$, $\sqrt{1-\cos\theta}$.

Exercice 2-6

Exprimer $\cos(3\theta)$ comme un polynôme en $\cos\theta$. Exprimer de même $\sin(3\theta)$.

PROPOSITION 2.7 : **Autres formules à connaître**

$$\begin{aligned}
\cos a\cos b &= \frac{1}{2}\big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\big]\\
\sin a\sin b &= \frac{1}{2}\big[\cos(a-b) - \cos(a+b)\big]\\
\sin a\cos b &= \frac{1}{2}\big[\sin(a+b) + \sin(a-b)\big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2\cos\big(\frac{p+q}{2}\big)\cos\big(\frac{p-q}{2}\big)\\
\cos p - \cos q &= -2\sin\big(\frac{p+q}{2}\big)\sin\big(\frac{p-q}{2}\big)\\
\sin p + \sin q &= 2\sin\big(\frac{p+q}{2}\big)\cos\big(\frac{p-q}{2}\big)\\
\sin p - \sin q &= 2\cos\big(\frac{p+q}{2}\big)\sin\big(\frac{p-q}{2}\big)
\end{aligned}$$

Remarque 25. Il n'y a pas de transformation générale de $\cos p \pm \sin q$.

Exercice 2-7

Factoriser $\sin\theta + \cos\theta$.

PROPOSITION 2.8 : **Angle moitié**
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $\boxed{t = \tan\frac{\theta}{2}} = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$. Alors :

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

2.3 Exponentielle imaginaire et applications en trigonométrie

DÉFINITION 2.5 : **Exponentielle imaginaire**
Soit un réel $\theta \in \mathbb{R}$, on note
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

PROPOSITION 2.9 : **Propriétés de l'exponentielle imaginaire**

1. $|e^{i\theta}| = 1$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
2. $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$
3. $e^{i\theta} = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}$, tq $\theta = 2k\pi$
4. $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tq $\theta = \theta' + 2k\pi$.

THÉORÈME 2.10 : **L'exponentielle est un morphisme de groupes**
Pour deux réels $(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$, on a :
$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$$
En d'autres termes, l'application
$$exp : \begin{cases} (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (U,\times) \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{cases}$$
est un morphisme de groupes, de noyau
$$\mathrm{Ker}(\exp) = 2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$
et d'image $\mathrm{Im}\exp = U$.

THÉORÈME 2.11 : **Formules de De Moivre [a] et d'Euler [b]**

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \boxed{e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n}$$
$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}} \quad \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$$
Ces deux formules, plus la formule du binôme et le calcul de sommes géométriques sont fondamentales en trigonométrie.
On utilise également la factorisation de l'angle moitié :
$$\boxed{e^{ix} + 1 = e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}} + e^{-\frac{ix}{2}}\right) = 2e^{\frac{ix}{2}}\cos(\frac{x}{2})}$$
$$\boxed{e^{ix} - 1 = e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}\right) = 2ie^{\frac{ix}{2}}\sin(\frac{x}{2})}$$

[a] Abraham De Moivre, (26/05/1667), Français. Auteur de la formule attribuée injustement à Stirling
[b] Leonhard Euler, (15/04/1707-18/09/1783), Suisse. Un des mathématiciens les plus productif. Il a trouvé un nombre incroyable de formules

Remarque 26. On a la factorisation de l'angle moitié plus générale (voir figure 2.3) :

$$e^{ix}+e^{iy}=e^{\frac{i(x+y)}{2}}\left(e^{\frac{i(x-y)}{2}}+e^{-\frac{i(x-y)}{2}}\right)=2e^{i\frac{x+y}{2}}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

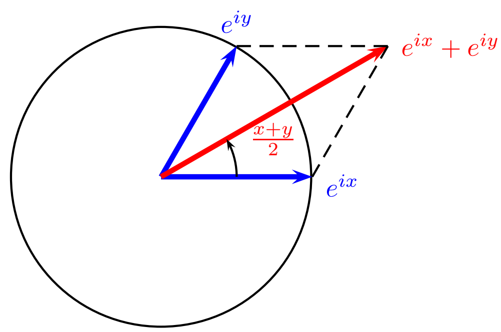


FIG. 2.3 – *Factorisation de l'angle moitié*

Calculs trigonométriques à connaître parfaitement

Pour exprimer $\cos n\theta = T_n(\theta)$ où (T_n est le nième polynôme de Tchebychev)

1. Écrire $\cos n\theta = \dfrac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2} = \dfrac{(e^{i\theta})^n+(e^{-i\theta})^n}{2}$;
2. Utiliser la formule du binôme ;
3. Regrouper les deux sommes et on sépare les indices pairs et impairs.

Pour *linéariser* $\cos^n\theta$ (ou $\sin^n\theta$) :

1. Écrire $\cos^n\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n$;
2. Développer avec la formule du binôme ;
3. Regrouper dans les sommes les termes conjugués ;
4. Distinguer les cas n pair et n impair ;
5. Retransformer en cosinus.

Pour calculer $S_n = 1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta$

1. Introduire la somme $U_n = 1+e^{i\theta}+\cdots+e^{in\theta}$ qui est une somme géométrique, et alors $S_n = \mathrm{Re}(U_n)$;
2. Pour simplifier le résultat, factoriser l'angle moitié.

DÉFINITION 2.6 : **Argument d'un nombre complexe**
Soit un nombre complexe $z\in\mathbb{C}$ non-nul : $\boxed{z\neq 0}$. Alors

$$\exists\theta\in\mathbb{R},\quad z=re^{i\theta}$$

avec $r=|z|\neq 0$ qui est le *module* de z. On dit que θ est un argument de z et on note $\theta=\mathrm{Arg}(z)$.
Si $(z,z')\in\mathbb{C}^2$, on a

$$\mathrm{Arg}(z\times z')=\mathrm{Arg}\,z+\mathrm{Arg}\,z'+2k\pi$$

Remarque 27. L'argument n'est pas unique: il est défini à 2π près. On peut imposer l'unicité de l'argument en le choisissant dans un intervalle de longueur 2π (en général $[0,2\pi[$ ou $]-\pi,\pi]$).

Exercice 2-8
Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z=1+e^{i\theta}$, $(\theta\in\mathbb{R})$.

DÉFINITION 2.7 : **Exponentielle complexe**
Pour $z=a+ib\in\mathbb{C}$, on définit

$$e^z=e^{a+ib}=e^ae^{ib}$$

(Son module vaut e^a et son argument b).

Exercice 2-9

On considère l'application exp : $\left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{C},+) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*,\times) \\ z & \longmapsto & e^z \end{array} \right.$.

a. Résoudre l'équation $e^z = 1$.
b. Résoudre l'équation $e^z = 1 - i\sqrt{3}$.
b. Déterminer l'image d'une droite $x = a$ par exp.
c. Déterminer l'image d'une droite $y = b$ par exp.

2.4 Racines d'un nombre complexe

2.4.1 Extraction de racine carrée par résolution algébrique (à éviter)

On considère un nombre complexe non nul $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$ et l'on cherche les nombres complexes $Z = X + iY$ vérifiant $Z^2 = z$.

1. Cela revient à résoudre le système :

$$X^2 + (-Y^2) = x, \quad X^2(-Y^2) = \frac{-y^2}{4}$$

2. Si l'on connaît la somme et le produit de deux nombres réels, ils sont solutions d'une équation du second degré.
3. On étudie les signes.
4. On trouve finalement

$$Z = \varepsilon\Big(\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}+x} + i \ \mathrm{sg}(y)\sqrt{\sqrt{x^2+y^2}-x}\Big) \quad \varepsilon \in \{-1,1\}$$

2.4.2 Extraction de racine carrée par résolution trigonométrique

On écrit $z = |z|e^{i\theta}$ avec $|z| \neq 0$. On cherche Z sous la forme $Z = \rho e^{i\alpha}$ vérifiant $Z^2 = z$.
On trouve alors deux racines distinctes :

$$Z_1 = \sqrt{|z|}e^{i\frac{\theta}{2}}, \quad Z_2 = \sqrt{|z|}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -Z_1$$

Exercice 2-10

Trouver une racine carrée de $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}$

Exercice 2-11

En utilisant la résolution trigonométrique et algébrique, déterminer $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

2.4.3 Equation du second degré.

$$az^2 + bz + c = 0 \quad ((a,b,c) \in \mathbb{C}^3,\ a \neq 0)$$

1. On met cette équation sous forme réduite :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

2. on introduit le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$.
3. (a) si $\Delta = 0$, on trouve une unique solution $z = -\dfrac{b}{2a}$,
   (b) si $\Delta \neq 0$, on trouve deux solutions distinctes

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

   où δ est une racine carrée complexe de Δ.

Remarque 28. Pour une équation du second degré de la forme

$$az^2 + 2bz + c = 0$$

former le *discriminant réduit* $\Delta' = b^2 - ac$, et si δ est une racine carrée de Δ', les deux solutions s'écrivent

$$z_1 = -b - \delta, \quad z_2 = -b + \delta$$

Remarque 29. Lorsque les coefficients (a,b,c) sont réels, former le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et étudier son signe :

1. Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions réelles

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Si $\Delta = 0$, il y a une racine double :

$$x = -\frac{b}{2a}$$

3. Si $\Delta < 0$, il y a deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Exercice 2-12

Résoudre l'équation complexe

$$z^2 - 2z(\cos u + i \sin u) + 2i \sin u(\cos u + i \sin u) = 0 \quad (u \in]-\pi,\pi[)$$

2.4.4 Racines nièmes de l'unité

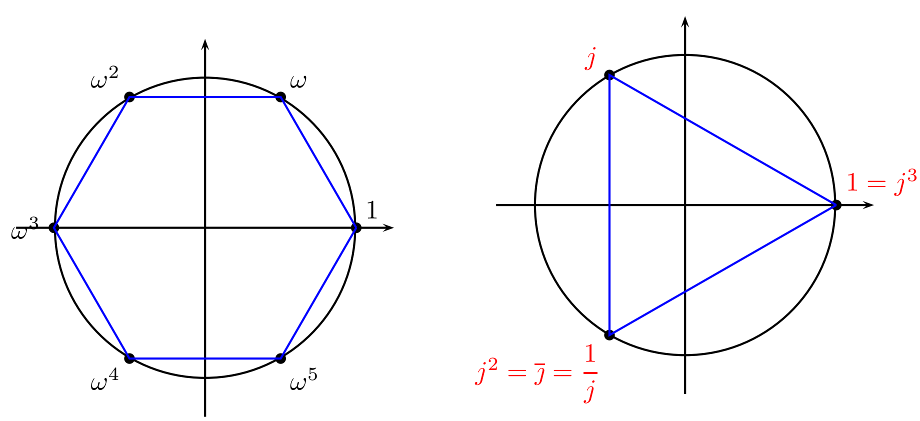
Soit un entier non nul $n \in \mathbb{N}^*$. Une racine nième de l'unité est une solution de l'équation

$$z^n = 1$$

On les cherche sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ et l'on trouve exactement n racines nièmes distinctes :

$$\boxed{U_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}};\ k \in [\![0,n-1]\!]\} = \{\omega^k;\ k \in [\![0,n-1]\!]\}}$$

où $\boxed{\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}}$ s'appelle la racine nième primitive de l'unité.



(a) racines sixièmes de l'unité (b) Raines cubiques de l'unité

FIG. 2.4 – *Racines nièmes de l'unité*

THÉORÈME 2.12 : Groupe des racines de l'unité
L'ensemble des racines nièmes de l'unité, $(U_n,\times)$ est un groupe fini de cardinal n.

Théorème 2.13 : **La somme des racines nièmes de l'unité est nulle**

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$$

Remarque 30. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ la racine cubique primitive de l'unité, et on a les relations :

$$U_3 = \{1,j,j^2\}, \quad j^2 = \frac{1}{j} = \overline{j} \quad 1 + j + j^2 = 0$$

Exercice 2-13

Déterminer les complexes de module 1 vérifiant $|z+1| = 1$.

Exercice 2-14

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 + x + 1 = 0$, puis ensuite l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = 0$.

Exercice 2-15

Calculer le produit de toutes les racines nièmes de l'unité.

Exercice 2-16

On considère un triangle (ABC) du plan. On considère les complexes (a,b,c) affixes des points A, B et C. Montrer que le triangle (ABC) est équilatéral si et seulement si

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$$

2.4.5 Racines nièmes d'un nombre complexe

Soit un nombre complexe non nul $z = |z|e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$. On veut résoudre l'équation $Z^n = z$. On cherche Z sous la forme $Z = \rho e^{i\alpha}$ et on trouve n solutions distinctes. En notant ω la racine nième primitive de l'unité :

$$\mathcal{S} = \{ \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\theta}{n}} \omega^k \ ; \ k \in [\![0,n-1]\!] \}$$

Exercice 2-17

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.

Chapitre 3

Fonctions usuelles

3.1 Théorèmes d'analyse admis

Nous utiliserons dans ce chapitre des théorèmes d'analyse que nous démontrerons plus tard.

THÉORÈME 3.1 : **Fonctions constantes**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ dérivable sur un *intervalle* $I \subset \mathbb{R}$. La fonction f est constante si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

Remarque 31. On déduit de ce théorème que deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

THÉORÈME 3.2 : **Théorème de la bijection**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$. On note $J = f(I)$. On suppose que la fonction f est :

- H1 continue sur I ;
- H2 strictement monotone sur I.

Alors la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle J, et sa bijection réciproque $f^{-1} : J \mapsto I$ est une fonction continue strictement monotone de même sens que f.

THÉORÈME 3.3 : **Dérivation de la bijection réciproque**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $x_0 \in I$. On suppose que :

- H1 f est strictement monotone sur l'intervalle I ;
- H2 f est dérivable au point x_0 ;
- H3 $f'(x_0) \neq 0$.

On sait déjà que f réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle $J = f(I)$ et alors la fonction f^{-1} est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ avec

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

On en déduit que si :

- H1 $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est strictement monotone sur l'intervalle I ;
- H2 f est dérivable sur l'intervalle I ;
- H3 $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$;

alors la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(I)$ avec

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

3.2 Calcul pratique de dérivées

Dérivée d'une homographie

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad f'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$f(x) = \frac{au(x)+b}{cu(x)+d} \quad f'(x) = \frac{ad-bc}{(cu(x)+d)^2}u'(x)$$

Exercice 3-1

Dériver $f(x) = \dfrac{3x \ln x + 1}{2x \ln x + 3}$.

Dérivée d'un quotient

$$f(x) = \frac{u(x)}{v^n(x)} \quad (n \geq 2) \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{v^n(x)} - n\frac{u(x)v'(x)}{v^{n+1}(x)}$$

Lorsque $n \geq 2$, on préfère dériver avec la formule d'un produit.

Exercice 3-2

Dériver la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^3+1}{(x^2+1)^2}$ en utilisant la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)'$ et en la dérivant sous forme de produit. Conclusion ?

Dérivée logarithmique

$$f(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i^{\alpha_i} \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{f_i'(x)}{f_i(x)}$$

Exercice 3-3

Dériver la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{(x+3)(x+4)}$.

Exponentielle en facteur

$$\theta(x) = e^{a(x)} f(x) \quad \theta'(x) = e^{a(x)}[f'(x) + a'(x)f(x)]$$

Remarque 32. Cette règle de calcul est utile pour résoudre des équations (inéquations) différentielles. Lorsqu'on rencontre un groupement :

$$f'(x) + a(x) \times f(x)$$

on considère une primitive A de la fonction a, et on introduit la fonction

$$g(x) = e^{A(x)} f(x) \text{ car } g'(x) = e^{A(x)}[f'(x) + a(x)f(x)]$$

Exercice 3-4

Soit une fonction $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ dérivable sur $[0, +\infty[$ telle que $\forall x \geq 0,\ f'(x) + f(x) \leq 1$. Montrer que la fonction f est majorée.

Règle de la chaîne

$$f(x) = f_1 \circ \cdots \circ f_n(x) \quad f'(x) = [f_1' \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n(x)] \times [f_2' \circ f_3 \circ \cdots \circ f_n(x)] \times \cdots \times f_n'(x)$$

Exercice 3-5

Dériver la fonction définie par $f(x) = \sin\left[\ln\left(\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}+3}\right)\right]$.

Remarque 33. On calcule souvent des dérivées pour étudier leur signe. Comme la dérivation en chaîne donne un produit de fonctions, il suffit de déterminer le signe de chacun des morceaux.

3.3 Fonctions usuelles

3.3.1 Exponentielles, logarithmes

Exponentielle

On suppose connue la fonction exponentielle et ses propriétés fondamentales. Vous verrez l'année prochaine la bonne façon de définir l'exponentielle d'un nombre complexe :

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

L'exponentielle réalise un morphisme de groupes :

$$\exp : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^{+,*},\times) \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \right.$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \boxed{e^{x+y} = e^x e^y}$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\exp'(x) = \exp(x)}$. Elle satisfait donc l'équation différentielle $f' = f$. On a l'inégalité classique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{\exp(x) \geq 1 + x}$$

Logarithme népérien

L'exponentielle est continue et strictement croissante sur $I = \mathbb{R}$ donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $I = \mathbb{R}$ vers $J =]0,+\infty[$ On définit le logarithme népérien comme sa bijection réciproque.

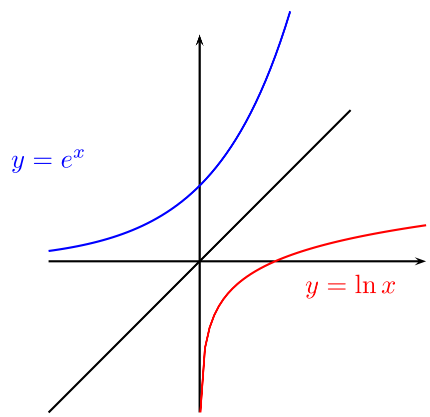


Fig. 3.1 – *Exponentielle et logarithme*

$$\ln : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array} \right.$$

Comme la fonction exp est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ et que $\forall x \in I$, $\exp'(x) \neq 0$, sa bijection réciproque ln est dérivable sur $J =]0,+\infty[$ et $\forall x \in J =]0,+\infty[$, $\boxed{(\ln)'(x) = \frac{1}{x}}$. La fonction ln vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\forall x,y > 0 \quad \boxed{\ln(xy) = \ln x + \ln y}$$

On a les inégalités classiques :

$$\forall x > -1, \quad \boxed{\ln(1+x) \leq x}$$

Exponentielle de base a : $a^x = e^{x \ln a}$

On définit également pour $a > 0$ l'exponentielle de base a :

$$f_a \;:\; \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a^x = e^{x\ln a} \end{array} \right.$$

Elle vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad a^{x+y} = a^x a^y$$

Elle est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ (comme composée) et sa dérivée vaut :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_a'(x) = (\ln a)e^{ax}$$

- Si $a = 1$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) = 1$;
- Si $a > 1$, alors f_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- Si $0 < a < 1$, alors f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

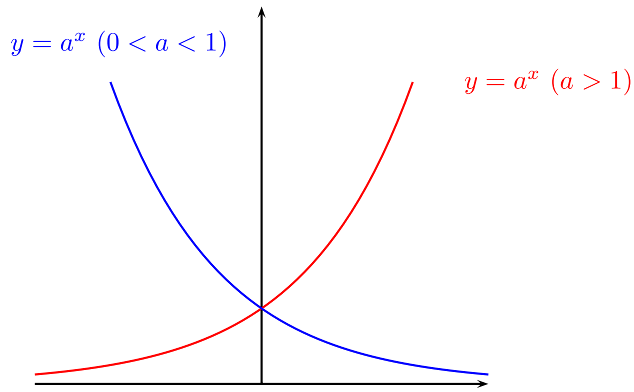


Fig. 3.2 – *Exponentielles en base a*

Logarithme de base a : $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Lorsque $a > 0$ et $a \neq 1$, l'exponentielle de base a est une fonction f_a continue sur $I = \mathbb{R}$, et strictement monotone. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de I vers J. On note $\log_a$ sa bijection réciproque (qui est donc continue sur $J =]0, +\infty[$ de même sens de variation que f_a).

Comme la fonction f_a est dérivable sur l'intervalle I et que $\forall x \in I$, $f_a'(x) \neq 0$, la fonction $\log_a$ est dérivable sur l'intervalle $J =]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in J =]0, +\infty[, \quad \log_a'(x) = \frac{1}{(\ln a)x}$$

Le logarithme en base a vérifie l'équation fonctionnelle :

$$\forall (x,y) \in]0, +\infty[^2, \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

On peut exprimer le logarithme de base a à l'aide du logarithme népérien :

$$\forall x > 0, \quad \boxed{\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}}$$

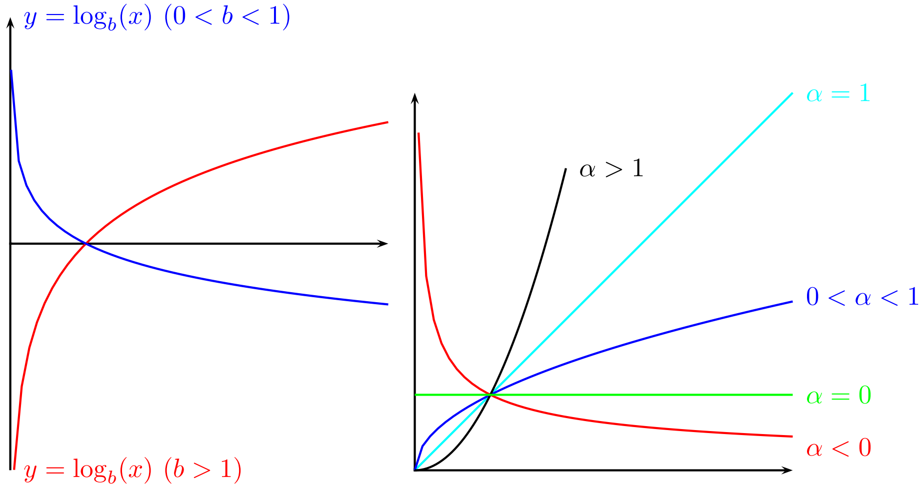
3.3.2 Fonctions puissance $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit

$$f_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \end{array} \right.$$

f_α est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction composée) et $\forall x \in \mathbb{R}$,
$f_a'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$. En notant $I =]0, +\infty[$,

- Si $\alpha = 0$, f_α est constante et vaut 1.



(a) logarithmes en base b

(b) fonctions puissances

FIG. 3.3 – *logarithmes et puissances*

- Si $\alpha > 0$, f_α est strictement croissante sur I.
- Si $\alpha < 0$, f_α est strictement décroissante sur I.

Lorsque $\alpha > 0$, on peut prolonger par continuité f_α et 0 en posant $f_\alpha(0) = 0$. Etudions la dérivabilité de la fonction ainsi prolongée (encore notée f_α) :

- Si $\alpha > 1$, f_α est dérivable en 0 avec $f'_\alpha(0) = 0$.
- Si $\alpha = 1$, f_α est dérivable en 0 avec $f'_\alpha(0) = 1$.
- Si $0 < \alpha < 1$, f_α n'est pas dérivable en 0 (demi- tangente verticale).

Comme $\forall \alpha \in \mathbb{R}^\star$, f_α est continue sur $I =]0, +\infty[$ et strictement monotone sur I, elle est bijective de I vers $J =]0, +\infty[$. On montre alors que

$$f_\alpha^{-1} = f_{\frac{1}{\alpha}}$$

3.3.3 Fonctions hyperboliques et circulaires

Fonctions circulaires

Etude des fonctions hyperboliques

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{coth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} \qquad \operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x}$$

On a les propriétés suivantes :

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \qquad \cos x + i \sin x = e^{ix}$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x} \qquad \cos x - i \sin x = e^{-ix}$$

$$\boxed{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1} \qquad \boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

$$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x \qquad \cos' x = -\sin x$$

$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x \qquad \sin' x = \cos x$$

$$\operatorname{th}' x = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \qquad \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

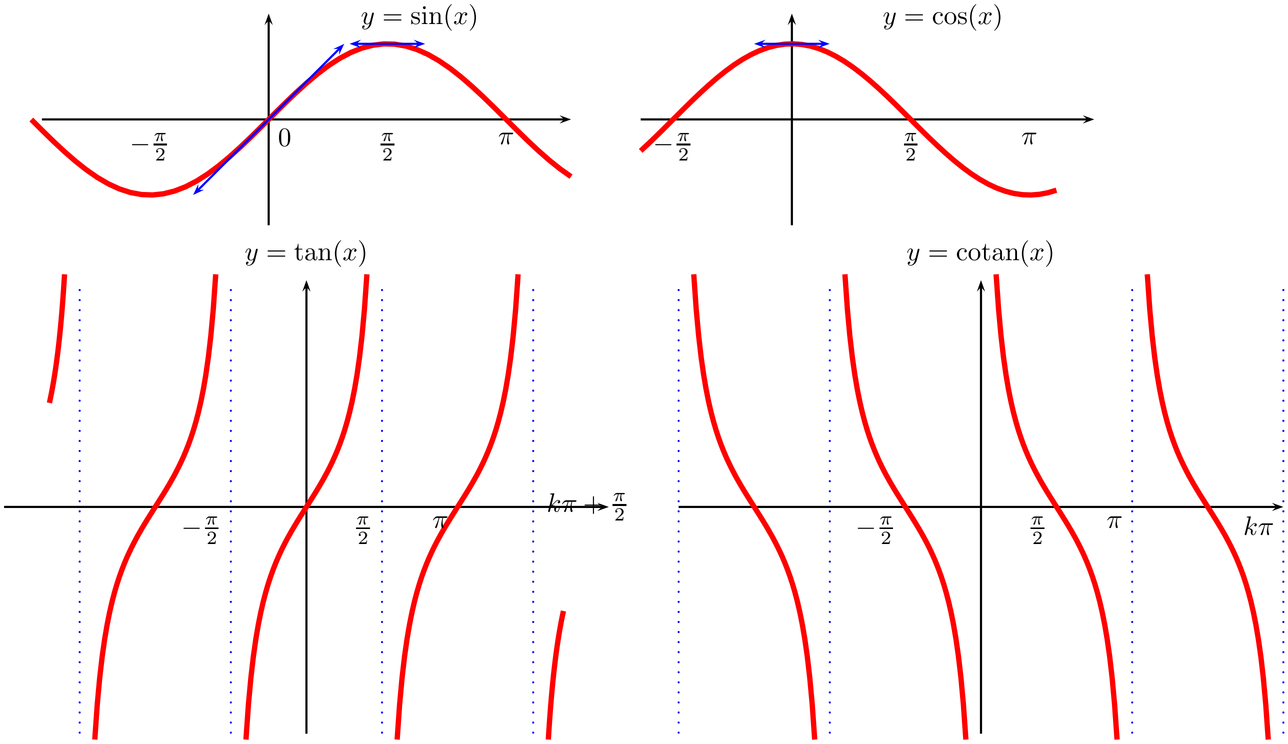


FIG. 3.4 – *Fonctions* sin, cos, tan *et* cotan

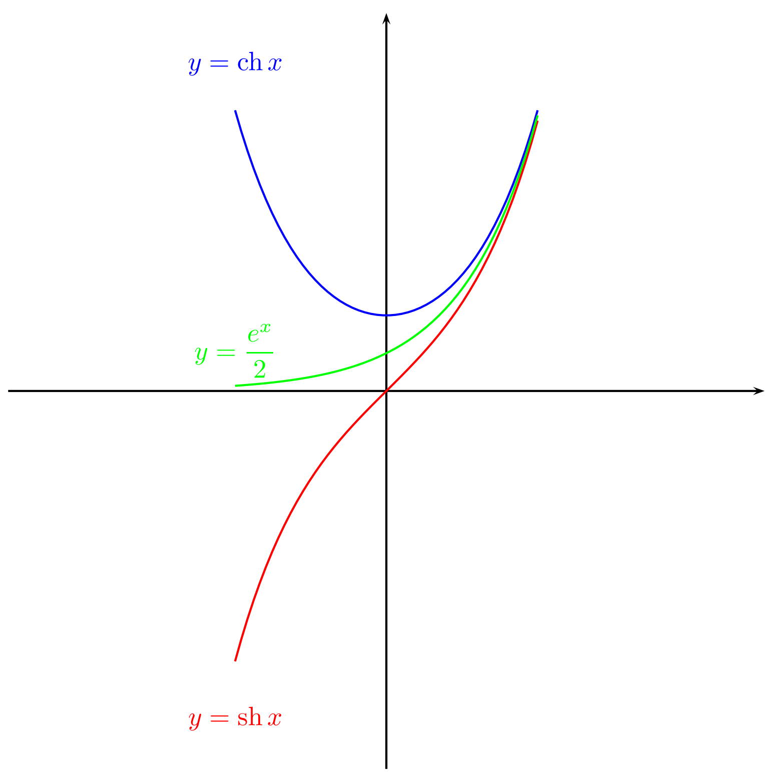


FIG. 3.5 – *Fonctions* sh *et* ch

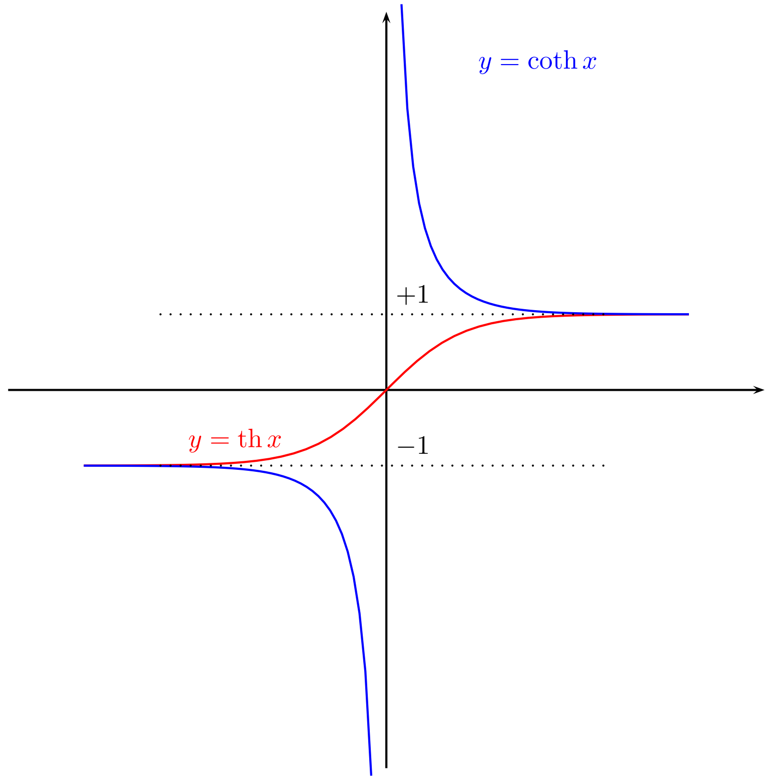


FIG. 3.6 – *Fonctions* th *et* coth

- $\mathrm{sh}\, 0 = 0$, $\mathrm{ch}\, 0 = 1$.
- On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{sh}\, x \leq \frac{e^x}{2} \leq \mathrm{ch}\, x \text{ et } \mathrm{ch}\, x - \mathrm{sh}\, x = e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

  Par conséquent, la courbe $y = \dfrac{e^x}{2}$ est asymptote aux deux courbes $y = \mathrm{sh}\, x$ et $y = \mathrm{ch}\, x$ et on a la position des courbes par rapport à la courbe asymptote.

Trigonométrie

Les formules à connaître par coeur :

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b & \mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{sh}\, b \\
\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b & \mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{ch}\, b - \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{sh}\, b \\
\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b & \mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{ch}\, b + \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{sh}\, b \\
\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b & \mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{ch}\, b - \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{sh}\, b
\end{array}}$$

A connaître également par coeur :

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a & \mathrm{ch}\, 2a = \mathrm{ch}^2 a + \mathrm{sh}^2 a = 2\,\mathrm{ch}^2 a - 1 = 1 + 2\,\mathrm{sh}^2 a \\
\sin 2a = 2 \sin a \cos a & \mathrm{sh}\, 2a = 2\, \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{ch}\, a
\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\cos^2 a = \dfrac{\cos 2a + 1}{2} & \mathrm{ch}^2 a = \dfrac{\mathrm{ch}\, 2a + 1}{2} \\
\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2} & \mathrm{sh}^2 a = \dfrac{\mathrm{ch}\, 2a - 1}{2}
\end{array}}$$

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} & 1-\operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \\
\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1-\tan a \tan b} & \operatorname{th}(a+b) = \dfrac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1+\operatorname{th} a \operatorname{th} b} \\
\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b} & \operatorname{th}(a-b) = \dfrac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1-\operatorname{th} a \operatorname{th} b} \\
\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a} & \operatorname{th}(2a) = \dfrac{2\operatorname{th} a}{1+\operatorname{th}^2 a}
\end{array}
}
$$

Formules utiles également en intégration (elles permettent d'exprimer les fonctions trigonométriques comme fractions rationnelles en t) :

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
t = \tan(\dfrac{x}{2}) & t = \operatorname{th}(\dfrac{x}{2}) \\
\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} & \operatorname{sh} x = \dfrac{2t}{1-t^2} \\
\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \operatorname{ch} x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2} \\
\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2} & \operatorname{th} x = \dfrac{2t}{1+t^2}
\end{array}
}
$$

3.3.4 Fonctions circulaires réciproques

Fonction arcsin

Sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, la fonction sinus est continue strictement croissante vers $[-1,1]$. On définit sa bijection réciproque $\arcsin : [-1,1] \mapsto [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. La fonction arcsin est impaire et on a les propriétés suivantes :

$$
\begin{aligned}
\forall x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}], &\quad \arcsin(\sin x) = x \\
\forall x \in [-1,1], &\quad \sin(\arcsin x) = x \\
\forall x \in [-1,1], &\quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \\
\forall x \in [-1,1], &\quad \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}
$$

La fonction arcsin est dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$ (demi-tangentes verticales en -1 et 1) et $\forall x \in]-1,1[$,

$$
\boxed{(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}
$$

On a donc une primitive à connaître :

$$
\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C}
$$

Quelques valeurs particulières à connaître :

$$
\begin{aligned}
\arcsin(0) &= 0 \\
\arcsin(1/2) &= \frac{\pi}{6} \\
\arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}) &= \frac{\pi}{4} \\
\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) &= \frac{\pi}{3} \\
\arcsin(1) &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

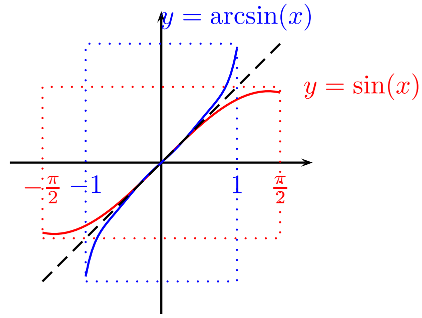


FIG. 3.7 – *Restriction de* sin *à* $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ *et fonction* arcsin

Fonction arccos

Sur $[0,\pi]$, la fonction cosinus est continue strictement croissante vers $[-1,1]$. On définit sa bijection réciproque $\arccos : [-1,1] \mapsto [0,\pi]$. On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
\forall x \in [0,\pi], &\quad \arccos(\cos x) = x \\
\forall x \in [-1,1], &\quad \cos(\arccos x) = x \\
\forall x \in [-1,1], &\quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \\
\forall x \in [-1,1],\ x \neq 0, &\quad \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}
\end{aligned}$$

La fonction arccos est dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$ (demi-tangente verticale en -1 et 1), et $\forall x \in]-1,1[$,

$$\boxed{(\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

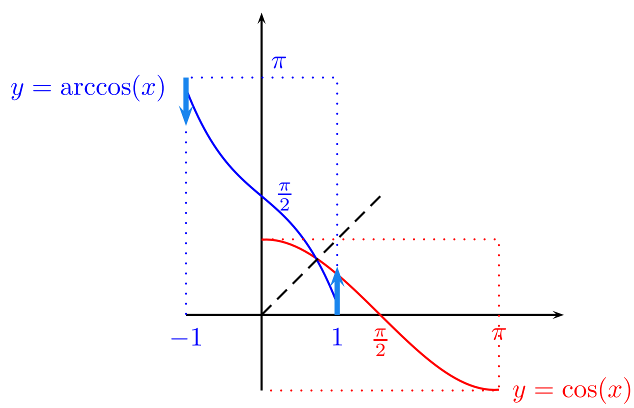


FIG. 3.8 – *Restriction de* cos *à* $[0,\pi]$ *et fonction* arccos

La relation suivante lie les fonctions arcsin et arccos. En pratique, on transforme la fonction arccos en arcsin dans les études de fonctions :

$$\forall x \in [-1,1], \quad \boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}}$$

Quelques valeurs particulières à connaître :

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$
$$\arccos(1/2) = \frac{\pi}{3}$$
$$\arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$$
$$\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$$
$$\arccos(1) = 0$$

Fonction arctan

Sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la fonction tangente est continue strictement croissante vers $\mathbb{R}$. On définit sa bijection réciproque $\arctan : \mathbb{R} \mapsto]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On a les propriétés suivantes :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}\right], \arctan(\tan x) = x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan x) = x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Une primitive très importante :

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+1} = \arctan x + C}$$

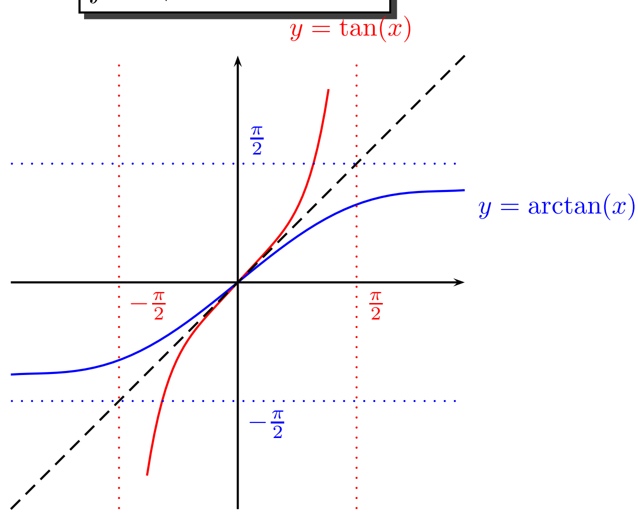


FIG. 3.9 – *Restriction de* tan *à* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *et fonction* arctan.

Quelques valeurs particulières à connaître :

$$\arctan(0) = 0$$
$$\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$$
$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$
$$\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \boxed{\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \varepsilon \frac{\pi}{2}} \quad (\varepsilon = sg(x))$$

Exercice 3-6

Pour $x \in \mathbb{R}$, trouver une expression sans fonction trigonométrique de $\arcsin(\sin x)$.

Exercice 3-7

Soient $(a,x) \in \mathbb{R}^2$ tels que $ax \neq 1$. Montrer que

$$\arctan a + \arctan x = \arctan \frac{a+x}{1-ax} + \varepsilon\pi \quad (\varepsilon \in \{-1,0,1\})$$

Exercice 3-8

Simplifier pour $x \in]-1,1[$, $\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

Exercice 3-9

Étudier la fonction définie par $f(x) = 2\arctan\bigl(\mathrm{th}(x)\bigr) - \arctan\bigl(\mathrm{sh}(2x)\bigr)$.

3.3.5 Fonctions hyperboliques réciproques

Fonction argsh

La fonction sh réalise une bijection strictement croissante de $]-\infty,\infty[$ vers $J =]-\infty,\infty[$. On appelle $\mathrm{argsh} = \mathrm{sh}^{-1}$ sa bijection réciproque.

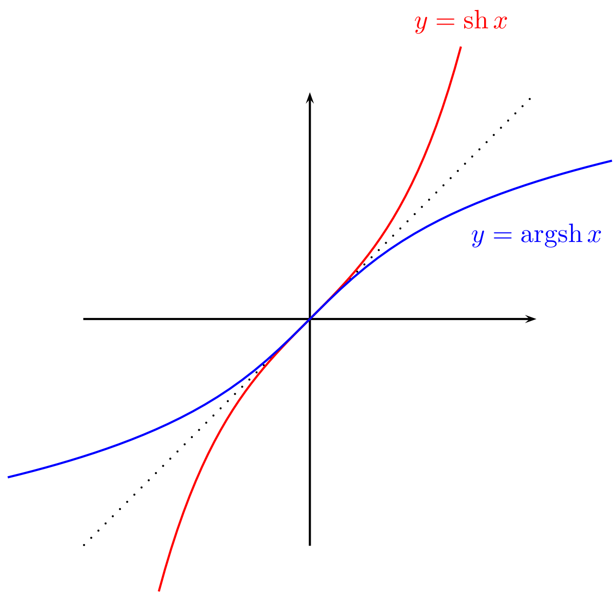


Fig. 3.10 – *Fonctions* sh *et* argsh

La fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \boxed{\mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

On a l'expression logarithmique de argsh :

$$\boxed{\mathrm{argsh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})}$$

On en déduit que

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{argsh}(x) + C = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C}$$

Fonction argch

La restriction de la fonction ch à l'intervalle $I = [0, +\infty[$ réalise une bijection strictement croissante de I vers $[1, +\infty[$. On appelle $\operatorname{argch} = \operatorname{ch}^{-1}$ sa bijection réciproque.

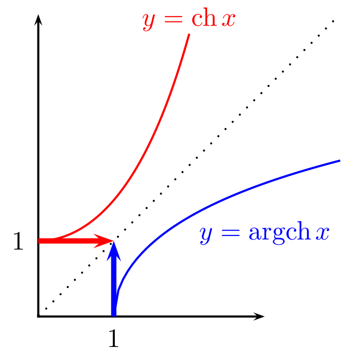


Fig. 3.11 – *Fonctions* ch *et* argch

La fonction argch est dérivable sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall x \in]1, +\infty[, \boxed{\operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}}$$

On a l'expression logarithmique :

$$\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

et on en déduit la primitive :

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{argch} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + C}$$

Fonction argth

La fonction th réalise une bijection strictement croissante de l'intervalle $I =]-\infty, +\infty[$ vers l'intervalle $J =]-1, 1[$. On appelle $\operatorname{argth} = \operatorname{th}^{-1}$ sa bijection réciproque.

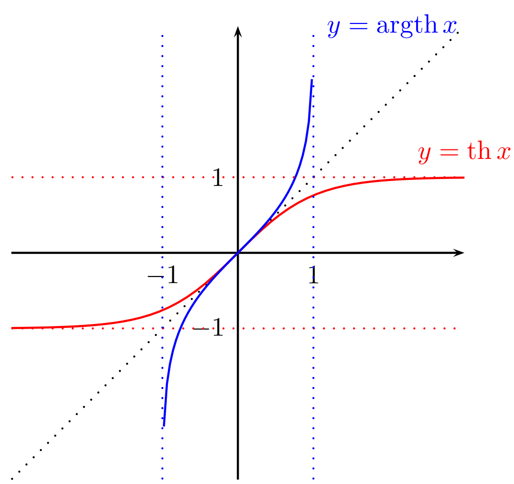


Fig. 3.12 – *Fonctions* th *et* argth

La fonction argth est dérivable sur $] - 1, 1[$ et

$$\forall x \in] - 1, 1[, \boxed{\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}}$$

On a l'expression logarithmique :

$$\operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln\Big(\frac{1 + x}{1 - x}\Big)$$

3.3.6 Etude d'une fonction

DÉFINITION 3.1 : **Asymptotes** Soit $f : [c, +\infty] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'une courbe $y = g(x)$ est *asymptote* à la courbe $y = f(x)$ en $+\infty$ ssi

$$g(x) - f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

En particulier, une droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f ssi

$$f(x) - [ax + b] \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

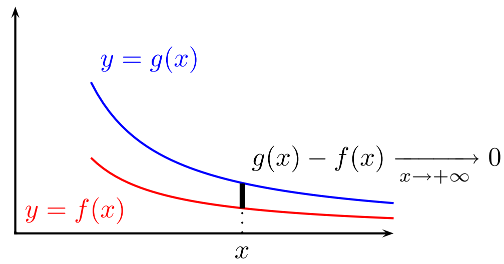


FIG. 3.13 – *Courbes asymptotes lorsque* $x \to +\infty$

Méthode pratique de recherche d'asymptotes

1. Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$, la droite horizontale $y = l$ est asymptote. On lit sur le tableau de variations la position de la courbe par rapport à l'asymptote.
2. Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \infty$, on cherche un équivalent simple de $f(x)$ en $+\infty$.
3. Si $f(x) \sim ax$, $(a \in \mathbb{R}^*)$ on calcule $f(x) - ax$ et on cherche la limite de $f(x) - ax$. Si $f(x) - ax \to b \in \mathbb{R}$, la droite $y = ax + b$ est asymptote. On détermine la position de la courbe par rapport à l'asymptote en cherchant un équivalent de $f(x) - [ax + b]$.
4. Si $\dfrac{f(x)}{x} \to \infty$, on dit qu'on a une branche parabolique de direction $(0y)$. Si $\dfrac{f(x)}{x} \to 0$, une branche parabolique de direction $(0x)$.
5. Si $f(x) \sim ax^2$, $(a \neq 0)$, on peut rechercher des paraboles asymptotes.

Plan d'étude d'une fonction

1. Trouver le domaine de définition.
2. Calculer la dérivée (factoriser) et étudier son signe.
3. Tableau de variations. On précise les valeurs *exactes* remarquables, les limites et les prolongements éventuels (on étudie alors la dérivabilité de la fonction prolongée).
4. Recherche d'éventuelles asymptotes.
5. Tracé approximatif de la courbe $y = f(x)$: on représente les asymptotes éventuelles, les tangentes horizontales

Remarque 34. La représentation de valeurs particulières numériques obtenues à l'aide de la calculatrice ne présente en général aucun intérêt !

Exercice 3-10

Étudier la fonction définie par $f(x) = x^{x+1}$.

3.3.7 Fonction exponentielle complexe

Dérivée d'une fonction complexe

DÉFINITION 3.2 : **Dérivée d'une fonction complexe**
Si $f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & f(x) = f_1(x) + if_2(x) \end{array} \right.$ est une fonction complexe, où $f_1 = \mathrm{Re}(f)$ et $f_2 = \mathrm{Im}(f)$ sont deux fonctions réelles dérivables, on définit la dérivée de f par :

$$\forall x \in I,\ f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x)$$

PROPOSITION 3.4 : **Dérivée d'un produit**
Soient deux fonctions complexes dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \mapsto \mathbb{C}$ et $g : I \mapsto \mathbb{C}$. La fonction $fg : I \mapsto \mathbb{C}$ est dérivable sur l'intervalle I et

$$\forall x \in I,\ (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Exponentielle complexe

THÉORÈME 3.5 : **Dérivée de l'exponentielle complexe**
Soit $\phi : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction complexe dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Alors la fonction

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{\phi(x)} \end{array} \right.$$

est dérivable sur l'intervalle I et

$$\forall x \in I,\ \psi'(x) = \phi'(x) \times e^{\phi(x)}$$

Chapitre 4

Equations différentielles

4.1 Rappels d'intégration

Nous démontrerons plus tard les résultats suivants.

DÉFINITION 4.1 : **Primitives**
Soit deux fonctions f et F définies sur un intervalle I. On dit que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I si et seulement si :

1. la fonction F est dérivable sur I ;
2. $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

THÉORÈME 4.1 : **Deux primitives diffèrent d'une constante**
Soit $f\ :\ I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et deux primitives $F,G :\mapsto \mathbb{R}$ de la fonction f sur l'intervalle I. Alors ces deux primitives diffèrent d'une constante :

$$\exists C \in \mathbb{R} \text{ tq } \quad \forall x \in I,\ G(x) = F(x) + C$$

THÉORÈME 4.2 : **Le théorème fondamental du calcul**
H1 Soit un *intervalle* I.
H2 Soit une fonction f *continue* sur I.
Soit un point $a \in I$. Alors la fonction

$$F : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$. En d'autres termes, la fonction F est l'unique primitive de f qui s'annule au point a.

COROLLAIRE 4.3 : **Théorème fondamental deuxième forme**
Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$. Alors la formule suivante relie f et sa dérivée par une intégrale. Pour tout $x \in [a,b]$:

$$\boxed{f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t}$$

4.2 Caractérisations de la fonction exponentielle

On considère un complexe $a \in \mathbb{C}$ et l'équation différentielle

$$(E)\ : y' = ay$$

Résoudre cette équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ dérivables vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = af(t)$$

Théorème 4.4 : **Résolution de l'équation différentielle** $y' = ay$

$$\mathcal{S} = \{f_\lambda;\ \lambda \in \mathbb{C}\}$$

où $f_\lambda : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda e^{at} \end{cases}$

On se propose maintenant de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\forall (t,u) \in \mathbb{R}^2,\ f(t+u) = f(t)f(u)$$

La fonction exponentielle vérifie cette propriété. Considérons maintenant une fonction quelconque f dérivable vérifiant cette propriété. On montre que :

Théorème 4.5 : **Résolution de l'équation fonctionnelle** $f(t+u) = f(t)f(u)$

1. S'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_0) = 0$, alors f est la fonction nulle.
2. Si f n'est pas la fonction nulle, alors $f(0) = 1$.
3. Si f n'est pas la fonction nulle, alors il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = e^{at}$.

4.3 Equations du premier ordre linéaires

Définition 4.2 : **Equation différentielle générale du premier ordre**
Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de trois variables où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $y : I \mapsto \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad F(y',y,t) = 0$$

si et seulement si :

1. y est une fonction dérivable sur I ;
2. $\forall t \in I,\ F(y'(t),y(t),t) = 0$.

On note $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des fonctions y solutions de l'équation différentielle. On dit que deux équations différentielles sont *équivalentes* lorsqu'elles ont même ensemble de solutions. On appelle *courbe intégrale* de l'équation différentielle, une courbe représentative d'une solution $y \in \mathcal{S}_E$.

Définition 4.3 : **Problème de Cauchy**
Soit $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de trois variables où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(t_0,y_0) \in I\times\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $y : I \mapsto \mathbb{R}$ est solution du problème de Cauchy :

$$(C) \quad \begin{cases} F(y',y,t) & = 0 \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}$$

si et seulement si :

1. y est une fonction dérivable sur l'intervalle I ;
2. $\forall t \in I,\ F(y'(t),y(t),t) = 0$;
3. $y(t_0) = y_0$.

Parmi les équations différentielles du premier ordre générales, on distingue :

– Les équations du premier ordre *explicites* de la forme :

$$(E) \quad y' = f(y,t)$$

où $f : \mathbb{R} \times I \mapsto \mathbb{R}$;

– Les équations du premier ordre *linéaires* de la forme :

$$(E) \quad a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

où $a,b,c : I \mapsto \mathbb{R}$ sont trois fonctions continues sur l'intervalle I ;

– Les équations du premier ordre linéaires *normalisées* de la forme :

$$(E) \quad y' + \alpha(t)y = \beta(t)$$

où $\alpha,\beta : I \mapsto \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues sur l'intervalle I.

Remarque 35. Si $y \in \mathcal{S}_E$, est une solution d'une équation différentielle explicite

$$(E) \quad y' = f(y,t)$$

alors en un point (t,y) de la courbe représentative de y, la pente de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_y$ vaut $f(y,t)$. La connaissance de la fonction f permet de tracer un champ de vecteurs. En un point (t_0,y_0) du plan on représente un vecteur de pente $f(t_0,y_0)$. Alors un point $(t_0,y(t_0))$ d'une courbe intégrale de (E), le champ de vecteurs sera tangent à la courbe. C'est l'idée de la *méthode d'Euler*.

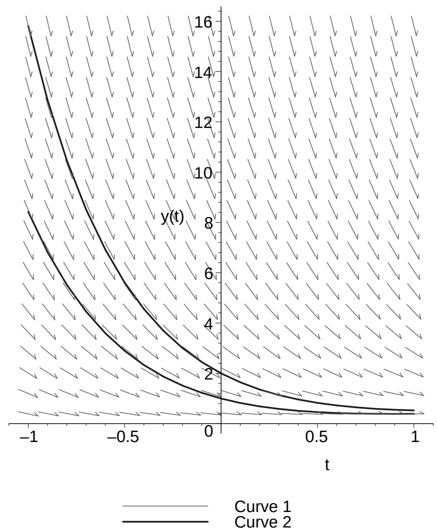


FIG. 4.1 – *Champ de vecteurs et courbes intégrales*

DÉFINITION 4.4 : **Équations différentielles linéaires du premier ordre**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a(t)$,$b(t)$,$c(t)$ trois fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $y(t) : I \mapsto \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

si:

1. y est une fonction dérivable sur I ;
2. $\forall t \in I$, $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$.

Résoudre l'équation différentielle consiste à déterminer l'ensemble des solutions $\mathcal{S}_E$ de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle I.

PROPOSITION 4.6 : Si la fonction $a(t)$ ne s'annule pas sur I, les solutions de (E) sont les solutions de l'équation normalisée :

$$(E') \quad y' + \frac{b(t)}{a(t)}y = \frac{c(t)}{a(t)}$$

Dans ce qui suit, on considère une équation différentielle normalisée de la forme :

$$(E) \quad y' + a(t)y = b(t)$$

et *l'équation homogène* associée (avec second membre nul) :

$$(H) \quad y' + a(t)y = 0$$

4.3.1 Résolution de l'équation homogène

$$(H) \quad y' + a(t)y = 0$$

THÉORÈME 4.7 : **Solutions de l'équation homogène**
Si $A : I \mapsto \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une primitive de la fonction $a(t)$ sur l'intervalle I, alors on sait écrire directement l'ensemble des solutions de l'équation homogène :

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \{t \mapsto Ce^{-A(t)} \ ; \ C \in \mathbb{R}\}}$$

(pour des solutions complexes, $C \in \mathbb{C}$).

Remarque 36. Nous verrons plus tard que l'ensemble des solutions de l'équation homogène a une structure de droite vectorielle.

Exercice 4-1

Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' + y = 0$ sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$. Dessiner l'ensemble des courbes intégrales. Trouver l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 2$.

Exercice 4-2

Résoudre l'équation différentielle $(E) : (1 + t^2)y' + 4ty = 0$ sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$.

Exercice 4-3

Trouver toutes les fonctions $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ continues sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$, vérifiant :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad 2xf(x) = 3 \int_0^x f(t)dt$$

4.3.2 Résolution de l'équation avec second membre

$$(E) \quad y' + a(t)y = b(t)$$

THÉORÈME 4.8 : **Solutions de l'équation complète** Si l'on connaît une solution particulière $\widetilde{y}$ à l'équation complète, on a l'ensemble de toutes les solutions :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{t \mapsto Ce^{-A(t)} + \widetilde{y}(t) \ ; \ C \in \mathbb{R}\}}$$

Remarque 37.
1. Le théorème suivant justifie qu'il existe toujours une solution particulière.
2. Nous verrons plus tard que l'ensemble des solutions a une structure de droite affine.

THÉORÈME 4.9 : **Résolution du problème de Cauchy**
Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une et une seule solution de (E) vérifiant $y(t_0) = y_0$. (i.e. il existe une unique courbe intégrale de (E) passant par le point (t_0,y_0)). Cette solution est donnée sous forme intégrale :

$$\boxed{y(t) = e^{A(t_0) - A(t)}y_0 + e^{-A(t)} \int_{t_0}^t e^{A(u)}b(u)\, \mathrm{d}u}$$

Résolution pratique :

1. On résout l'équation homogène : la solution générale de l'équation homogène est de la forme $Ce^{-A(t)}$;
2. Y a-t-il une solution particulière évidente ? On peut utiliser le principe de superposition des solutions. Si le second membre est de la forme $c(t) = c_1(t) + \cdots + c_n(t)$ et si l'on connaît des solutions particulières $\widetilde{y_1}, \ldots, \widetilde{y_n}$ des équations avec second membre $c_i(t)$, alors la fonction

$$\widetilde{y}(t) = \widetilde{y_1}(t) + \cdots + \widetilde{y_n}(t)$$

   est une solution particulière de l'équation (E).
3. Si l'on ne voit pas de solution évidente, on cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme $\widetilde{y}(t) = C(t)e^{-A(t)}$ où $C(t)$ est une fonction vérifiant

$$\boxed{C'(t)e^{-A(t)} = b(t)}$$

   c'est la méthode de la *variation de la constante* ;

4. On écrit la solution générale de l'équation complète.

Exercice 4-4

Résoudre sur $I = \mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$y' + ty = t$$

Exercice 4-5

Résoudre l'équation différentielle sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$,

$$y' + 2xy = e^{x-x^2}$$

Exercice 4-6

Résoudre sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$, l'équation différentielle

$$y' + y = 2e^x + 4\sin x + 3\cos x$$

4.3.3 Méthode d'Euler

On considère le problème de Cauchy pour une équation différentielle du premier ordre explicite :

$$\begin{cases} y' & = f(t,y) \\ y(t_0) & = y_0 \end{cases}$$

Même si l'équation différentielle est linéaire, sa résolution passe par un calcul de primitives, or on ne sait calculer que très peu de primitives. Lorsque l'équation différentielle est non-linéaire, il est en général impossible de déterminer la solution explicite du problème de Cauchy. On a recours à des méthodes numériques de calcul approché de solutions. La plus simple de ces méthodes est la *méthode d'Euler* qui se base sur une idée géométrique simple.

L'idée est d'approximer la dérivée de y au point t par un taux d'accroissement :

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

ou de manière équivalente, d'approximer la courbe de y par sa tangente en t_0. Comme $\dfrac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h} \approx f(t_0,y_0)$, on en déduit que $y(t_0+h) \approx y_0 + f(t_0,y_0)$. Connaissant la valeur de y en t_0+h, on peut recommencer pour obtenir une approximation de $y(t_0+kh)$.

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_0+nh,y_n)$$

Le réel y_n est une approximation de $y(t_0+nh)$.

4.4 Equations différentielles du second ordre à coefficients constants

DÉFINITION 4.5 : **Equation linéaire du second ordre à coefficients constants**

Soient trois complexes $(a,b,c) \in \mathbb{C}$, et une fonction $f : I \mapsto \mathbb{C}$ continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $y : I \mapsto \mathbb{C}$ est une solution de l'équation différentielle

$$(E) : \quad y'' + ay' + by = f(t)$$

si

1. y est une fonction deux fois dérivable sur I ;
2. $\forall t \in I$, $y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$.

On notera $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E) sur I.

4.4.1 Résolution de l'équation homogène

On considère l'équation homogène

$$(H): \quad y'' + ay' + by = 0$$

et l'on note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble de ses solutions sur I.

Théorème 4.10 : **Structure de l'ensemble des solutions**
$\mathcal{S}_H$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension 2. Soit

$$(C): \quad r^2 + ar + b = 0$$

l'*équation caractéristique* associée. Alors :

1. Si (C) possède deux racines distinctes r_1,r_2, alors

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \{Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \mid (A,B) \in \mathbb{C}^2\}}$$

2. Si (C) possède une racine double $r \in \mathbb{C}$, alors

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \{Ae^{rt} + Bte^{rt} \mid (A,B) \in \mathbb{C}^2\}}$$

Théorème 4.11 : **Solutions réelles de l'équation homogène**
Lorsque $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on cherche des solutions $y : I \mapsto \mathbb{R}$ réelles. L'ensemble des solutions réelles est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2. On considère l'équation caractéristique

$$(C) \quad r^2 + ar + b = 0$$

1. Si (C) possède deux racines réelles distinctes r_1,r_2, alors

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \{Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}}$$

2. Si (C) possède une racine double $r \in \mathbb{R}$, alors

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \{Ae^{rt} + Bte^{rt} \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}}$$

3. Si (C) ne possède pas de racines réelles, mais deux racines complexes conjuguées $r_1 + ir_2$ et $r_1 - ir_2$, alors

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \{Ae^{r_1 t}\cos(r_2 t) + Be^{r_1 t}\sin(r_2 t) \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\}}$$

Exercice 4-7
Résoudre $y'' = \omega^2 y$ et $y'' = -\omega^2 y$ (solutions réelles).

Exercice 4-8
Résoudre $y'' - 4y' + 13y = 0$ (solutions réelles).

Exercice 4-9
Résoudre $y'' - 4y' + 4y = 0$ (solutions réelles).

4.4.2 Résolution de l'équation avec second membre exponentielle-polynôme

On considère l'équation complète

$$(E) \quad y'' + ay' + by = f(t)$$

avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $f(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{m_k t} P_k(t)$ où $m_k \in \mathbb{C}$ et $P_k(t)$ est un polynôme en t.

Théorème 4.12 : Structure de l'ensemble des solutions
Soit $\widetilde{y}$ une solution particulière de (E). L'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions de (E) est un espace affine de dimension 2 (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \{Ay_0^1(t) + By_0^2(t) + \widetilde{y}(t); (A,B) \in \mathbb{K}^2\}}$$

où y_0^1 et y_0^2 forment une base de $\mathcal{S}_H$.

Théorème 4.13 : Principe de superposition
Si $f(t) = f_1(t) + \cdots + f_n(t)$ et si $\widetilde{y}_i(t)$ est une solution particulière de l'équation avec second membre $f_i(t)$, alors

$$\widetilde{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{y}_i(t)$$

est une solution particulière de l'équation avec second membre $f(t)$.

Recherche pratique d'une solution particulière

Théorème 4.14 : Recherche d'une solution particulière complexe
On sait trouver une solution particulière complexe pour un second membre de la forme :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{m_k t} P_k(t), \quad m_k \in \mathbb{C},\ P_k \in \mathbb{C}[X]$$

1. En utilisant le principe de superposition, on se ramène à chercher une solution particulière pour un second membre de la forme $f(t) = e^{mt}P(t)$.
2. Si m n'est pas racine de l'équation caractéristique, il existe une solution particulière de la forme
$$\widetilde{y}(t) = e^{mt}Q(t) \text{ avec } \deg(Q) = \deg(P)$$
3. Si m est racine simple de (C), il existe une solution particulière de la forme
$$\widetilde{y}(t) = e^{mt}Q(t) \text{ avec } \deg(Q) = \deg(P) + 1 \text{ et } Q(0) = 0$$
4. Si m est racine double de (C), il existe une solution particulière de la forme
$$\widetilde{y}(t) = e^{mt}Q(t) \quad Q''(t) = P(t)$$

Théorème 4.15 : **Recherche d'une solution particulière réelle**

On sait trouver une solution particulière réelle pour un second membre de la forme :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{m_k t} P_k(t) \quad m_k \in \mathbb{R},\ P_k \in \mathbb{R}[X]$$

avec la même méthode que pour la recherche d'une solution complexe. On sait également trouver une solution particulière réelle pour un second membre de la forme :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{\alpha_k t}\big[P_k(t)\cos(\beta_k t) + Q_k(t)\sin(\beta_k t)\big] \quad \alpha_k,\beta_k \in \mathbb{R},\ P_k,Q_k \in \mathbb{R}[X]$$

1. Par le principe de superposition, il suffit de trouver une solution particulière avec un second membre de la forme

$$f(t) = e^{\alpha t}\big[P(t)\cos(\beta t) + Q(t)\sin(\beta t)\big] \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ P,Q \in \mathbb{R}[X]$$

2. Si le complexe $m = \alpha + i\beta$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, il existe une solution réelle de la forme :

$$\widetilde{y}(t) = e^{\alpha t}\big[A(t)\cos(\beta t) + B(t)\sin(\beta t)\big] \text{ avec } A,B \in \mathbb{R}_n[X] \text{ où } n = \max(\deg P, \deg Q)$$

3. Si le complexe $m = \alpha + i\beta$ est racine de l'équation caractéristique, il existe une solution réelle de la forme :

$$\widetilde{y}(t) = e^{\alpha t}\big[A(t)\cos(\beta t) + B(t)\sin(\beta t)\big] \text{ avec } A,B \in \mathbb{R}_n[X]$$

où $n = 1 + \max(\deg P, \deg Q)$ et $A(0) = B(0) = 0$.

Exercice 4-10

Résoudre $y'' - y' - 2y = 3e^t + 1$ (solutions réelles).

Exercice 4-11

Résoudre $y'' - 4y' + 4y = (t^2 + 1)e^{2t}$ (solutions réelles).

Exercice 4-12

Résoudre $y'' + 2y' + 5y = \cos^2 t$ (solutions réelles).

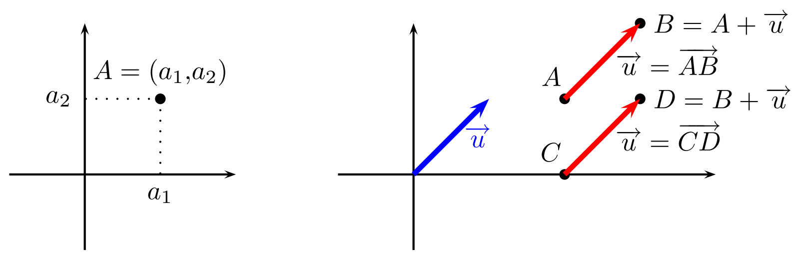
Chapitre 5

Géométrie du plan

Ce chapitre est une introduction à la géométrie et a pour but de vous familiariser avec des notions et techniques utilisées en physique et en si. Des définitions plus rigoureuses seront vues en cours d'année.

5.1 Points, vecteurs

On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}^2$ formé des couples de réels. On peut représenter un tel couple (x,y), par un point M du plan. Un vecteur $\overrightarrow{u}$ modélise un *déplacement* entre deux points A et B. Si $A = (a_1,a_2)$ et $B = (b_1,b_2)$, on définit le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ comme étant le couple de réels $\overrightarrow{u} = (b_1 - a_1,b_2 - a_2)$.
On notera $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $B = A + \overrightarrow{u}$ et $A = B - \overrightarrow{u}$, notations compatibles avec l'addition des couples. On représente graphiquement un vecteur par une flèche joignant le premier point au deuxième. Sur le schéma 5.1, les déplacements entre les points A,B et les points C,D sont identiques. Un vecteur du plan peut être défini comme une classe d'équivalence sur les couples de points. On privilégie sur le dessin le déplacement partant de l'origine qui permet d'interpréter au mieux les opérations sur les vecteurs. Si les points A et B ont pour affixes les complexes a et b, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond au complexe $b - a$.



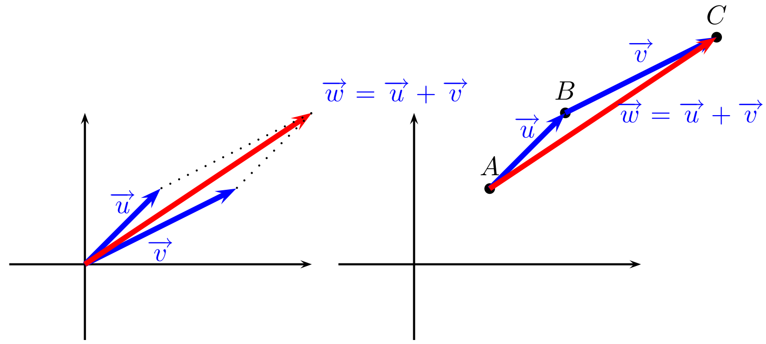
(a) Point (b) Vecteurs

FIG. 5.1 – *Points-vecteurs*

On définit *l'addition de deux vecteurs* par la formule : $\overrightarrow{u} = (u_1,u_2)$, $\overrightarrow{v} = (v_1,v_2)$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1,u_2 + v_2)$. L'addition de deux vecteurs correspond à la composée des deux déplacements et s'interprète graphiquement par la règle du parallélogramme.
On peut également multiplier un scalaire par un vecteur : si $\overrightarrow{u} = (u_1,u_2)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit le vecteur $\lambda.\overrightarrow{u} = (\lambda u_1,\lambda u_2)$. On parle également de *combinaison linéaire* de deux vecteurs. Pour deux scalaires $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ $\overrightarrow{v}$, on définit le nouveau vecteur $\lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{v}$.

DÉFINITION 5.1 : **Vecteurs colinéaires, systèmes liés, bases**

1. On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, sont *colinéaires* s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda.\overrightarrow{u}$ (ou si $\overrightarrow{u}$ est le vecteur nul).
2. On dit qu'un système de deux vecteurs $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est *lié* si ces deux vecteurs sont colinéaires. Sinon, on dit que le système est *libre*.
3. Si un système de deux vecteurs $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est libre, tout vecteur du plan peut s'exprimer comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs. On dit que le système est une *base* du plan.



(a) Addition de deux vecteurs

(b) Interprétation en déplacements

FIG. 5.2 – *Addition de vecteurs*

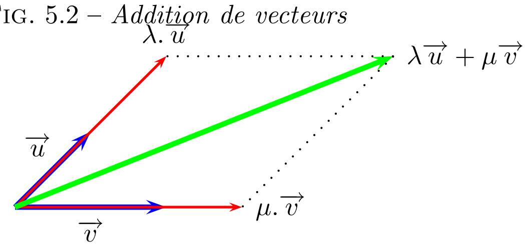


FIG. 5.3 – *Combinaison linéaire de deux vecteurs*

Parmi les bases possibles, on distingue une base particulière, la *base canonique* formée des vecteurs $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ où $\overrightarrow{i} = (1,0)$ et $\overrightarrow{j} = (0,1)$.

DÉFINITION 5.2 : **Composantes d'un vecteur dans une base**
Si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est une base du plan, tout vecteur $\overrightarrow{w}$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base :
$$\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$$
Le couple de scalaires (λ,μ) s'appelle les *composantes* du vecteur $\overrightarrow{w}$ dans la base $\mathcal{B}$.

DÉFINITION 5.3 : **Repère cartésien**
On appelle *repère cartésien* du plan la donnée d'un point Ω et d'une base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. Pour tout point M du plan, le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base :
$$\overrightarrow{\Omega M} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$$
On dit que les scalaires (λ,μ) sont les *coordonnées* du point M dans le repère $\mathcal{R} = (\Omega,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ et on écrit $M\left|\begin{matrix}\lambda\\ \mu\end{matrix}\right._{\mathcal{R}}$.

DÉFINITION 5.4 : **Droite vectorielle, droite affine**
1. La *droite vectorielle* engendrée par un vecteur $\overrightarrow{u}$ non-nul est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{u}$:
$$\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}) = \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}\}$$
2. La *droite affine* $\mathcal{D}$ passant par un point A et dirigée par un vecteur non-nul $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points $\mathcal{D} = \{A + \lambda.\overrightarrow{u}\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. On dit que la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$ est la *direction* de la droite affine $\mathcal{D}$. On note $\mathcal{D} = A + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$.

5.2 Modes de repérage dans le plan

On suppose le plan « orienté » dans le sens trigonométrique, et on suppose connue la notion intuitive d'angle orienté entre vecteurs non-nuls. Si $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ sont deux vecteurs d'affixes les complexes $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ et $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$,

l'angle orientié entre les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ vaut $\theta_2 - \theta_1$.
On dit qu'un vecteur est *normé* ou *unitaire* lorsque sa norme vaut 1. Une base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est *orthonormale* lorsque les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux et unitaires. On dit de plus que la base est *directe* lorsque l'angle entre le premier et le deuxième vecteur de la base vaut $+\pi/2$. La base canonique $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ est une base orthonormale directe. On dit qu'un repère $\mathcal{R} = (\Omega,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$ est *orthonormé direct* si la base $(\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$ est une base orthonormale directe.

THÉORÈME 5.1 : **Formules de changement de repère**
On considère deux repères orthonormés directs $\mathcal{R} = (O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ et $\mathcal{R}' = (\Omega,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$. On note θ l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{I}$. Si M est un point du plan,

$$M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right._{\mathcal{R}},\ M\left|\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}\right._{\mathcal{R}'},\ \Omega\left|\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}\right._{\mathcal{R}}$$

on a les formules de changement de repère :

$$\boxed{\begin{cases} x &= \alpha + \cos\theta X - \sin\theta Y \\ y &= \beta + \sin\theta X + \cos\theta Y \end{cases}}$$

Remarque 38. Les formules de changement de repères quelconques sont de la forme :

$$\begin{cases} x &= \alpha + aX + cY \\ y &= \beta + bX + dY \end{cases}$$

DÉFINITION 5.5 : **Repère polaire**
Soit un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. L'origine du repère est appelée le *pôle*. Soit un réel $\theta \in \mathbb{R}$. On définit les deux vecteurs

$$\begin{cases} \overrightarrow{u}(\theta) &= \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{v}(\theta) &= -\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \cos\theta\,\overrightarrow{j} \end{cases}$$

Le système $(\overrightarrow{u}(\theta),\overrightarrow{v}(\theta))$ est une base orthonormale directe, et le repère $\mathcal{R}_\theta = (O,\overrightarrow{u}(\theta),\overrightarrow{v}(\theta))$ s'appelle le *repère polaire* d'angle θ.

Remarque 39. Le vecteur $\overrightarrow{u}(\theta)$ a pour affixe $e^{i\theta}$ et le vecteur $\overrightarrow{v}(\theta)$ a pour affixe $e^{i(\theta+\pi/2)} = ie^{i\theta}$.

DÉFINITION 5.6 : **Coordonnées polaires**
On considère un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. Soit un point M différent du pôle. On dit qu'un couple de réels (ρ,θ) est un couple de coordonnées polaires du point M si

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u}(\theta)$$

Remarque 40.
1. Il n'y a pas unicité des coordonnées polaires d'un point. Si (ρ,θ) est un couple de coordonnées polaires d'un point M, les couples suivants sont également des coordonnées polaires de M :
   - $(\rho,\theta + 2k\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$
   - $(-\rho,\theta + (2k+1)\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$
2. Si $M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right._{\mathcal{R}}$, et si (ρ,θ) est un couple de coordonnées polaires du point M,
   - On exprime les coordonnées cartésiennes de M en fonction d'un couple de coordonnées polaires par les formules :
   $$\begin{cases} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \end{cases}$$
   - On peut trouver un couple de coordonnées polaires du point M en fonction des coordonnées cartésiennes par les formules :
   $$\begin{cases} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta &= \dfrac{y}{x} \end{cases}$$
   (si $x = 0$, prendre $\theta = +\pi/2$ lorsque $y > 0$ ou $\theta = -\pi/2$ si $y < 0$).

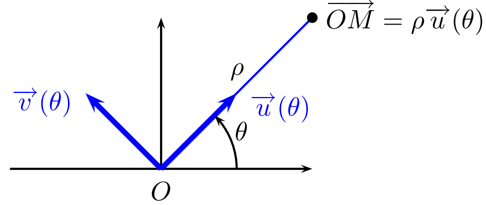


FIG. 5.4 – *Repère polaire :* $\mathcal{R}_\theta = (O,u(\theta),v(\theta))$

Exercice 5-1

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère deux droites affines $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sécantes. Soient A_1,B_1,C_1 trois points distincts de la droite $\mathcal{D}_1$ et A_2,B_2,C_2 trois points distincts de la droite $\mathcal{D}_2$.

Montrer que si les droites (A_1B_2) et (A_2B_1) sont parallèles et que les droites (B_1C_2) et (B_2C_1) sont parallèles, alors les droites (A_1C_2) et (A_2C_1) sont également parallèles.

Exercice 5-2

Dans le plan, montrer que les médianes d'un triangle (ABC) se coupent à l'isobarycentre de (A,B,C).

5.3 Produit scalaire, produit mixte

DÉFINITION 5.7 : **Produit scalaire, norme, distance**

1. Si un vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour affixe un complexe z, on définit la *norme* de $\overrightarrow{u}$ comme le module de z :
$$\|u\| = |z|$$
Ce réel représente la « longueur » du vecteur z.
2. Pour deux points A et B, d'affixes $a,b \in \mathbb{C}$, on définit la *distance* entre les points par :
$$d(A,B) = |b-a| = \|\overrightarrow{AB}\|$$
3. On définit le *produit scalaire* entre deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non-nuls par
$$(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos\theta$$
où $\theta = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est l'angle orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire est nul.

PROPOSITION 5.2 : **Interprétation en nombres complexes**

Pour deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ d'affixes les complexes $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$, on a :
$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = \mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2)$$

PROPOSITION 5.3 : **Propriétés du produit scalaire**

Pour trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et deux scalaires $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, on a les propriétés suivantes :

1. **bilinéarité :**
$$(\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} + \mu\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$$
$$\overrightarrow{u}.(\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$$
2. **symétrie :** $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$.

THÉORÈME 5.4 : **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs du plan, on a l'inégalité :
$$\left|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right| \le \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|$$
avec égalité si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires.

PROPOSITION 5.5 : Expression du produit scalaire dans une bon

Si $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ est une base orthonormale du plan, le produit scalaire de deux vecteurs s'exprime simplement à l'aide des coordonnées des vecteurs dans cette base : $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{u'} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'} = xx' + yy'$$

PROPOSITION 5.6 : Interprétation du produit scalaire en termes de projections

Soit une droite affine $\mathcal{D}$ dirigée par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ et deux points A, B du plan. En notant A' et B' les projetés orthogonaux des points A et B sur la droite $\mathcal{D}$, on a

$$d(A',B') = \left|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{AB}\right|$$

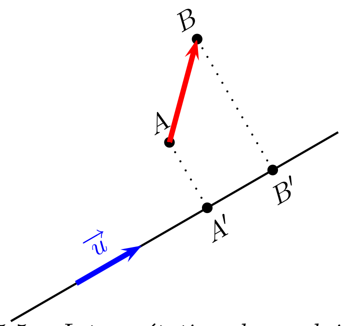


FIG. 5.5 – *Interprétation du produit scalaire*

DÉFINITION 5.8 : Produit mixte

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ non-nuls. On appelle *déterminant* ou *produit mixte* des deux vecteurs le réel

$$\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}) = \|\overrightarrow{u_1}\|\|\overrightarrow{u_2}\|\sin\theta$$

où $\theta = (\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$ est l'angle orienté entre les deux vecteurs.
Si l'un des vecteurs est nul, $\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}) = 0$.

PROPOSITION 5.7 : Interprétation complexe

Si les deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ont pour affixe les complexes z_1 et z_2,

$$\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}) = \operatorname{Im}(\overline{z_1}z_2)$$

PROPOSITION 5.8 : Propriétés du produit mixte

1. **bilinéarité :** pour trois vecteurs $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}$, et deux scalaires $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$,
   - $\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\lambda\overrightarrow{u_2} + \mu\overrightarrow{u_3}) = \lambda\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}) + \mu\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_3})$
   - $\operatorname{Det}(\lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}) = \lambda\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_3}) + \mu\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3})$
2. **antisymétrie :** $\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_1}) = -\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$.
3. **vecteurs liés :** les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont liés si et seulement si $\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}) = 0$.
4. **Inégalité de Gramm-Schmidt :**

   $$|\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})| \leq \|\overrightarrow{u_1}\|\|\overrightarrow{u_2}\|$$

   avec égalité si et seulement si les deux vecteurs sont orthogonaux.
5. **Identité de Lagrange :**

   $$(\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2})^2 + \operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})^2 = \|\overrightarrow{u_1}\|^2\|\overrightarrow{u_2}\|^2$$

PROPOSITION 5.9 : Interprétation en termes d'aire

Le produit mixte de deux vecteurs $\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$ représente l'aire algébrique du parallélogramme s'appuyant sur les deux vecteurs.

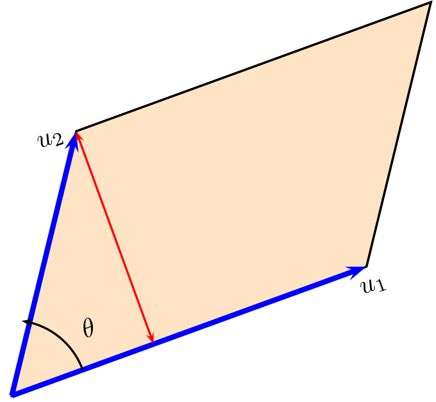


Fig. 5.6 – *Interprétation du produit mixte*

Théorème 5.10 : **Calcul du produit mixte dans une bon directe**
Dans une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, si $\overrightarrow{u_1} = x_1 \overrightarrow{i} + y_1 \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{u_2} = x_2 \overrightarrow{i} + y_2 \overrightarrow{j}$,

$$\boxed{\mathrm{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1}$$

5.4 Droites

Théorème 5.11 : **Condition d'alignement de trois points**
Dans un repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, trois points $M_1 \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$, $M_2 \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$, $M_3 \begin{vmatrix} x_3 \\ y_3 \end{vmatrix}$ sont alignés si et seulement si $\mathrm{Det}(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3}) = 0$, ce qui se traduit par :

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Théorème 5.12 : **Droite passant par un point dirigée par un vecteur non-nul**
On considère une droite affine passant par un point $\Omega\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}$ et dirigée par un vecteur $\overrightarrow{u}\begin{vmatrix}u_1\\u_2\end{vmatrix}$ non-nul.

Un point $M\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ est sur cette droite si et seulement si :

1. **Équation paramétrique :** il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{\begin{cases} x &= \alpha + \lambda u_1 \\ y &= \beta + \lambda u_2 \end{cases}}$$

2. **Équation cartésienne :** les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{\Omega M}$ sont liés, ce qui se traduit par

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{\Omega M}) = 0 \ : \begin{vmatrix} x-\alpha & u_1 \\ y-\beta & u_2 \end{vmatrix} = 0$$

3. L'équation cartésienne d'une droite affine est de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

avec $(a,b) \neq (0,0)$, L'équation cartésienne de la droite vectorielle associée est :

$$ax + by = 0$$

(on supprime la constante) et le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{vmatrix}-b\\a\end{vmatrix}$ dirige cette droite vectorielle.

Théorème 5.13 : **Droite passant par deux points distincts**
Soient deux points $M_1\begin{vmatrix}x_1\\y_1\end{vmatrix}$ et $M_2\begin{vmatrix}x_2\\y_2\end{vmatrix}$ distincts. Un point $M\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ appartient à la droite (M_1M_2) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{M_1M}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont liés, ce qui se traduit par :

1. **Équation paramétrique :** il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \end{cases}$$

2. **Équation cartésienne :**

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_1M_2}) = \begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Théorème 5.14 : **Droite définie par un point et un vecteur normal**
Soit un point $\Omega\begin{vmatrix}\alpha\\\beta\end{vmatrix}$ et un vecteur $\overrightarrow{v}\begin{vmatrix}v_1\\v_2\end{vmatrix}$. Un point $M\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ appartient à la droite passant par Ω et orthogonale au vecteur $\overrightarrow{v}$ si et seulement si $\overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{v} = 0$ ce qui donne l'équation cartésienne de cette droite :

$$v_1(x-\alpha) + v_2(y-\beta) = 0$$

Remarque 41. Réciproquement, si l'équation cartésienne d'une droite affine est

$$\mathcal{D} \ : ux + vy + w = 0$$

le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{vmatrix}u\\v\end{vmatrix}$ est normal à la droite.

Théorème 5.15 : Distance d'un point à une droite

1. Soit une droite $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ et $M\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ un point du plan. Alors

$$\boxed{d(M,\mathcal{D}) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

2. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par les deux points A, B distincts et M un point du plan. Alors

$$\boxed{d(M,\mathcal{D}) = \frac{\left|\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})\right|}{\|\overrightarrow{AB}\|}}$$

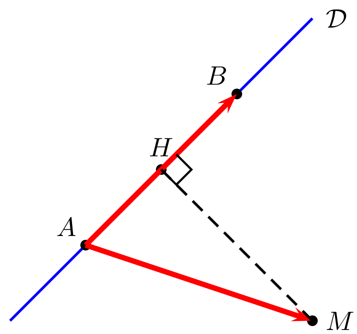


Fig. 5.7 – *Distance d'un point à une droite dans le plan*

Théorème 5.16 : Équation normale d'une droite

Soit $\overrightarrow{u}\begin{vmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{vmatrix}$ un vecteur unitaire. On définit l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \overrightarrow{u}.\overrightarrow{OM} \end{cases}$. Les lignes de niveau de f sont des droites affines :

$$f(M) = c \Longleftrightarrow \boxed{\cos\theta x + \sin\theta y = c}$$

avec $\overrightarrow{u}$ un vecteur normal à la droite, et $|c| = d(O,\mathcal{D})$.

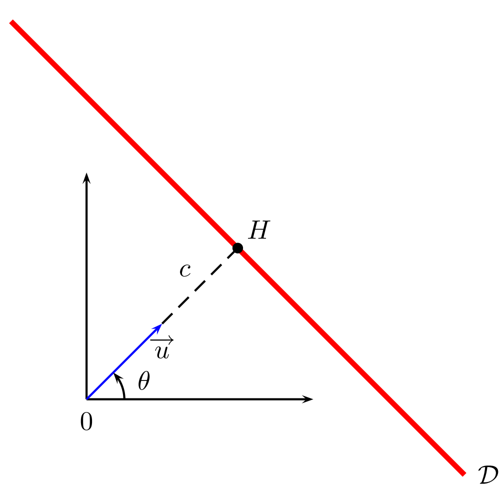


Fig. 5.8 – *Équation normale d'une droite*

THÉORÈME 5.17 : **Équation polaire d'une droite**

1. **Droite passant par l'origine :** $\theta = \theta_0$
2. **Droite parallèle à** (Ox) **:** $\rho = \dfrac{a}{\sin\theta}$
3. **Droite parallèle à** (Oy) **:** $\rho = \dfrac{a}{\cos\theta}$
4. **Droite quelconque :**

$$\rho = \frac{c}{a\cos\theta + b\sin\theta}$$

$$\rho = \frac{p}{\cos(\theta - \theta_0)}$$

où p est la distance du pôle à la droite et θ_0 l'angle entre (Ox) et la normale à la droite.

Exercice 5-3

Soit un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ et un point A. Déterminer les lignes de niveau de la fonction $M \mapsto \mathrm{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AM})$

5.5 Cercles

DÉFINITION 5.9 : **Cercle**

On considère un point Ω et un réel strictement postif $R > 0$. On appelle *cercle* de centre Ω et de rayon R l'ensemble des points du plan à distance R du centre :

$$\mathcal{C}(\Omega,R) = \{M \in \mathcal{P} \mid d(\Omega,M) = R\}$$

THÉORÈME 5.18 : **Équation cartésienne réduite d'un cercle**

Si $\Omega\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$, un point $M\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ appartient au cercle de centre Ω et de rayon R si et seulement si :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Dans le nouveau repère $\mathcal{R}' = (\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, un point $M\begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix}_{\mathcal{R}'}$ appartient au cercle si et seulement si

$$X^2 + Y^2 = R^2$$

PROPOSITION 5.19 : **Équation cartésienne de la tangente à un cercle**

– On considère un cercle d'équation réduite

$$x^2 + y^2 = R^2$$

et un point $M_0\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}_{\mathcal{R}'}$ du cercle. L'équation cartésienne de la tangente au cercle au point M_0 est :

$$\boxed{xx_0 + yy_0 = R^2}$$

– On considère un cercle d'équation générale

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

et un point $M_0\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ du cercle. L'équation de la tangente au cercle au point M_0 est :

$$\boxed{xx_0 + yy_0 + a\frac{x + x_0}{2} + b\frac{y + y_0}{2} + c = 0}$$

(règle de dédoublement des termes)

Théorème 5.20 : Équation générale d'un cercle
L'ensemble des points du plan $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ vérifiant l'équation :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

est de la forme suivante :
- vide (si $a^2 + b^2 - 4c < 0$)
- Réduite à un point (si $a^2 + b^2 - 4c = 0$)
- Un cercle (si $R^2 = a^2 + b^2 - 4c > 0$)

Théorème 5.21 : Équation polaire d'un cercle passant par l'origine

- Cercle de centre 0 et de rayon a :
$$\rho = a$$
- Cercle tangent à (Oy) et passant par l'origine :
$$\rho = 2R\cos\theta$$
- Cercle quelconque passant par l'origine :
$$\rho = 2\alpha\cos\theta + 2\beta\sin\theta$$

Théorème 5.22 : Intersection d'un cercle et d'une droite
L'intersection d'un cercle et d'une droite peut être :
- vide,
- réduite à un point. Dans ce cas la droite est tangente au cercle
- formée de deux points distincts.

Théorème 5.23 : Intersection de deux cercles
L'intersection de deux cercles de rayons R et r $(R > r)$ est non-vide si et seulement si

$$R - r \leq d \leq R + r$$

où d est la distance entre les deux centres.

Exercice 5-4
On considère deux points A et B distincts. Déterminer les points M vérifiant la condition

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$$

Exercice 5-5
On définit l'angle non-orienté entre deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ comme étant l'angle modulo π que font deux vecteurs directeurs de ces droites.
Soient deux points distincts du plan A et B et un réel $\alpha \in [0,\pi[$. Déterminer les lignes de niveau de la fonction

$$M \mapsto (MA,MB)$$

Exercice 5-6
Soient deux points distincts A et B et un réel $k > 0$. Déterminer les points M vérifiant :

$$d(M,B) = k \times d(M,A)$$

Chapitre 6

Géométrie de l'espace

6.1 Modes de repérage dans l'espace

Définition 6.1 : **systèmes liés**
On dit que trois vecteurs $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3})$ de l'espace forment un système *lié* si l'un des vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des deux autres. Si un système n'est pas lié, on dit qu'il est *libre*. Alors tout vecteur de l'espace s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de ces trois vecteurs. On dit que le système est une *base* de l'espace.

Définition 6.2 : **Repère cartésien**
Un repère cartésien de l'espace est la donnée d'un point (l'origine du repère) et de trois vecteurs formant une base de l'espace. On note $\mathcal{R} = (\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ un tel repère. Si M est un point du plan, le vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ se décompose de façon unique sur les vecteurs de la base :

$$\overrightarrow{\Omega M} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}$$

On note $M\left|\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right._{\mathcal{R}}$ et on dit que les scalaires x,y,z sont les *coordonnées cartésiennes* du point M dans le repère $\mathcal{R}$.

Théorème 6.1 : **Formules de changement de repère**
Soient deux repères cartésiens $\mathcal{R} = (\Omega,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ et $\mathcal{R}' = (\Omega',\overrightarrow{e'_1},\overrightarrow{e'_2},\overrightarrow{e'_3})$ et un point M. On note :

$$M\left|\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right._{\mathcal{R}},\ M\left|\begin{matrix}x'\\y'\\z'\end{matrix}\right._{\mathcal{R}'},\ \Omega'\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{matrix}\right._{\mathcal{R}}$$

Alors les coordonnées du point M dans le repère $\mathcal{R}$ s'expriment en fonction des coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}'$ sous la forme :

$$\begin{cases} x &= \alpha + a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' \\ y &= \beta + a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' \\ z &= \gamma + a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' \end{cases}$$

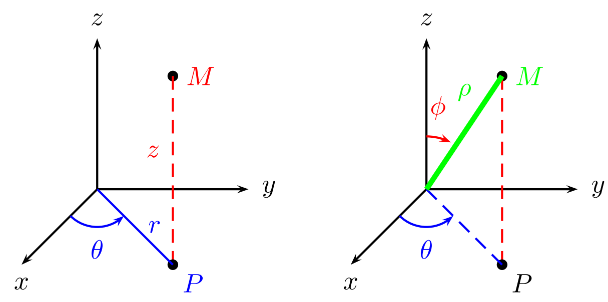
Remarque 42. Orientation de l'espace, angle entre vecteurs, angle entre droites.

Définition 6.3 : **Coordonnées cylindriques**

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

DÉFINITION 6.4 : **Coordonnées sphériques**

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$



(a) Coordonnées cylindriques

(b) Coordonnées sphériques

FIG. 6.1 – *Coordonnées cylindriques et sphériques*

6.2 Produit scalaire

DÉFINITION 6.5 : **Produit scalaire**
On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (x_1,y_1,z_1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (x_2,y_2,z_2)$ et on définit le produit scalaire de ces deux vecteurs par :

$$(\overrightarrow{u_1} \mid \overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

et on définit la *norme* d'un vecteur $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$ par

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

PROPOSITION 6.2 : **Propriétés du produit scalaire**

1. **bilinéarité :** soient trois vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$ et deux scalaires $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$:
   (a) $(\lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2}).\overrightarrow{u_3} = \lambda\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3} + \mu\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3}$
   (b) $\overrightarrow{u_1}.(\lambda\overrightarrow{u_2} + \mu\overrightarrow{u_3}) = \lambda\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} + \mu\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3}$
2. **symétrie :** Pour deux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_1}$.

Remarque 43. – On dit que deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul.
- On dit qu'un vecteur est unitaire lorsque sa norme vaut 1.
- On dit qu'une base est *orthonormale* lorsque les trois vecteurs de la base sont orthogonaux deux à deux et unitaires.
- On dit qu'un repère est *orthonormé* lorsque sa base est orthonormale.

PROPOSITION 6.3 : **Coordonnées d'un vecteur dans une bon**
Dans une base orthonormale $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$, un vecteur $\overrightarrow{x}$ se décompose sous la forme :

$$\overrightarrow{x} = (\overrightarrow{x}.\overrightarrow{e_1})e_1 + (\overrightarrow{x}.\overrightarrow{e_2})e_2 + (\overrightarrow{x}.\overrightarrow{e_3})e_3$$

PROPOSITION 6.4 : **Calcul du produit scalaire dans une bon**
Si $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ est une base orthonormale quelconque et si

$$\begin{cases} \overrightarrow{u} & = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3} \\ \overrightarrow{u'} & = x'\overrightarrow{e_1} + y'\overrightarrow{e_2} + z'\overrightarrow{e_3} \end{cases}$$

alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u'} = xx' + yy' + zz'$.

Définition 6.6 : **Distance entre deux points**
On définit la distance entre deux points A et B de l'espace par :

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Si $\mathcal{R}$ est un repère orthonormé et si $A\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}, B\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix}$,

$$d(A,B) = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$

6.3 Produit vectoriel

Lemme 6.5 : **Colinéarité de deux vecteurs**
Deux vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (x_1,y_1,z_1)$ et $\overrightarrow{u_2} = (x_2,y_2,z_2)$ sont colinéares si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Définition 6.7 : **Produit vectoriel**
On appelle *produit vectoriel* de deux vecteurs

$$\overrightarrow{u_1} = (x_1,y_1,z_1),\ \overrightarrow{u_2} = (x_2,y_2,z_2)$$

le vecteur

$$\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

Proposition 6.6 : **Propriétés du produit vectoriel**

1. le produit vectoriel est nul si et seulement si les vecteurs sont colinéaires.
2. le produit vectoriel est bilinéaire :
   - $\overrightarrow{u_1} \wedge (\lambda\overrightarrow{u_2} + \mu\overrightarrow{u_3}) = \lambda\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} + \mu\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_3}$
   - $(\lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{u_2}) \wedge \overrightarrow{u_3} = \lambda\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_3} + \mu\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{u_3}$
3. le produit vectoriel est antisymétrique : $\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{u_1} = -\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$,
4. le produit vectoriel est un vecteur orthogonal aux deux vecteurs : $\overrightarrow{u_1}.(\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{u_2}.(\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{0}$.
5. On a la formule du double produit vectoriel :

$$\boxed{\overrightarrow{u_1} \wedge (\overrightarrow{u_2} \wedge \overrightarrow{u_3}) = (\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3})\overrightarrow{u_2} - (\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2})\overrightarrow{u_3}}$$

6. Identité de Lagrange :

$$\|\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}\|^2 + (\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2})^2 = \|\overrightarrow{u_1}\|^2\|\overrightarrow{u_2}\|^2$$

Remarque 44.
1. D'après la formule de Lagrange, si $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont deux vecteurs non-nuls, il existe un unique $\theta \in [0,\pi]$ tel que

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} & = \|\overrightarrow{u_1}\|\|\overrightarrow{u_2}\|\cos\theta \\ \|\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}\| & = \|\overrightarrow{u_1}\|\|\overrightarrow{u_2}\|\sin\theta \end{cases}$$

   On appelle θ l'angle non-orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.
2. $\|\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}\|$ représente l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.
3. Soit une base orthonormale $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$. Comme $\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2}$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{e_1}$ et à $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} = \pm\overrightarrow{e_3}$. On dit que la base orthonormale est *directe* lorsque $\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3}$ et *indirecte* sinon. On dispose de la « règle du tire-bouchon » pour se représenter une base directe de l'espace.

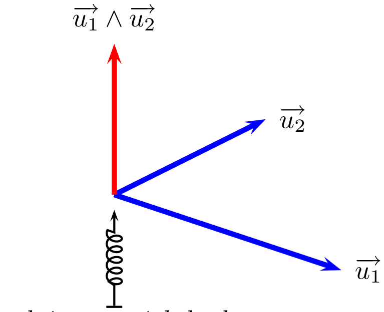


FIG. 6.2 – *Produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace*

PROPOSITION 6.7 : **Calcul du produit vectoriel dans une bon directe**
Si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ est une base orthonormale directe, et si $\overrightarrow{u_1} = x_1\overrightarrow{e_1} + y_1\overrightarrow{e_2} + z_1\overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{u_2} = x_2\overrightarrow{e_1} + y_2\overrightarrow{e_2} + z_2\overrightarrow{e_3}$, alors

$$\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}_{\mathcal{B}}$$

6.4 Déterminant, produit mixte

DÉFINITION 6.8 : **Produit mixte**
On appelle *produit mixte* (ou *déterminant*) de trois vecteurs, le réel :

$$\text{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}).\overrightarrow{w}$$

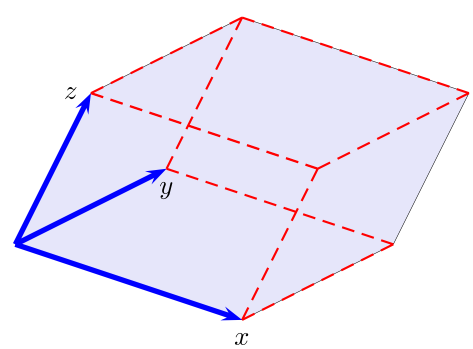


FIG. 6.3 – *Interprétation du produit mixte*

PROPOSITION 6.8 : **Propriétés du produit mixte**

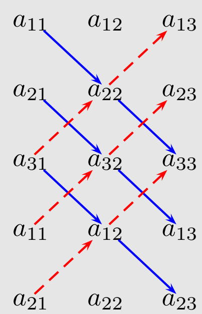
1. **trilinéarité :** le produit mixte est linéaire par rapport à chacun des vecteurs.
2. Si deux des trois vecteurs sont égaux, le produit mixte est nul.
3. **antisymétrie :** en permutant deux vecteurs, on change le produit mixte en son opposé.
4. **condition de coplanarité :** trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur produit mixte est nul.
5. **interprétation géométrique :** le produit mixte de trois vecteurs représente le volume algébrique du parallélogramme construit sur les trois vecteurs.

Proposition 6.9 : **Calcul du produit mixte dans une bon directe**
Si $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ est une base orthonormale directe, pour trois vecteurs

$$\overrightarrow{u_1}\left|\begin{matrix}x_1\\y_1\\z_1\end{matrix}\right., \ \overrightarrow{u_2}\left|\begin{matrix}x_2\\y_2\\z_2\end{matrix}\right., \ \overrightarrow{u_3}\left|\begin{matrix}x_3\\y_3\\z_3\end{matrix}\right.$$

$$\operatorname{Det}(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}) = \begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + y_1z_2x_3 + z_1x_2y_3 - z_1y_2x_3 - x_1z_2y_3 - y_1x_2z_3$$

On utilise la *règle de Sarrus* pour se souvenir de cette formule :



6.5 Droites et plans

Proposition 6.10 : **Représentation paramétrique d'une droite**
Soit $\mathcal{D}$ la droite affine passant par le point $M_0\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\\z_0\end{matrix}\right.$ et dirigée par le vecteur non-nul $\overrightarrow{u}\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{matrix}\right.$. Un point $M\left|\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right.$ appartient à cette droite si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{\begin{cases} x &= x_0 + \lambda\alpha \\ y &= y_0 + \lambda\beta \\ z &= z_0 + \lambda\gamma \end{cases}}$$

Proposition 6.11 : **Rerpésentation paramétrique d'un plan**
Soit $\mathcal{P}$ le plan affine passant par le point $M_0\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\\z_0\end{matrix}\right.$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}\left|\begin{matrix}\alpha_1\\\beta_1\\\gamma_1\end{matrix}\right.$, $\overrightarrow{u_2}\left|\begin{matrix}\alpha_2\\\beta_2\\\gamma_2\end{matrix}\right.$ non-colinéaires. Un point $M\left|\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right.$ appartient à ce plan si et seulement s'il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\boxed{\begin{cases} x &= x_0 + \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2 \\ y &= y_0 + \lambda\beta_1 + \mu\beta_2 \\ z &= z_0 + \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2 \end{cases}}$$

Proposition 6.12 : Équation carésienne d'un plan

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine passant par le point $A\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ et dirigé par les deux vecteurs non-colinéaires $\overrightarrow{u_1}\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{vmatrix}$, $\overrightarrow{u_2}\begin{vmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{vmatrix}$. Un point $M\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ appartient à ce plan si et seulement si :

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$$

ce qui donne une équation cartésienne de la forme :

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

Le plan vectoriel dirigeant $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne :

$$\boxed{ax + by + cz = 0}$$

(supprimer la constante dans les équations affines). Le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ est un vecteur orthogonal au plan $\mathcal{P}$.

Proposition 6.13 : Plan passant par trois points

Soient trois points $A_1\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}$, $A_2\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix}$ et $A_3\begin{vmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{vmatrix}$ non-alignés. Un point $M\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ appartient au plan passant par ces trois points si et seulement si $\mathrm{Det}(\overrightarrow{A_1M}, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}) = 0$ ce qui donne l'équation cartésienne de ce plan :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z - z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Proposition 6.14 : Plan passant par un point et normal à un vecteur

Soit un point $A\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ et un vecteur $\overrightarrow{n}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$. L'équation cartésienne du plan passant par A et normal à $\overrightarrow{n}$ est :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Proposition 6.15 : Deux plans perpendiculaires

Soient deux plans affines donnés par leur équation cartésienne :

$$\mathcal{P} : ax + by + cz = h$$

$$\mathcal{P}' : a'x + b'y + c'z = h'$$

Ces deux plans sont perpendiculaires si et seulement si :

$$\boxed{aa' + bb' + cc' = 0}$$

Proposition 6.16 : Équations cartésiennes d'une droite
Une droite affine peut être vue comme intersection de deux plans non-parallèles :

$$\boxed{\begin{cases} ax+by+cz+d &= 0 \\ a'x+b'y+c'z+d' &= 0 \end{cases}}$$

où un vecteur directeur de la droite est :

$$\overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{vmatrix} \neq \overrightarrow{0}$$

Remarque 45.
1. Il n'y a pas unicité des deux plans qui définissent une droite.
2. Une façon rapide d'obtenir une équation de droite consiste à éliminer le paramètre d'une équation paramétrique.
3. Les plans contenant la droite $\mathcal{D}$ ont pour équation cartésienne :

$$\mathcal{P}_\lambda (ax+by+cz+d) + \lambda(a'x+b'y+c'z+d') = 0$$

(sauf le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$). On appelle cette famille de plans le *faisceau de plans* issu de la droite $\mathcal{D}$.

Théorème 6.17 : Distance d'un point à un plan donné par son équation cartésienne
Soit un plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne :

$$\mathcal{P} \ : ax+by+cz+d = 0$$

et un point $M_0 \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$. La distance du point M_0 au plan $\mathcal{P}$ est donnée par la formule :

$$\boxed{d(M_0,\mathcal{P}) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Théorème 6.18 : Distance d'un point à un plan passant par trois points
Soit le plan affine $\mathcal{P}$ passant par trois points non-alignés A, B et C et un point M. La distance entre le point M et le plan $\mathcal{P}$ est donnée par :

$$\boxed{d(M,\mathcal{P}) = \frac{\left|\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\right|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}}$$

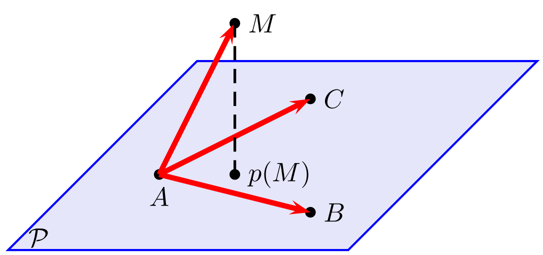


Fig. 6.4 – *Distance d'un point à un plan*

Théorème 6.19 : Distance d'un point à une droite
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par le point A dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ non-nul et un point M de l'espace. La distance du point M à la droite est donnée par la formule :

$$\boxed{d(M,\mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}}$$

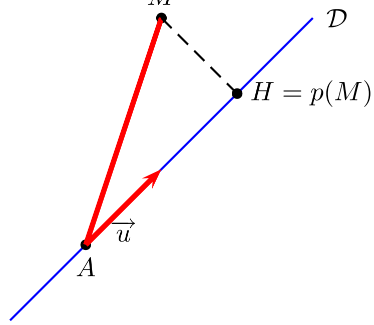


FIG. 6.5 – *Distance d'un point à une droite de l'espace*

PROPOSITION 6.20 : Équation normale d'un plan

Soit un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}\begin{vmatrix}a\\b\\c\end{vmatrix}$. Définissons la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \overrightarrow{u}.\overrightarrow{OM} \end{cases}$. Alors les lignes de niveau de la fonction f sont des plans affines :

$$f(M) = h \iff \boxed{ax + by + cz = h}, \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1$$

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ est un vecteur orthogonal à ce plan et $|h| = d(0,\mathcal{P})$.

6.6 Sphères

DÉFINITION 6.9 : Sphère

On appelle *sphère* de centre A et de rayon $R > 0$, l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $d(A,M) = R$.

PROPOSITION 6.21 : Équation d'une sphère

1. Dans un repère orthonormé d'origine A, la sphère a pour équation réduite $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = R^2}$.
2. Dans un repère orthonormé quelconque, l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0}$ est soit :
   - vide,
   - réduit à un point,
   - une sphère.

Remarque 46. On peut utiliser les coordonnées sphériques pour paramétrer une sphère de centre l'origine du repère :

$$\begin{cases} x &= R\cos\theta\sin\phi \\ y &= R\sin\theta\sin\phi \qquad \theta \in [0,\pi],\ \phi \in [-\pi,\pi] \\ z &= R\cos\phi \end{cases}$$

PROPOSITION 6.22 : Intersection d'un plan et d'une sphère

Soit une sphère $\mathcal{S}$ de centre A et de rayon R et un plan affine $\mathcal{P}$.

1. Si $d(A,\mathcal{P}) > R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \emptyset$,
2. Si $d(A,\mathcal{P}) = R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \{M_0\}$, (on dit que le plan est *tangent* à la sphère),
3. Si $d(A,\mathcal{P}) < R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}$ est un cercle de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2(A,\mathcal{P})}$ et de centre H, le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

PROPOSITION 6.23 : **Intersection d'une droite et d'une sphère**

Soit une sphère $\mathcal{S}$ de centre A et de rayon R et une droite affine $\mathcal{D}$.

1. Si $d(A,\mathcal{D}) > R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{D} = \emptyset$,
2. Si $d(A,\mathcal{D}) = R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{D} = \{M_0\}$, (on dit que la droite est *tangente* à la sphère),
3. Si $d(A,\mathcal{D}) < R$, $\mathcal{S} \cap \mathcal{D}$ est réduit aux deux points de la droite $\mathcal{D}$ situés à distance $\sqrt{R^2 - d^2(A,\mathcal{D})}$ du point H.

PROPOSITION 6.24 : **Intersection de deux sphères**

Soient deux sphères $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ non-concentriques, l'intersection de ces deux sphères peut être :

1. vide,
2. réduite à un point,
3. un cercle.

Chapitre 7

Courbes paramétrées

7.1 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

On considère un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction

$$\overrightarrow{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \big(x(t),y(t)\big) \end{array} \right.$$

Définition 7.1 : Limite d'une fonction vectorielle
Soit $\overrightarrow{l} = (l_1,l_2) \in \mathbb{R}^2$ et $t_0 \in I$. On dit que $\overrightarrow{F(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} \overrightarrow{l}$ lorsque $\|\overrightarrow{F(t)} - \overrightarrow{l}\| \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$.

Proposition 7.1 : Caractérisation par les fonctions coordonnées

$$\overrightarrow{F}(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} (l_1,l_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} l_1 \\ y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} l_2 \end{cases}$$

Définition 7.2 : Dérivée d'une fonction vectorielle
On dit qu'une fonction vectorielle $\overrightarrow{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \big(x(t),y(t)\big) \end{array} \right.$ est dérivable au point $t_0 \in I$ lorsqu'il existe $\overrightarrow{l} = (l_1,l_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\frac{\overrightarrow{F}(t) - \overrightarrow{F}(t_0)}{t - t_0} \xrightarrow[t \to t_0]{} \overrightarrow{l}$$

On note alors $\overrightarrow{l} = \overrightarrow{F}'(t_0)$.

Proposition 7.2 : Caractérisation par les fonctions coordonnées
La fonction $\overrightarrow{F}$ est dérivable en t_0 si et seulement si les deux fonctions réelles x et y sont dérivables en t_0 et alors $\overrightarrow{F}'(t_0) = \big((x'(t_0),y'(t_0)\big)$.

Théorème 7.3 : **Dérivation d'un produit scalaire et d'un déterminant**
On considère des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$:

$$\overrightarrow{F_1} : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x_1(t),y_1(t)) \end{array} \right. \quad , \quad \overrightarrow{F_2} : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x_2(t),y_2(t)) \end{array} \right.$$

On peut alors définir deux fonctions à valeurs réelles :

$$\phi(t) = \overrightarrow{F_1}(t).\overrightarrow{F_2}(t) = x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t)$$

$$\psi(t) = \mathrm{Det}\big(\overrightarrow{F}(t),\overrightarrow{G}(t)\big) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{vmatrix} = x_1y_2(t) - x_2(t)y_1(t)$$

Alors si $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ sont dérivables sur I, le produit scalaire et le déterminant précédent sont dérivables et $\forall t \in I$:

$$\phi'(t) = \overrightarrow{F}'(t).\overrightarrow{G}(t) + \overrightarrow{F}(t).\overrightarrow{G}'(t)$$

$$\psi'(t) = \mathrm{Det}\big(\overrightarrow{F}'(t),\overrightarrow{G}(t)\big) + \mathrm{Det}\big(\overrightarrow{F}(t),\overrightarrow{G}'(t)\big)$$

Théorème 7.4 : **Dérivation de la norme**
Soit une fonction vectorielle dérivable $\overrightarrow{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \big(x(t),y(t)\big) \end{array} \right.$ qui ne s'annule pas sur I. Alors la fonction norme :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \|\overrightarrow{F}(t)\| \end{array} \right.$$

est dérivable sur I et $\forall t \in I$,

$$\boxed{\phi'(t) = \frac{\overrightarrow{F}(t).\overrightarrow{F'}(t)}{\|\overrightarrow{F}(t)\|}}$$

7.2 Courbes paramétrées

Dans ce qui suit, on considère l'espace $E = \mathbb{R}^2$ euclidien orienté usuel.

Définition 7.3 : **Courbes paramétrées planes**
Soit $\overrightarrow{F} : I \mapsto \mathbb{R}^2$ une fonction à valeurs dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^k$. On appelle courbe paramétrée la donnée du couple $(I,\overrightarrow{F})$. L'ensemble des points $f(I)$ s'appelle le *support* de la courbe.

Remarque 47. Le point $M(t)$ du plan défini par la relation $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{F}(t)$ se déplace sur le support de la courbe. Sa vitesse instantanée à la date t est donnée par $\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{F'}(t)$ et son accélération par $\overrightarrow{F''}(t)$.

Définition 7.4 : **Point régulier, birégulier**
Le point $M(t)$ de la courbe est dit *régulier* lorsque $\overrightarrow{F'}(t) \neq 0$. Dans le cas contraire, on dit que $M(t)$ est un *point stationnaire*.

Définition 7.5 : **Tangente en un point d'une courbe paramétrée**
Soit $M(t_0)$ un point d'une courbe paramétrée $(I,\overrightarrow{F})$. On dit que la courbe possède une tangente au point $M(t_0)$ lorsqu'il existe une fonction vectorielle $t \mapsto \overrightarrow{u}(t)$ telle que :

1. $\forall t \neq t_0$, le vecteur $\overrightarrow{u}(t)$ dirige la droite $\big(M(t_0)M(t)\big)$;
2. $\overrightarrow{u}(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$. (limite *non-nulle*).

La droite passant par le point $M(t_0)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$ s'appelle alors la tangente à la courbe au point $M(t_0)$.

Théorème 7.5 : **Tangente en un point régulier**
Soit $M(t_0)$ un point régulier d'une courbe de classe $\mathcal{C}^1$, c'est à dire $\boxed{\overrightarrow{F'}(t_0) \neq 0}$. Alors la courbe possède une tangente au point $M(t_0)$ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{F'}(t_0)$.

Remarque 48. La courbe définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\overrightarrow{F}(t) = \begin{cases} (e^{-1/t^2}, 0) & \text{si } t > 0 \\ (0,0) & \text{si } t = 0 \\ (0, e^{-1/t^2}) & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais elle ne possède pas de tangente au point $M(0) = (0,0)$.

Remarque 49. Il se peut que $\overrightarrow{F'}(t_0) = \overrightarrow{0}$ et que la courbe admette une tangente en $M(t_0)$. Par exemple $\overrightarrow{F}(t) = (t^2, t^2)$. Nous verrons plus tard comment faire l'étude locale complète d'une courbe en un point stationnaire à l'aide des développements limités.

PROPOSITION 7.6 : **Tangente en un point stationnaire**
On considère un point $M(t_0)$ stationnaire d'une courbe $(I, \overrightarrow{F})$.

1. Si $\dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} \xrightarrow[t \to t_0]{} m \in \mathbb{R}$, la courbe admet en $M(t_0)$ une tangente de pente m.
2. Si $\left|\dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}\right| \xrightarrow[t \to t_0]{} +\infty$, la courbe admet en $M(t_0)$ une tangente verticale.

DÉFINITION 7.6 : **Branches infinies**
Soit $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que la courbe présente une *branche infinie* lorsque $t \to t_0$ si et seulement si $\|F(t)\| \xrightarrow[t \to t_0]{} +\infty$.

DÉFINITION 7.7 : **Droite asymptote**
Soit un arc paramétré $(I, \overrightarrow{F})$ et une droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. On dit que la droite $\mathcal{D}$ est *asymptote* à la courbe au voisinage de t_0 lorsque $d\big(M(t), \mathcal{D}\big) \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$. C'est équivalent à dire que

$$\boxed{ax(t) + by(t) + c \xrightarrow[t \to t_0]{} 0}$$

1. Si $x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} l \in \mathbb{R}$ et $y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \infty$, la droite $x = l$ est asymptote à la courbe et le signe de $x(t) - l$ (voir le tableau de variations) donne la position de la courbe par rapport à l'asymptote ;
2. Si $y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} l \in \mathbb{R}$ et $x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \infty$, la droite $y = l$ est asymptote à la courbe et le signe de $y(t) - l$ (voir le tableau de variations) donne la position de la courbe par rapport à l'asymptote ;
3. Si $x(t)$ et $y(t)$ tendent toutes les deux vers l'infini lorsque $t \to t_0$, on forme $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ et on cherche la limite de ce quotient lorsque $t \to t_0$. Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} a \in \mathbb{R}$, on forme ensuite $y(t) - ax(t)$ et si cette quantité tend vers une limite finie b, alors la droite $y = ax + b$ est asymptote à la courbe lorsque $t \to t_0$ et la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $y(t) - ax(t) - b$;
4. Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} \infty$, on dit que la courbe présente une *branche parabolique* (Oy) ;
5. Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$, on dit que la courbe présente une branche parabolique (Ox).

Exercice 7-1

Étudier les branches infinies de la courbe définie par

$$x(t) = \frac{t^3}{t^2 - 9}, \quad y(t) = \frac{t^2 - 2t}{t - 3}$$

7.3 Plan d'étude d'une courbe paramétrée

On considère une courbe paramétrée $\overrightarrow{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array} \right.$.

1. Domaine de définition de $x(t)$ et $y(t)$;

2. Réduction de l'intervalle d'étude. Que peut-on dire lorsque :
   - $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = y(t)$?
   - $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = y(t)$?
   - x et y sont T-périodiques ?
   - $x(t) = t + \dfrac{1}{t}, y(t) = t^2 + \dfrac{1}{t^2}$?
3. Variations de $x(t)$ et $y(t)$. On rassemble les résultats dans un même tableau ;
4. On repère dans le tableau les points stationnaires correspondant à $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$ et les branches infinies (lorsque l'une des fonctions a une limite infinie) ;
5. Etude des branches infinies ;
6. Tracé de la courbe: on représente avant tout les asymptotes, les points stationnaires, les points à tangente verticale et horizontale et on ébauche le tracé de la courbe.

Exercice 7-2

Étudier la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) &= 2t + \dfrac{1}{2t+1} \\ y(t) &= t^2 - \dfrac{1}{2t+1} \end{cases}$$

Exercice 7-3

Une roue de rayon R roule sans glisser sur une route. Déterminer la trajectoire d'un point de sa circonférence. Cette courbe s'appelle la *cycloïde*

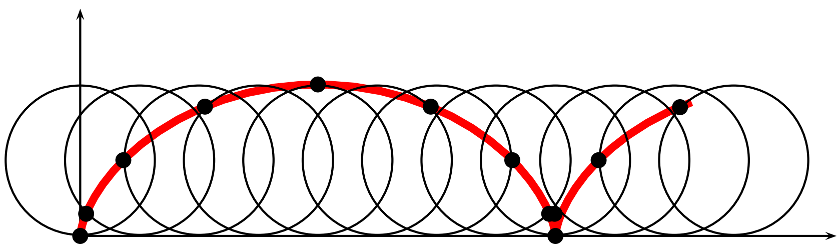


FIG. 7.1 – *Cycloïde*

Exercice 7-4

Tracer la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^2 t \end{cases}$$

Cette courbe s'appelle l'*astroïde*.

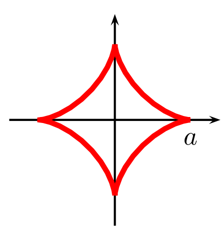


FIG. 7.2 – *Astroïde*

7.4 Courbes polaires.

On définit les fonctions vectorielles :

$$\overrightarrow{u}(\theta) = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}, \quad \overrightarrow{v}(\theta) = -\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \cos\theta\,\overrightarrow{j}$$

et on remarque que :
$$\frac{d\overrightarrow{u}}{d\theta} = \overrightarrow{v}, \quad \frac{d\overrightarrow{v}}{d\theta} = -\overrightarrow{u}$$
Le repère $\mathcal{R}_\theta = \big(O,\overrightarrow{u}(\theta),\overrightarrow{v}(\theta)\big)$ s'appelle le *repère polaire*.

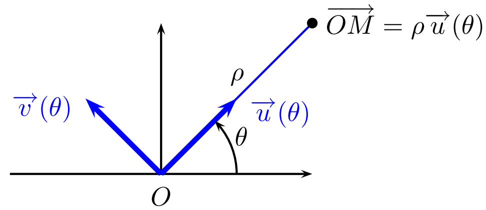


FIG. 7.3 – *Repère polaire :* $\mathcal{R}_\theta = (O,u(\theta),v(\theta))$

Étant données deux fonctions $\rho : I \mapsto \mathbb{R}$ et $\theta : I \mapsto \mathbb{R}$, on peut définir la courbe paramétrée $(I,\overrightarrow{f})$ par

$$\boxed{\overrightarrow{F}(t) = \rho(t)\overrightarrow{u}(\theta(t))}$$

PROPOSITION 7.7 : **Calcul de la vitesse et de l'accélération dans le repère polaire**

$$\overrightarrow{F'}(t) = \rho'(t)\overrightarrow{u}\big(\theta(t)\big) + \rho(t)\theta'(t)\overrightarrow{v}\big(\theta(t)\big)$$

$$\overrightarrow{F''}(t) = \big[\rho''(t) - \rho(t)\theta'^2(t)\big]\overrightarrow{u}\big(\theta(t)\big) + \big[2\rho'(t)\theta'(t) + \rho(t)\theta''(t)\big]\overrightarrow{v}\big(\theta(t)\big)$$

7.4.1 Etude d'une courbe $\rho = f(\theta)$.

On considère une courbe polaire
$$\rho = f(\theta)$$
où $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$, (avec $k \geq 2$). C'est l'ensemble des points du plan de coordonnées polaires (ρ,θ) liés par cette relation. Notre but est de tracer une telle courbe.

1. Une courbe polaire est une courbe paramétrée particulière : $\overrightarrow{F}(\theta) = \rho(\theta)\overrightarrow{u}(\theta)$,
$$\begin{cases} x(\theta) & = \rho(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) & = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

2. *Etude locale*
   - On exprime $\overrightarrow{F'}(\theta)$ dans la base $(\overrightarrow{u}(\theta),\overrightarrow{v}(\theta))$:
   $$\overrightarrow{F'}(\theta) = \rho'(\theta)\overrightarrow{u} + \rho(\theta)\overrightarrow{v}$$
   - Les points stationnaires ne peuvent correspondre qu'au passage au pôle. On obtient l'allure locale de la courbe en examinant le signe de ρ : un point stationnaire pour une courbe polaire ne peut être qu'un *point ordinaire* (ρ change de signe) ou un *rebroussement de première espèce* (ρ ne change pas de signe) ;
   - En un point différent de l'origine (donc régulier), si $V(\theta)$ est l'angle entre la droite $(OM(\theta))$ et la tangente à la courbe en $M(\theta)$, alors :
   $$\boxed{\tan V(\theta) = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}}$$

3. Etude des branches infinies :
   - Elles se produisent lorsque $\rho(\theta) \xrightarrow[\theta\to\theta_0]{} \infty$;
   - Si $\theta_0 = k\pi$, (Ox) est direction asymptotique. Il suffit d'étudier :
   $$y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$$
   - Si $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, il suffit d'étudier :
   $$x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta$$

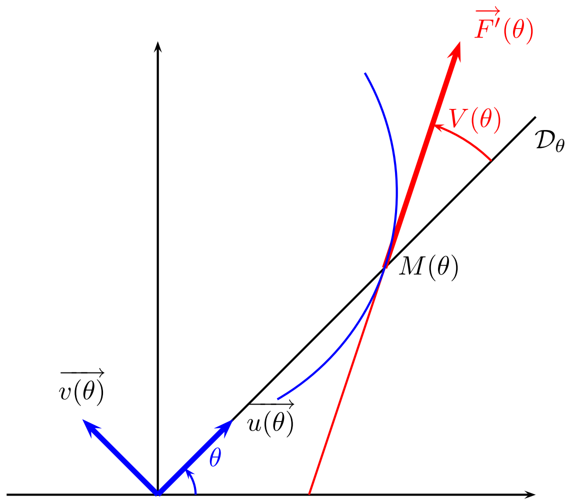


FIG. 7.4 – *L'angle* $V(\theta)$ *:* $\tan V(\theta) = \dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$

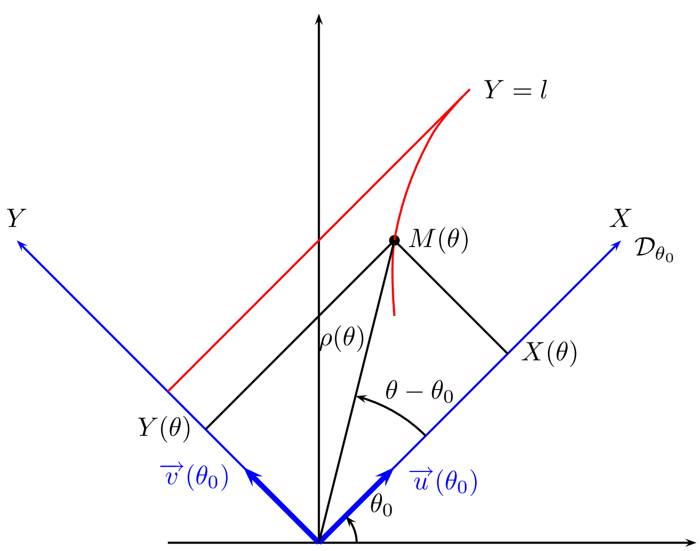


FIG. 7.5 – *Recherche d'asymptote :* $Y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0) \xrightarrow[\theta\to\theta_0]{} l$

– Sinon, on fait l'étude dans le repère polaire $(0, \overrightarrow{u}(\theta_0), \overrightarrow{v}(\theta_0))$:

$$Y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0)$$

4. Branches infinies spirales :
   – Si $\rho(\theta) \xrightarrow[\theta\to\infty]{} \infty$;
   – Si $\rho(\theta) \xrightarrow[\theta\to\infty]{} R$, on a un cercle ou un point asymptote ;
5. Il est important, avant de commencer l'étude d'une courbe polaire de réduire l'intervalle d'étude. Quelques exemples :
   – Si $\rho(\theta)$ est T périodique, avec $T = \dfrac{p}{q}2\pi$,
   – Si $\rho(-\theta) = \pm\rho(\theta)$,
   – Si $\rho(\theta_0 - \theta) = \pm\rho(\theta)$.

7.4.2 La cardioïde

C'est la courbe d'équation polaire

$$\rho = a(1 + \cos\theta) \quad (a > 0)$$

Question 1. Réduire l'intervalle d'étude, et étudier le signe de $\rho(\theta)$.

Question 2. Etudier le passage au pôle.

Question 3. Tracer la courbe en précisant la tangente en $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

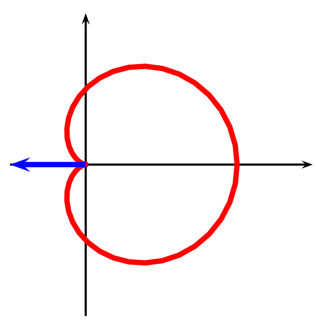


FIG. 7.6 – *Cardioïde*

7.4.3 La strophoïde droite

C'est la courbe polaire d'équation

$$\rho = a\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$$

Question 4. Déterminer le domaine de définition de $\rho(\theta)$ et son signe.

Question 5. Faire l'étude du passage au pôle, et des branches infinies.

Question 6. Tracer la courbe.

Remarque 50. Voir les sites web suivants :

`http://www.mathcurve.com/courbes2d/courbes2d.shtml`
`http://perso.wanadoo.fr/jpq/courbes/index.htm`
`http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html`
`http://mathworld.wolfram.com/`

pour les propriétés des courbes classiques avec des animations.

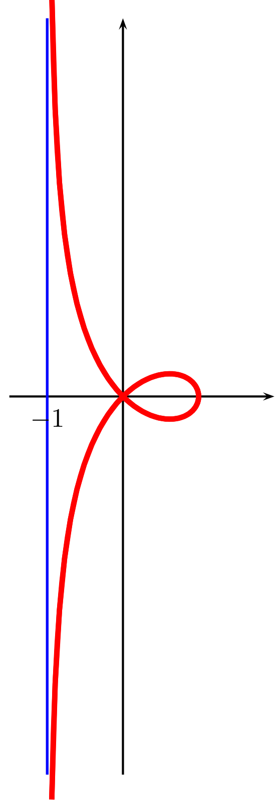


FIG. 7.7 – *Strophoïde droite*

7.5 Coniques

DÉFINITION 7.8 : **Coniques**
Soit $F \in \mathbb{R}^2$ un point et $\mathcal{D}$ une droite affine. Soit $e > 0$. On appelle *conique* de *foyer* F, de *directrice* $\mathcal{D}$ et d'*excentricité* e, la courbe $\mathcal{C}$ formée des points M du plan vérifiant :

$$d(F,M) = e \times d(M,\mathcal{D})$$

1. Si $0 < e < 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une *ellipse* ;
2. Si $e = 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une *parabole* ;
3. Si $e > 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une *hyperbole* ;

7.5.1 Équation polaire d'une conique

On se place dans le repère orthonormé $\mathcal{R} = (F, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ dans lequel l'équation de la directrice $\mathcal{D}$ est :

$$\mathcal{D} : x = \delta > 0$$

Un point M du plan est repéré par ses coordonnées polaires dans $\mathcal{R}$: $\overrightarrow{FM} = \rho \overrightarrow{u}$.

THÉORÈME 7.8 : **Equation polaire d'une conique**

$$M \in \mathcal{C} \iff \boxed{\rho = \frac{p}{1 + e\cos\theta}}$$

où $\boxed{p = e\delta}$ est le *paramètre* de la conique.

7.5.2 Equations cartésiennes réduites

On se place cette fois dans le repère $(F, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où $\overrightarrow{i}$ est choisi tel que l'équation de la directrice soit:

$$\mathcal{D} : \quad x = -\delta > 0$$

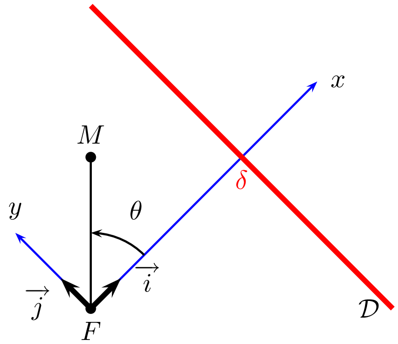


FIG. 7.8 – *Repère pour l'équation polaire d'une conique*

On effectue un changement de repère $\mathcal{R}'(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Le point O s'appelle le *centre* de la conique. On obtient alors les équations suivantes :

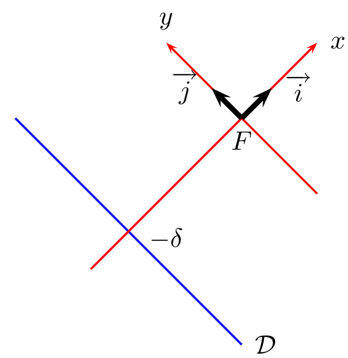


FIG. 7.9 – *Repère pour l'équation cartésienne d'une conique*

1. *Parabole* $e = 1$:

$$\boxed{F\left|\begin{array}{l}\frac{p}{2}\\0\end{array}\right.}, \quad \boxed{\mathcal{D} : x = -\frac{p}{2}}, \quad \boxed{\mathcal{C} : y^2 = 2px}$$

   Paramétrisation : $x(t) = \dfrac{t^2}{2p}$, $y(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$

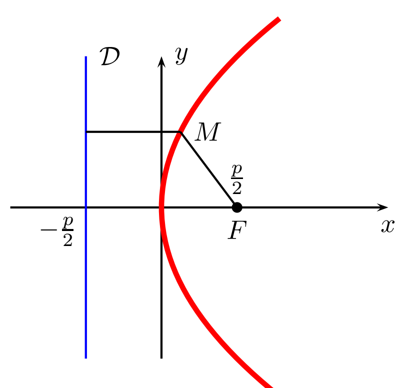


FIG. 7.10 – *Parabole* $y^2 = 2px$

2. *Ellipse*

$$\boxed{c^2 = a^2 - b^2}, \quad \boxed{e = \frac{c}{a}} \quad \boxed{F\begin{vmatrix}-c\\0\end{vmatrix}, F'\begin{vmatrix}c\\0\end{vmatrix}} \quad \boxed{\mathcal{D} : x = -\frac{a^2}{c},\ \mathcal{D}' : x = \frac{a^2}{c}} \quad \boxed{\mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Equation de la tangente en $M_0\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$:

$$\boxed{\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$$

Paramétrisation : $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin(t)$, $t \in [0,2\pi[$.

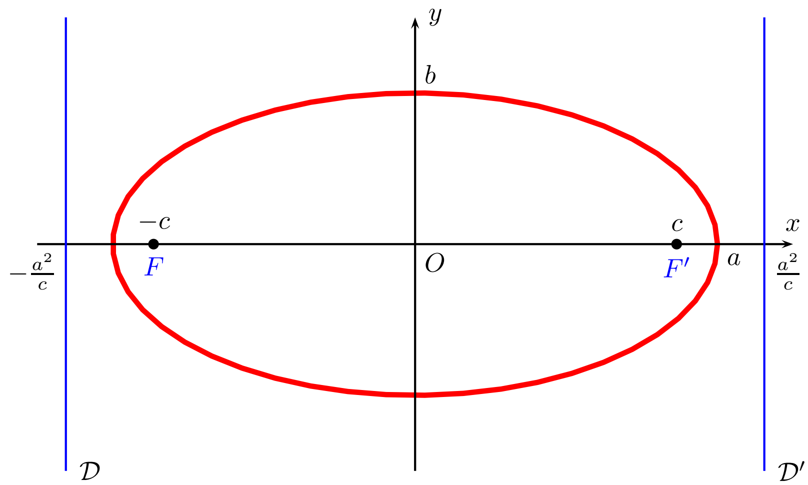


FIG. 7.11 – *Ellipse :* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

3. *Hyperbole* $e > 1$:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}, \quad \boxed{e = \frac{c}{a}} \quad \boxed{F\begin{vmatrix}-c\\0\end{vmatrix}, F'\begin{vmatrix}c\\0\end{vmatrix}} \quad \boxed{\mathcal{D} : x = -\frac{a^2}{c}, \mathcal{D}' : x = \frac{a^2}{c}} \quad \boxed{\mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Et les asymptotes ont pour équation :

$$\boxed{y = \frac{b}{a}x \quad y = -\frac{b}{a}x}$$

On dit que l'hyperbole est *équilatère* lorsque les asymptotes sont orthogonales, ie $a = b \iff e = \sqrt{2}$.
Equation de la tangente en un point $M_0\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$:

$$\boxed{\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$$

Paramétrisation d'une branche de l'hyperbole : $x(t) = a\,\mathrm{ch}\,t$, $y(t) = b\,\mathrm{sh}\,t$, $t \in \mathbb{R}$.

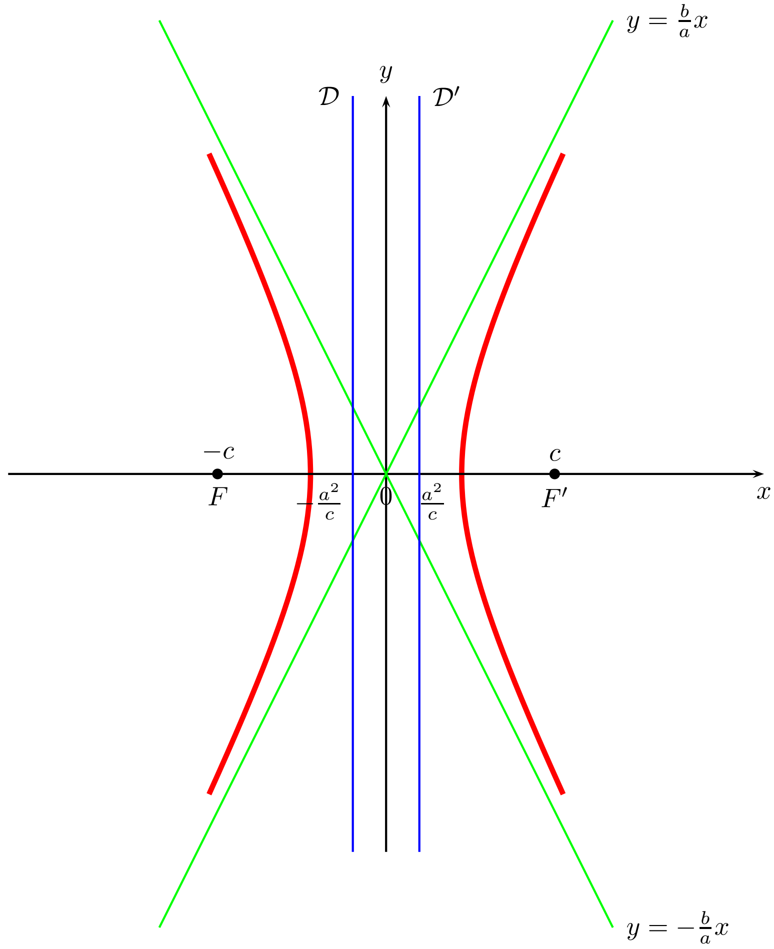


FIG. 7.12 – *Hyperbole* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Exercice 7-5

Soit une ellipse $\mathcal{E}$ de foyers F, F' et un point $M_0 \in \mathcal{E}$ différent des sommets.

a. Soit P l'intersection de la tangente en M_0 avec la directrice. Montrer que les droites (FM_0) et (FP) sont orthogonales.

b. Soit T l'intersection de la tangente en M_0 avec l'axe $(0x)$ et N l'intersection de la normale en M_0 avec l'axe $(0x)$. Montrer que

$$\overrightarrow{OT}.\overrightarrow{ON} = \|\overrightarrow{OF}\|^2$$

Exercice 7-6

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyers F,F' de directrice $\mathcal{D}$ et $M_0 \in \mathcal{H}$.

a) Soit P l'intersection de la tangente en M_0 avec $\mathcal{D}$. Montrer que les droites (FP) et FM_0 sont orthogonales.

b) Soit T l'intersection de la tangente en M_0 avec l'axe focal et N l'intersection de la normale en M_0 avec l'axe focal. Montrer que

$$< \overrightarrow{OT},\overrightarrow{ON} >= \|\overrightarrow{OF}\|^2$$

Théorème 7.9 : **Equations bifocales**

1. Pour une ellipse de foyers F et F' :

$$\boxed{M \in \mathcal{E} \iff d(F,M) + d(F',M) = 2a}$$

2. Pour une hyperbole de foyers F et F' :

$$\boxed{M \in \mathcal{H} \iff |d(F,M) - d(F',M)| = 2a}$$

Exercice 7-7

Soit une ellipse $\mathcal{E}$ de foyers F et F' et un point M de cette ellipse. Montrer que la bissectrice intérieure des droites (FM) et $(F'M)$ est la normale à l'ellipse au point M.

7.5.3 Courbes algébriques du second degré

On considère un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et l'ensemble $\mathcal{C}$ des points du plan :

$$\mathcal{C} = \{M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \mid P(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + +dx + ey + f = 0\}$$

avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

Définition 7.9 : **Discriminant**

On appelle *discriminant* de la courbe du second degré

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

le réel $\boxed{\Delta = ac - b^2}$.

Lemme 7.10 : **Élimination des termes linéaires**

On suppose que $\Delta \neq 0$. Il existe un repère $\mathcal{R}' = (\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que $M\left|\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}\right._{\mathcal{R}'}$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si :

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 = F$$

Théorème 7.11 : **Effet d'un changement de repère orthonormé**
On considère dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la courbe d'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = F$$

1. Si l'on effectue un changement de repère orthonormé, $\mathcal{R}' = (\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$, l'équation de la courbe devient :
$$AX^2 + 2BXY + CY^2 = F$$
avec
$$\begin{cases} \Delta' = AC - B^2 = ac - b^2 = \Delta \\ A + C = a + c \end{cases}$$
On remarque que le discriminant est indépendant du repère orthonormé.
2. Il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}' = (\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ dans lequel l'équation de $\mathcal{C}$ soit de la forme
$$AX^2 + CY^2 = F$$
avec
$$\begin{cases} A + C &= a + c \\ AC &= ac - b^2 = \Delta \end{cases}$$

Remarque 51. Les mêmes calculs (avec les termes linéaires) montrent que lorsque $\Delta = 0$, si $\mathcal{C} :\ ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, dans un autre repère orthonormé, l'équation devient $AX^2 + 2BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0$ avec également $\Delta' = AC - B^2 = 0$.

Théorème 7.12 : **Classification des courbes du second degré**
On considère une courbe du second degré d'équation

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

dans un repère orthonormé. On note $\Delta = ac - b^2$ son discriminant.
- Si $\Delta > 0$, la courbe $\mathcal{C}$ est une ellipse, un point ou l'ensemble vide.
- Si $\Delta < 0$, la courbe $\mathcal{C}$ est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes.
- Si $\Delta = 0$, la courbe $\mathcal{C}$ est une parabole, une droite, la réunion de deux droites parallèles ou l'ensemble vide.

Remarque 52. Le théorème précédent fournit un algorithme pour déterminer la nature de la courbe

$$\mathcal{C} :\ ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

et préciser son équation réduite :
1. Calculer le discriminant $\Delta = ac - b^2$ et $T = a + c$. Selon le signe de Δ, on peut sans calcul préciser le type de la courbe.
2. Si $\Delta \neq 0$, par un changement du centre du repère défini par les formules
$$\begin{cases} x &= X + \alpha \\ y &= Y + \beta \end{cases}$$
se débarrasser des termes linéaires en x et y pour aboutir à une équation :
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = F$$
Le centre du nouveau repère est $\Omega \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right._{\mathcal{R}}$.
3. On sait que l'on peut par rotation des axes se placer dans un repère orthonormé de même centre Ω où l'équation devient
$$Ax^2 + Cy^2 = F$$
4. On connaît la somme et le produit de A et C, et par conséquent, ils sont racines d'un trinôme.
5. Ayant déterminé A et C, on peut écrire l'équation réduite de la conique et discuter de sa nature en fonction du signe de F
6. Si l'on veut avoir toutes les informations, il faut déterminer l'angle θ de rotation choisi pour annuler le terme xy.

Exercice 7-8

On considère les courbes de $\mathbb{R}^2$ définies par les équations

a. $2x^2 + y^2 + 4x + 6y + 1 = 0$,

b. $xy = 4$,

c. $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$

Déterminer leur nature et préciser leurs éléments caractéristiques.

Chapitre 8

Les nombres réels

8.1 Valeur absolue, majorer, minorer.

On considère l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$, muni de l'ordre usuel $\leq$ et des opérations $+$, $\times$. On verra plus tard que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps.

Remarque 53. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note $x < y$ ssi $x \leq y$ et $x \neq y$. En analyse on préfère toujours travailler avec des inégalités larges et utiliser les inégalités strictes seulement lorsqu'elles sont nécessaires.

DÉFINITION 8.1 : **Valeur absolue, distance de deux points**
On définit pour un réel x sa valeur absolue :

$$|x| = \max(x, -x)$$

La quantité $\mathrm{d}(x,y) = |x - y|$ mesure la distance entre deux réels x et y.

THÉORÈME 8.1 : **Inégalité triangulaire**

- $|xy| = |x|.|y|$
- $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).

THÉORÈME 8.2 : **Quelques inégalités classiques**

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\sin x| \leq |x|$$

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x$$

$$\forall x > -1, \quad \ln(1 + x) \leq x$$

Exercice 8-1

a) Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

b) Pour $x \in [2,3]$, encadrer $f(x) = \dfrac{x - 1}{e^x + 1}$

c) On considère la suite de terme général $u_n = \dfrac{n^3 + n^2}{n^2 + 1}$. La majorer et la minorer à partir d'un certain rang par des suites de la forme cn.

d) Majorer $\dfrac{n + 1}{3^{n^2 - n}}$ par une suite de la forme $\dfrac{c}{n}$ à partir d'un certain rang.

e) Montrer que la suite de terme général $u_n = \sqrt{n^2 + n + 2} - \sqrt{n^2 + 1}$ est majorée.

f) Majorer pour $x \in \mathbb{R}$, la quantité $\left|\dfrac{\sin x - 2\cos x}{e^{\sin x}}\right|$.

Définition 8.2 : Droite réelle achevée
On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, et l'on étend la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty < x < +\infty$$

Définition 8.3 : Segments
Soient deux réels $a < b$. On appelle *segment* $[a,b]$, la partie de $\mathbb{R}$ définie par

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

Définition 8.4 : Intervalles
Soit une partie non-vide de $\mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$. On dit que cette partie I est un intervalle lorsque

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad x < y \Rightarrow [x,y] \subset I$$

où

$$[x,y] = \{z \in \mathbb{R} \text{ tq } x \leq z \leq y\}$$

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont de la forme $[a,b]$,$]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$ où a et b peuvent être infinis. On note quelquefois (a,b) pour désigner un intervalle quelconque.

Remarque 54. Un segment est un intervalle fermé et borné. Nous verrons plusieurs théorèmes valables sur les intervalles ou les segments, donc ne pas confondre ces deux notions.

Définition 8.5 : Partie entière
Soit un réel $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$n \leq x < n+1$$

On note cet entier $n = E(x)$ ou $n = \lfloor x \rfloor$.

Théorème 8.3 : Encadrement d'un réel
Soit $\alpha > 0$ un réel strictement positif. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! k \in \mathbb{Z} \mid k\alpha \leq x < (k+1)\alpha$$

Une autre façon de citer ce résultat : tout nombre réel x s'écrit de manière unique sous la forme $x = k\alpha + y$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq y < \alpha$.

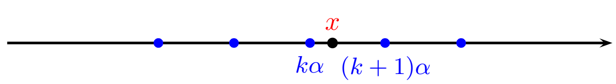


Fig. 8.1 – *Congruence d'un réel*

Définition 8.6 : Valeurs décimales approchées
Soit un réel x, et un entier naturel $n \geq 1$. Si p est un entier relatif tel que

$$\frac{p}{10^n} \leq x \leq \frac{p+1}{10^n}$$

on dit que $\frac{p}{10^n}$ est une valeur décimale approchée de x par défaut à la précision 10^{-n}, et que $\frac{p+1}{10^n}$ est une valeur décimale approchée de x par excès à la précision 10^{-n}.

Définition 8.7 : Densité
Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. On dit que la partie A est dense dans B lorsque

$$\forall x \in B, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \ \text{ tel que } |x-a| \leq \varepsilon$$

Théorème 8.4 : **$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$**
Si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ alors $I \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, ou de façon équivalente, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists r \in \mathbb{Q} \text{ tq } |x - r| \leq \varepsilon$$

Théorème 8.5 : **Le complémentaire de $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$**

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ tq } |x - \theta| \leq \varepsilon$$

Remarque 55. On en déduit qu'entre deux réels il existe toujours un rationnel (irrationnel) :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \text{ tq } a < b,\ \exists r \in \mathbb{Q} \text{ avec } a < r < b$$

8.2 Borne supérieure

On considère dans ce qui suit une partie $A \subset \mathbb{R}$.

Définition 8.8 : **Majorants, minorants d'une partie**

1. Un réel $M \in \mathbb{R}$ est un *majorant* de la partie A ssi tout élément de A est inférieur à M :

$$\forall x \in A,\ x \leq M$$

2. Un réel $m \in \mathbb{R}$ est un *minorant* de la partie A ssi tout élément de A est supérieur à m :

$$\forall x \in A,\ x \geq m$$

Définition 8.9 : **Parties bornées**
Soit une partie $A \subset \mathbb{R}$. On dit qu'elle est bornée si et seulement si $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in A$, $|x| \leq M$. C'est équivalent à dire que la partie A est majorée et minorée.

Définition 8.10 : **Plus grand, plus petit élément d'une partie**

1. Un réel $a \in \mathbb{R}$ est un *plus grand élément* de A ssi $a \in A$ et tout élément de A est inférieur à a :

$$\forall x \in A, x \leq a$$

S'il existe, le plus grand élément est unique et on le note

$$\boxed{a = \max A}$$

2. Un réel $b \in \mathbb{R}$ est un *plus petit élément* de A ssi $b \in A$ et tout élément de A est supérieur à b :

$$\forall x \in A, x \geq b$$

S'il existe, le plus petit élément est unique et on le note

$$\boxed{b = \min A}$$

Définition 8.11 : **Borne supérieure, inférieure d'une partie**

1. Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément a, alors on dit que a est la *borne supérieure* de A. Dans ce cas, a est unique et l'on note

$$\boxed{a = \sup A}$$

2. Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément b, alors on dit que b est la *borne inférieure* de A. Dans ce cas, b est unique et l'on note

$$\boxed{b = \inf A}$$

`Exemple 12.` Déterminer s'ils existent le plus grand (petit) élément, la borne sup (inf) des parties suivantes :
- $A = [0,1]$
- $A = [0,1[$
- $A = \{1/n;\ n \in \mathbb{N}^*\}$

Exercice 8-2

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide. On suppose qu'elle possède un plus grand élément $a \in A$. Montrer qu'alors $\sup A = a$.

THÉORÈME 8.6 : Caractérisation de la borne sup par ϵ

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors on a l'équivalence :

(H1) $a = \sup A$

(H2)
1. a est un majorant de la partie A : $\forall x \in A, x \leq a$;
2. $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_\epsilon \in A$ tel que $a - \epsilon \leq x_\epsilon \leq a$.

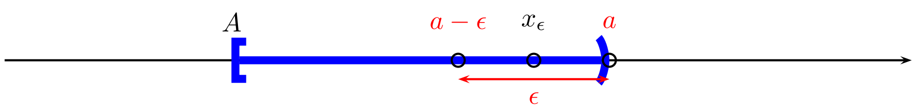


FIG. 8.2 – *Caractérisation de la borne supérieure*

Exercice 8-3

Ecrire le théorème correspondant pour la borne inférieure et le démontrer.

L'ensemble des réels possède la propriété fondamentale suivante que l'on admettra :

THÉORÈME 8.7 : Propriété de la borne sup.

Soit une partie de $\mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$. Si

(H1) A est non-vide,

(H2) A est majorée,

alors la partie A admet une borne supérieure.

Remarque 56. On a la propriété équivalente pour la borne inférieure : toute partie non-vide de $\mathbb{R}$ et minorée possède une borne inférieure.

Remarque 57. Cette propriété distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$. En effet, la partie

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$$

n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

DÉFINITION 8.12 : Borne sup. d'une fonction

Soit $D \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \mapsto \mathbb{R}$ une application. On considère la partie de $\mathbb{R}$ définie par $A = f(D)$.

On dit que f possède une borne supérieure ssi A possède une borne supérieure. On la note alors

$$\boxed{a = \sup_{x \in D} f(x)}$$

THÉORÈME 8.8 : Caractérisation de la borne sup. d'une fonction

On caractérise $a = \sup_{x \in D} f(x)$ par les propriétés :

(H1) f est majorée par a : $\forall x \in D$, $f(x) \leq a$;

(H2) $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_\epsilon \in D$ tel que $a - \epsilon \leq f(x_\epsilon) \leq a$.

Raisonnement de passage à la borne supérieure.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non-vide. Si $\forall x \in A$, $x \leq M$, alors $\sup A \leq M$

Exercice 8-4

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ deux parties non-vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrez que

$$A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$$

Exercice 8-5

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f,g : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions bornées. Montrez que

$$\sup_{x\in I}|(f+g)(x)| \leq \sup_{x\in I}|f(x)| + \sup_{x\in I}|g(x)|$$

A-t-on égalité en général ?

Exercice 8-6

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées. On note

$$A+B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \exists (a,b) \in A \times B, x = a+b\}$$

Montrez que $A+B$ possède une borne supérieure et que

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B$$

Chapitre 9

Suites réelles

9.1 Définitions

DÉFINITION 9.1 : **Suite**
Une suite réelle est une application $u : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ (on dira qu'une application définie à partir d'un certain rang n_0 est aussi une suite). On note cette application sous forme indicielle :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ou } (u_n)$$

On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles.

Remarque 58. Attention aux notations : (u_n) désigne une suite : $(u_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors que u_n désigne un terme de la suite : $u_n \in \mathbb{R}$.

On adoptera une des visualisation suivantes pour une suite :

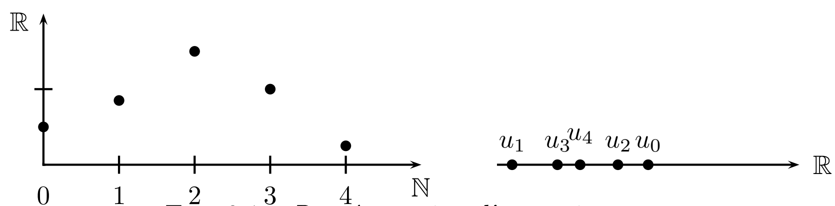


FIG. 9.1 – *Représentation d'une suite*

DÉFINITION 9.2 : **Opérations sur les suites**
On définit les lois suivantes sur l'ensemble des suites :
- Addition : $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$;
- Multiplication par un réel : $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$;
- Multiplication de deux suites : $(u_n).(v_n) = (u_n.v_n)$.

DÉFINITION 9.3 : **Suites bornées**
On dit qu'une suite (u_n) est majorée ssi $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
On dit qu'une suite (u_n) est minorée ssi $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$.
On dit qu'une suite et bornée ssi elle est majorée et minorée.

DÉFINITION 9.4 : **Suites monotones**
On dit qu'une suite (u_n) est croissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.
On dit qu'une suite (u_n) est décroissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
On dit qu'une suite (u_n) est monotone ssi elle est croissante ou décroissante.

DÉFINITION 9.5 : **À partir d'un certain rang**
On dit qu'une propriété $p(n)$ est vérifiée à partir d'un certain rang si et seulement si $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, la propriété $p(n)$ est vraie.

9.2 Limite d'une suite

Définition 9.6 : Limite, suite convergente, suite divergente
On dit que la suite (u_n) converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$ lorsque

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tq } \ \forall n \geq N,\ |u_n - l| \leq \varepsilon}$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ou encore $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.
S'il existe un réel l tel que la suite converge vers l, on dit que la suite est *convergente*.
S'il n'existe pas de réel l vérifiant la propriété ci-dessus, on dit que la suite *diverge*.

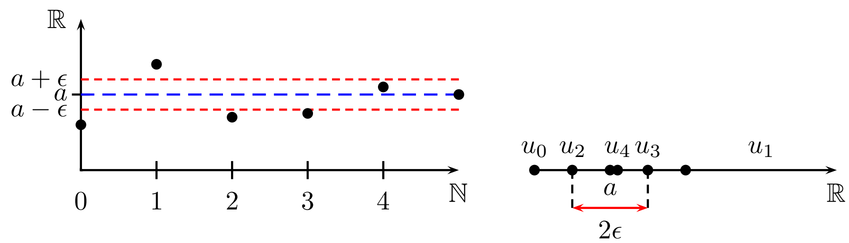


Fig. 9.2 – *Convergence d'une suite*

Pour montrer que $u_n \to l$, on utilise le plan :
1. *Soit* $\varepsilon > 0$.
2. *Posons* $N = \ldots$.
3. Vérifions : *Soit* $n \geq N$.
4. On a bien $|u_n - l| \leq \varepsilon$
5. Donc $u_n \to l$.

`Exemple 13.` Montrer en utilisant la définition que la suite $(1/n)$ converge vers 0.
Remarque 59. La limite d'une suite est un *nombre réel indépendant de n*. Ecrire par exemple

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{n}$$

n'a absolument aucun sens !
Remarque 60. On peut étendre la notion de limite d'une suite à $\overline{\mathbb{R}}$ (on dit que (u_n) *diverge* vers $+\infty$ ou $-\infty$) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tq } \forall n \geq N,\ u_n \geq A}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tq } \forall n \geq N,\ u_n \leq A}$$

Pour montrer que $u_n \to +\infty$, on utilise le plan :
1. *Soit* $A > 0$.
2. *Posons* $N = \ldots$.
3. Vérifions: *Soit* $n \geq N$.
4. On a bien $u_n \geq A$.

Exercice 9-1
Montrez en utilisant la définition que la suite $(\sqrt{n})$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 9-2

- Trouver une suite divergente qui ne tend pas vers $\pm\infty$;
- Trouver une suite non-bornée qui ne diverge pas vers $\pm\infty$.

– Trouver une suite convergente qui n'est pas monotone ;

THÉORÈME 9.1 : **On peut utiliser une inégalité stricte dans la définition**

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - l| < \varepsilon$$

Exercice 9-3

Ecrire à l'aide de quantificateurs les propriétés :

a) (u_n) ne converge pas vers $l \in \mathbb{R}$;

b) (u_n) ne diverge pas vers $+\infty$;

c) (u_n) diverge.

THÉORÈME 9.2 : **Unicité de la limite**
La limite d'une suite si elle existe est unique.

THÉORÈME 9.3 : **Une suite convergente est bornée.**
Si $\exists l \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, alors

$$\exists M > 0 \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$$

THÉORÈME 9.4 : **Une suite convergeant vers un réel strictement positif est positive à partir d'un certain rang**
Soit une suite (u_n) qui converge vers une limite $l > 0$. Alors cette suite est à termes positifs à partir d'un certain rang. Plus généralement, si une suite (u_n) converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$, pour tous réels $k < l < k'$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow k \leq u_n \leq k'$$

THÉORÈME 9.5 : **Passage à la limite dans les inégalités**
Soit deux suites (u_n) et (v_n). On suppose que

- H1 $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang ;
- H2 $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'$.

Alors on a $l \leq l'$.

Remarque 61. Même si l'on a des inégalités strictes dans 1 , on ne peut obtenir que des inégalités larges après passage à la limite, (penser aux suites de termes généraux $u_n = 1/n$ et $v_n = 2/n$)

THÉORÈME 9.6 : **Théorème de majoration**
Soit (u_n) une suite et un réel $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite (α_n) et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que :

- H1 $\forall n \geq N,\ |u_n - l| \leq \alpha_n$.
- H2 $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

Remarque 62. Ce théorème est très utilisé en pratique pour montrer la convergence d'une suite lorsqu'on devine sa limite.

`Exemple 14.` Montrer que les suites de terme général $u_n = 1/2^n$ et $v_n = 2^n/n!$ convergent vers 0.

THÉORÈME 9.7 : **Théorème des gendarmes**
On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que :

- H1 $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang ;
- H2 les deux suites encadrantes (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite l ;

alors la suite (u_n) converge vers l.
De même, si

- H1 $v_n \leq u_n$ (à partir d'un certain rang) ;
- H2 $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$;

alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Remarque 63. Le raisonnement suivant est faux.

- A partir d'un certain rang, $\alpha_n \le u_n \le \beta_n$.
- $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, $\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

Par passage à la limite dans les inégalités, on en déduit que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$. En effet, pour appliquer le passage à la limite dans les inégalités, il faut déjà avoir montré que (u_n) converge. Le théorème des gendarmes, lui par contre, garantit la convergence de (u_n).

Conclusion : utilisez *correctement* les théorèmes du cours avec leurs hypothèses exactes.

Remarque 64. En pratique, pour montrer la convergence d'une suite vers une limite on utilise le théorème de majoration ou le théorème des gendarmes. On ne revient à la définition que lorsque c'est absolument nécessaire.

Exercice 9-4

Étudiez la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^3+k^2}$$

Exercice 9-5

On considère la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, comparez $\dfrac{1}{k}$ avec $\int_k^{k+1} \dfrac{dt}{t}$ et $\int_{k-1}^{k} \dfrac{dt}{t}$

b) Montrez que $\dfrac{S_n}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

9.3 Théorèmes généraux sur les suites

Théorème 9.8 : **Théorèmes généraux**

Soit (u_n) une suite convergeant vers $l \in \mathbb{R}$ et (v_n) une suite convergeant vers $l' \in \mathbb{R}$. Alors

1. la suite $(|u_n|)$ converge vers $|l|$;
2. la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $l + l'$;
3. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite (λu_n) converge vers λl ;
4. la suite $(u_n v_n)$ converge vers ll' ;
5. Si $l' \neq 0$, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\dfrac{l}{l'}$.

Exercice 9-6

Étudiez la suite de terme général $u_n = \dfrac{2n^2+n-1}{3n^2+1}$.

Exercice 9-7

Soit (u_n) une suite bornée et une suite (v_n) qui diverge vers $+\infty$. Montrez que

$$u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Exercice 9-8

Si (u_n) converge et (v_n) diverge, montrer que $(u_n + v_n)$ diverge.

9.4 Suites et séries géométriques

Théorème 9.9 : **Convergence des suites géométriques**
Soit $k \in \mathbb{R}$. On appelle *suite géométrique* de raison k, la suite définie par

$$\boxed{u_n = k^n}$$

Elle vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = k u_n$.

1. Si $|k| < 1$, alors la suite (u_n) converge vers 0 ;
2. Si $|k| > 1$, alors la suite (u_n) diverge ($|u_n| \to +\infty$) ;
3. Si $k = 1$, la suite (u_n) est constante et converge vers 1 ;
4. Si $k = -1$, la suite (u_n) diverge.

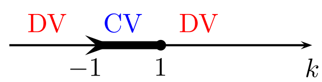


Fig. 9.3 – *Convergence des suites géométriques*

Définition 9.7 : **Série géométrique**
Soit un réel $k \in \mathbb{R}$. On définit la progression géométrique (ou série géométrique) de raison k. C'est la suite de terme général

$$S_n = 1 + k + \cdots + k^n = \sum_{i=0}^{n} k^i$$

Théorème 9.10 : **Convergence d'une série géométrique**
On calcule explicitement le terme général S_n :

$$\boxed{S_n = \begin{cases} \dfrac{1-k^{n+1}}{1-k} & \text{si } k \neq 1 \\ (n+1) & \text{si } k = 1 \end{cases}}$$

On obtient alors la convergence de la suite (S_n) :
Si $|k| < 1$, alors la suite (S_n) converge vers le réel $\dfrac{1}{1-k}$.
Si $|k| \geq 1$, alors la suite (S_n) diverge.

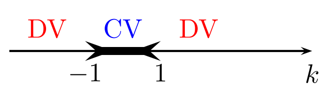


Fig. 9.4 – *Convergence des séries géométriques*

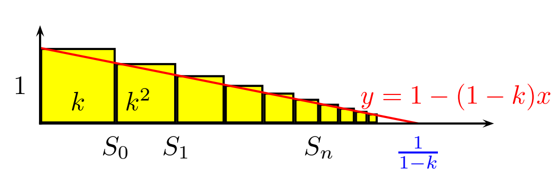


Fig. 9.5 – *Convergence d'une série géométrique ($|k| < 1$)*

Remarque 65. Les suites et séries géométriques sont très utilisées en analyse. On essaie souvent de majorer des suites par des suites géométriques dont on connaît bien le comportement.

9.5 Suites extraites

DÉFINITION 9.8 : Suite extraite
On dit qu'une suite (v_n) est une suite extraite d'une suite (u_n) s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ *strictement croissante* telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

`Exemple 15.` les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont extraites de la suite (u_n).

LEMME 9.11 :
Si $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

THÉORÈME 9.12 : Une suite extraite d'une suite convergente est convergente
Toute suite extraite d'une suite convergeant vers une limite a est une suite convergeant vers a.

COROLLAIRE 9.13 : Pour montrer qu'une suite diverge
Soit une suite (u_n). On suppose qu'il existe deux suites extraites (v_n) et (w_n) de (u_n) telles que

- H1 (v_n) converge vers a ;
- H2 (w_n) converge vers b ;
- H3 $a \neq b$.

Alors la suite (u_n) est divergente

Exercice 9-9
Montrez que la suite de terme général $u_n = (-1)^n$, est une suite divergente.

THÉORÈME 9.14 :
Soit une suite (u_n). On suppose que les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. Alors la suite (u_n) converge vers l.

Exercice 9-10
On considère une suite $(u_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrez que la suite (u_n) est convergente.

9.6 Suites monotones

THÉORÈME 9.15 : Théorème de la limite monotone
Soit (u_n) une suite *croissante*. On a les deux possibilités suivantes :

1. Si (u_n) est majorée, alors (u_n) converge vers une limite finie ;
2. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

Remarque 66. Si (u_n) est croissante et majorée, elle converge vers la borne sup. des valeurs de (u_n) :

$$l = \sup\{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$$

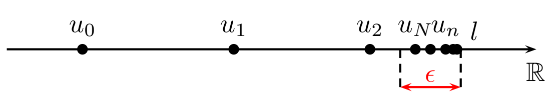


FIG. 9.6 – *Théorème de la limite monotone*

DÉFINITION 9.9 : suites adjacentes
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit qu'elles sont *adjacentes* ssi

1. les deux suites sont monotones de sens contraire ;
2. La suite $(d_n) = (v_n - u_n)$ converge vers 0.

THÉORÈME 9.16 : Convergence des suites adjacentes
Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.

Remarque 67. Les théorèmes précédents permettent de montrer qu'une suite converge, même sans deviner sa limite !

Exercice 9-11

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. Étudier alors la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Exercice 9-12

Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}$$

Exercice 9-13

On définit la suite (S_n) par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k}$$

1. Calculer S_0, S_1, S_2, S_3 ;
2. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (S_n) converge ;
3. Si l est la limite de (S_n), majorer l'erreur $e_n = |S_n - l|$ en fonction de n ;
4. On décide de prendre la valeur S_n ($n \in \mathbb{N}$) comme valeur approchée de l à 10^{-2} près. En effet, grâce à une calculatrice, on calcule facilement S_n. Quelle valeur de n prendre ?

Exercice 9-14

Soit les suites de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

1. Montrez que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Montrez que leur limite commune est un nombre irrationnel (c'est le nombre de Neper $e = exp(1)$).

COROLLAIRE 9.17 : **Théorème des segments emboîtés**

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments : $I_n = [a_n, b_n]$ tels que

- H1 Ils sont emboîtés : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$;
- H2 Leur diamètre tend vers 0 : $(b_n - a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors il existe un réel $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{l\}$$

THÉORÈME 9.18 : **Théorème de Bolzano-Weierstrass**

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

COROLLAIRE 9.19 :

Soit un segment $[a,b]$ et une suite (x_n) de points de ce segment. Alors il existe une suite extraite de la suite (x_n) qui converge vers un point $l \in [a,b]$.

Remarque 68. Vous verrez l'année prochaine la notion plus générale de partie *compacte* de $\mathbb{R}^n$. Les segments de $\mathbb{R}$ sont des parties compactes car fermées et bornées.

9.7 Etude de suites récurrentes.

Soit une fonction continue $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. On peut définir une suite (u_n) par la donnée de son premier terme u_0 et d'une relation de récurrence de la forme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Remarque 69. On peut représenter graphiquement la suite (u_n) en utilisant des ricochets sur la première bissectrice.

Remarque 70. On verra plus tard que si la suite (u_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, alors forcément $\boxed{l = f(l)}$. Il est donc essentiel de chercher les *points fixes* de f (graphiquement les intersections du graphe de f avec la première bissectrice.

Exercice 9-15

Lorsque

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{x^2+1} \end{cases}$$

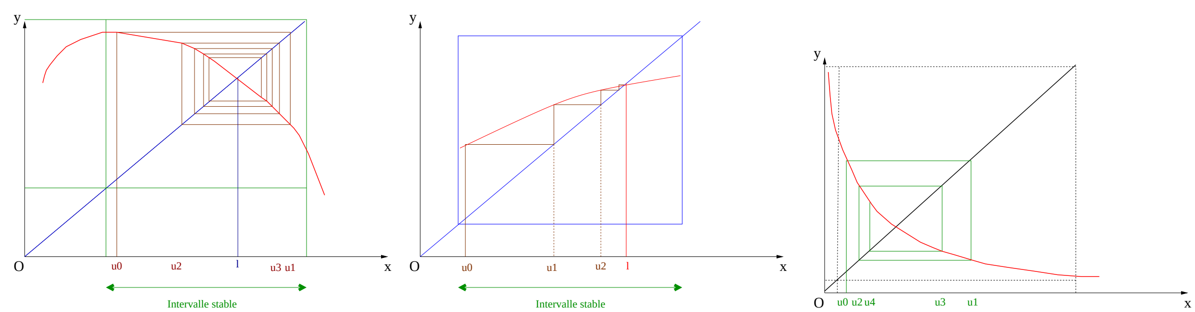
montrer que si (u_n) converge vers l, alors nécessairement $l = f(l)$.

DÉFINITION 9.10 : intervalles stables
Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que J est stable par f ssi $f(J) \subset J$.

THÉORÈME 9.20 : La suite reste dans J
Si J est un intervalle *stable*, et $u_0 \in J$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$.

L'étude d'une suite récurrente générale est très difficile et fait même l'objet de certaines recherches de nos jours ! Par contre, nous savons étudier une telle suite dans deux cas particuliers :

1. f est *croissante* sur un intervalle *stable* I et $u_0 \in I$;
2. f est *décroissante* sur un intervalle *stable* J avec $u_0 \in J$.



(a) Intervalle stable

(b) f croissante sur un intervalle stable

(c) f décroissante sur un intervalle stable

FIG. 9.7 – *Suites récurrentes*

9.7.1 La fonction f est croissante sur un intervalle stable

THÉORÈME 9.21 : (u_n) est monotone
Lorsque f est croissante sur un intervalle stable J et $u_0 \in J$, alors (u_n) est monotone :

1. Si $u_0 \le f(u_0)$, alors (u_n) est croissante ;
2. Si $f(u_0) \le u_0$, alors (u_n) est décroissante.

Ce théorème et le théorème de la limite monotone permettent de conclure sur la nature de la suite (u_n).

Remarque 71. Il est intéressant d'introduire la fonction

$$\theta(x) = f(x) - x$$

et de dresser son tableau de signe :

- Les zéros de θ sont les points fixes de f ;
- Le signe de $\theta(u_0)$ dit si (u_n) et croissante ou décroissante.

Remarque 72. Il est très important de s'inspirer du graphique pour deviner le comportement de la suite avant de démontrer quoi que ce soit.

Exercice 9-16

Soit un réel positif $u_0 \ge 0$. Étudier en fonction de u_0 la suite récurrente définie par

$$u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}$$

Exercice 9-17

Soit $u_0 \geq 0$. Étudier la suite récurrente définie par

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n^2+1}$$

9.7.2 La fonction f est décroissante sur un intervalle stable

Ce cas est plus compliqué, mais si l'on remarque que les deux suites extraites

$$(v_n) = (u_{2n}), \quad (w_n) = (u_{2n+1})$$

vérifient la relation de récurrence

$$v_0 = u_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f \circ f(v_n)$$

$$w_0 = u_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = f \circ f(w_n)$$

et que la fonction $g = f \circ f$ est *croissante*, on se ramène alors au cas précédent. Les suites (v_n) et (w_n) sont monotones de sens contraire. Si ces deux suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite l, alors la suite (u_n) converge vers cette même limite l. Sinon, la suite (u_n) diverge.

Exercice 9-18

Étudier la suite définie par $u_0 \in [0,1]$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 - u_n^2$$

9.7.3 Quelques relations de récurrences classiques

Suites arithmétiques

THÉORÈME 9.22 : **Suites arithmétiques**
On considère une suite de réels (u_n) vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \, u_{n+1} = u_n + a$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, il existe un réel $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = C + an$.

Suites géométriques

THÉORÈME 9.23 : **Suites géométriques**
On considère une suite de réels (u_n) vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \, u_{n+1} = ku_n$$

où $k \in \mathbb{R}$. Alors, il existe un réel $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = Ck^n$.

Suites arithmético-géométriques

THÉORÈME 9.24 : **Suites arithmético-géométriques**
On considère une suite de réels (u_n) vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \, u_{n+1} = ku_n + a$$

où $k \neq 1$ et $a \neq 0$. Alors, il existe deux réels $C_1 \in \mathbb{R}$ et $C_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = C_1 + C_2 k^n$.

Remarque 73. Pour résoudre une récurrence arithmético-géométrique, commencer par trouver un point fixe $\alpha = k\alpha + a$ et introduire la suite $(v_n) = (u_n - a)$, qui vérifie une récurrence géométrique.

Exercice 9-19

On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 2^n$$

Déterminez pour $n \in \mathbb{N}$, u_n.

Exercice 9-20

On considère un réel $a > 0$ et la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\Big(u_n + \dfrac{a}{u_n}\Big) \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et qu'elle converge vers $\sqrt{a}$.
2. On note $e_n = |u_n - \sqrt{a}|$ l'erreur commise en approximant $\sqrt{a}$ par u_n. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$e_{n+1} \leq C e_n^2$$
On dit que la convergence est *quadratique*.
3. Si u_n est une valeur approchée de $\sqrt{a}$ à 10^{-p} près, que peut-on dire de u_{n+1} ?
4. On prend $a = 2$ et $u_0 \geq \sqrt{2}$ tel que $u_0 - \sqrt{2} \leq 1$. Majorer explicitement e_n en fonction de n. Quelle valeur de n suffit-il de choisir pour que u_n soit une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-p} près ?

9.8 Suites complexes

Définition 9.11 : **Convergence d'une suite de complexes**
On dit qu'une suite de nombres complexes (z_n) converge vers un nombre complexe $a \in \mathbb{C}$ si et seulement si la suite réelle $|z_n - a|$ converge vers 0.
On dit que la suite (z_n) diverge vers l'infini lorsque la suite réelle $|z_n|$ diverge vers $+\infty$.

Remarque 74. Une autre façon de dire que $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$:

$$\forall r > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N,\ z_n \in D(a,r)$$

Remarque 75. Toutes les propriétés démontrées sur les suites réelles *ne faisant pas intervenir d'inégalités* sont encore valables pour les suites complexes (les démonstrations n'utilisent que l'inégalité triangulaire). En particulier, on a les théorèmes généraux sur les sommes, produits, quotients, l'unicité de la limite, une suite convergente est bornée. On ne dispose plus par contre du passage à la limite dans les inégalités, du théorème de la limite monotone, ni du théorème des gendarmes. Le théorème suivant permet de montrer qu'une suite de complexes converge vers une limite.

Théorème 9.25 : **Théorème de majoration**
Soit (z_n) une suite de complexes et $a \in \mathbb{C}$. Si (α_n) est une suite de réels vérifiant :

1. $|z_n - a| \leq \alpha_n$ à partir d'un certain rang ;
2. $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;

Alors $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Une autre façon d'étudier une suite complexe consiste à étudier deux suites réelles :

Théorème 9.26 : **La convergence d'une suite complexe correspond à la convergence des parties réelles et imaginaires**

$$\Big(z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a\Big) \iff \left(\begin{cases} \mathrm{Re}(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Re}(a) \\ \mathrm{Im}(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Im}(a) \end{cases}\right)$$

THÉORÈME 9.27 : **Suites géométriques complexes**
Soit un nombre complexe $k \in \mathbb{C}$. On appelle *suite géométrique* de raison k, la suite définie par $z_n = k^n$. Elle vérifie la relation de récurrence $z_{n+1} = kz_n$.

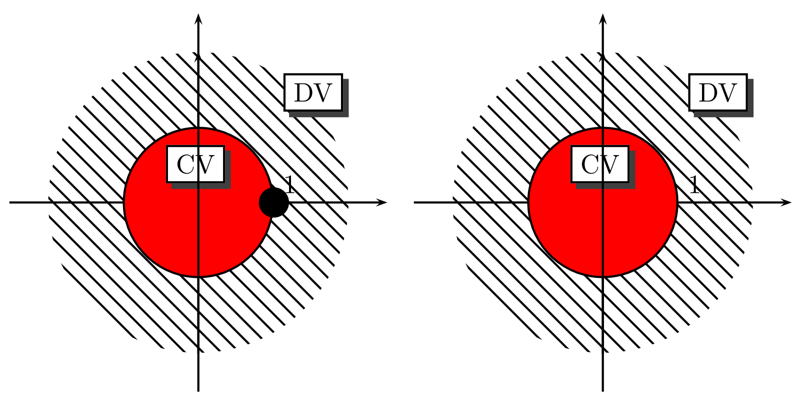
1. $|k| < 1 \Rightarrow (z_n)$ converge vers 0.
2. $|k| \geq 1$ et $z \neq 1 \Rightarrow (z_n)$ diverge.
3. $k = 1 \Rightarrow (z_n)$ est constante et vaut 1.

Remarque 76. Pour montrer la divergence lorsque $|k| = 1$ et $k \neq 1$, on utilise la relation $z_{n+1} = kz_n$.

THÉORÈME 9.28 : **Séries géométriques complexes**
On appelle série géométrique de raison k, la suite complexe définie par :

$$S_n = 1 + k + \cdots + k^n = \sum_{i=0}^{n} k^i$$

1. $|k| < 1 \Rightarrow S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1}{1-k}$
2. $|k| \geq 1 \Rightarrow (S_n)$ diverge.



(a) Convergence d'une suite géométrique complexe

(b) Convergence d'une série géométrique complexe

FIG. 9.8 – *Suites et séries géométriques complexe*

9.9 Relations de comparaison

DÉFINITION 9.12 : **Notations de Landau** Soient deux suites (u_n) et (v_n). On dit que

– la suite (u_n) est *négligeable* devant la suite (v_n) et l'on note $u_n = o(v_n)$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N,\ |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

si la suite (v_n) ne s'annule pas, c'est équivalent à dire que

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

– la suite (u_n) est *dominée* par la suite (v_n) et l'on note $u_n = O(v_n)$ lorsque

$$\exists M > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N,\ |u_n| \leq M |v_n|$$

si la suite (v_n) ne s'annule pas, c'est équivalent à dire que la suite (u_n/v_n) est bornée.

DÉFINITION 9.13 : Suites équivalentes
On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes lorsque

$$u_n - v_n = o(v_n)$$

Lorsque la suite (v_n) ne s'annule pas, cela revient à dire que :

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Pour montrer que $u_n \sim v_n$, on montre que :
$\dfrac{u_n}{v_n} \to 1$
ou que $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \to 0$
ou alors que $u_n = v_n + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n = o(v_n)$.

Remarque 77. Attention, ne jamais écrire $u_n \sim 0$. Cela signifie en fait que la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang.

`Exemple 16.` $u_n = \dfrac{a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1}n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0} \sim \dfrac{a_p}{b_q} n^{p-q}$ (si $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$).

THÉORÈME 9.29 : Produit, quotient d'équivalents
Soient quatre suites (u_n), (a_n) et (v_n), (b_n) vérifiant $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim b_n$ alors

1. $u_n v_n \sim a_n b_n$;
2. $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{a_n}{b_n}$ (si v_n et b_n ne s'annulent pas) ;
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $u_n^\alpha \sim a_n^\alpha$ (pour des suites à termes positifs).

Remarque 78. Dans le théorème précédent, le réel α ne dépend pas de n.
`Exemple 17.` $u_n = n^3 + n$, $v_n = -n^3 + n^2$, $u_n \sim n^3$, $v_n \sim -n^3$, $(u_n + v_n) \sim n^2$
`Exemple 18.` $u_n = n^2 + n$, $v_n = n^2$. On a $u_n \sim v_n$ mais $e^{u_n} \not\sim e^{v_n}$
`Exemple 19.` $u_n = 1 + 1/n$, $v_n = 1$, $u_n \sim v_n$ mais $\ln u_n \not\sim \ln v_n$.

On peut prendre des produits-quotients d'équivalents, mais ne jamais prendre de somme, d'exponentielle ou de logarithme d'équivalents

THÉORÈME 9.30 : Equivalents et limite

1. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$;
2. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ et $\boxed{l \neq 0}$, alors $u_n \sim l$.

THÉORÈME 9.31 : Un équivalent simple permet d'obtenir le signe d'une suite
Si deux suites sont équivalentes : $u_n \sim v_n$ alors, à partir d'un certain rang, les termes des deux suites ont même signe :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \quad u_n \times v_n \geq 0$$

THÉORÈME 9.32 : Comparaison logarithmique

1. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites à termes strictement positifs et si, à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ alors $u_n = O(v_n)$.
2. Si (u_n) est une suite à termes positifs,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l < 1 \Rightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l > 1 \Rightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

THÉORÈME 9.33 : comparaison des suites usuelles
Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $k > 1$ alors

$$\boxed{(\ln n)^\beta = o(n^\alpha) \quad n^\alpha = o(k^n) \quad k^n = o(n!)}$$

Remarque 79. Montrez d'abord $a_n = \dfrac{k^n}{n!} \to 0$, et former $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Ensuite, $b_n = \dfrac{n^\alpha}{k^n} \to 0$, former $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

$$c_n = \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = \left(\frac{\ln n}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\ln n^{\frac{\alpha}{\beta}}}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta$$

Un équivalent simple s'écrit comme un *produit-quotient* de suites de références. Par exemple,

$$\frac{\sqrt{2\pi n}}{2^{n^2}}, \ \frac{n^3 \ln^2 n}{3^n}, \dots$$

Par contre, les suites à gauche suivantes ne sont pas des équivalents simples, il faut chercher des équivalents plus simples. :

$$\frac{1}{\pi(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi n}, \ e^{n^2+n+1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n^2} \times e^n, \ \ln(n^2+n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln n$$

On ne peut pas supprimer les constantes multiplicatives dans les équivalents !

$$2(n^2+n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n^2, \ \frac{\pi n^2 + 3n}{4\times 3^n - 2\times 2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{4}\frac{n^2}{3^n}$$

Exercice 9-21

Trouvez un équivalent simple des suites de terme général

1. $\dfrac{e^n + n!}{n+1}$;
2. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
3. $\dfrac{e^n + e^{-n} + n}{\sqrt{n^2+n} - n}$;
4. $\dfrac{\ln n + n!}{n^2 + (n+1)!}$;
5. $e^{n^2+n!+\frac{1}{n}}$;
6. $\ln(n^2 + 3^n) - \ln(5n^2 + 4^n)$.

Nous admettons pour l'instant les équivalents classiques suivants :

THÉORÈME 9.34 : **Equivalents usuels**

Soit (u_n) une suite telle que $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$. Alors

1. $\sin u_n \sim u_n$
2. $\tan u_n \sim u_n$
3. $\ln(1+u_n) \sim u_n$
4. $[1 - \cos u_n] \sim \dfrac{u_n^2}{2}$
5. $[e^{u_n} - 1] \sim u_n$
6. $[(1+u_n)^\alpha - 1] \sim \alpha u_n$ $(\alpha \in \mathbb{R}^*)$

Remarque 80. $\cos\frac{1}{n} \sim 1$, $\cos\frac{1}{n} \sim 1 + \frac{1}{n}$, $\cos\frac{1}{n} \sim 1 - \frac{1}{n^2} \dots$ C'est vrai, mais seul le terme principal 1 joue un rôle !

Lorsqu'une suite se présente sous la forme

$$u_n = a_n^{b_n}$$

l'écrire sous la forme

$$u_n = e^{b_n \ln(a_n)}$$

Exercice 9-22

Trouvez la limite des suites de terme général $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ et $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Remarque 81. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $u_n^{v_n}$ ne tend pas forcément vers 1: c'est une forme indéterminée 1^∞ !

Exercice 9-23

Etudiez les suites de terme général

1. $\sin[\tan(\ln(n+1) - \ln n)]$;
2. $\left(\cos \dfrac{1}{n}\right)^{n^4 \sin \frac{1}{n^2}}$;
3. $\dfrac{\sqrt{\cos \frac{1}{n}} - 1}{\ln(n+1) - \ln n}$;
4. $\dfrac{e^{\sin \frac{1}{n^2}} - \sqrt{1 + e^{-n}}}{1 - \cos e^{-n}} \ln\left(\cos \frac{1}{n}\right)$.

9.9.1 Recherche pratique d'équivalents

Recherche d'un équivalent d'une somme

Si $u_n = a_n + b_n$, avec $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

1. Chercher un équivalent simple des suites (a_n) et (b_n) : $a_n \sim \alpha_n$ et $b_n \sim \beta_n$;
2. (a) Si les deux équivalents ne sont pas du même ordre de grandeur, par exemple $\alpha_n = o(\beta_n)$, montrer que $a_n = o(b_n)$ en formant le quotient a_n/b_n. Alors $u_n \sim b_n \sim \beta_n$.
   (b) Si les deux équivalents sont « comparables », et si formellement $\alpha_n + \beta_n \neq 0$, montrer que $u_n \sim (\alpha_n + \beta_n)$ en formant le quotient $u_n/(\alpha_n + \beta_n)$.
   (c) Si la somme formelle des équivalents vaut 0, réécrire u_n en essayant de faire apparaître les équivalents usuels.

Exercice 9-24

Trouver un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = \ln(1 + 1/n^2) + \sin(1/n)$$

Exercice 9-25

Trouver un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = \ln(1 + 1/n) + \sin(2/n)$$

Exercice 9-26

Trouver un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = \sqrt{\cos(1/n)} - e^{\sin(1/n^2)}$$

Exercice 9-27

Trouver un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = \cos\Big(\ln\big(\big(1 + \sin(1/n)\big)\big)\Big) - e^{\sin(1/n)}$$

Recherche d'un équivalent d'un logarithme

Si $u_n = \ln(v_n)$, avec $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}}$,

1. Si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l > 0$ avec $l \neq 1$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(l) \neq 0$ et donc $u_n \sim \ln(l)$;
2. Si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ou alors si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$, et si $v_n \sim \beta_n$, montrer que $u_n \sim \ln(\beta_n)$;
3. Si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, écrire
$$u_n = \ln\big(1 + (v_n - 1)\big)$$
et utiliser l'équivalent usuel du logarithme.

Exercice 9-28

Trouver un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = \ln(n^2 + 2^n)$$

Exercice 9-29

Trouver un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = \ln(n^2 + 3) - \ln(n^2 + 1/n)$$

Exercice 9-30

Trouver un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = \ln\Big(\frac{en^2 + 1}{n^2 + n}\Big) - \cos(1/n)$$

Chapitre 10

Fonctions d'une variable réelle

10.1 Vocabulaire

On suppose que les fonctions qui interviennent ici sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 10.1 : **Opérations sur les fonctions**
Dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ on définit les lois suivantes :

- Addition : si $(f,g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$, on définit l'application $(f+g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ par :
$$\forall x \in I, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
- Multiplication par un réel : si $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit l'application (λf) par :
$$\forall x \in I, \quad (\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$$
- Multiplication de deux fonctions : si $(f,g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$, on définit l'application $(fg) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ par :
$$\forall x \in I, \quad (fg)(x) = f(x) \times g(x)$$
- Valeur absolue d'une fonction : si $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on définit l'application $(|f|) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ par :
$$\forall x \in I, \quad |f|(x) = |f(x)|$$
- Minimum, maximum de deux fonctions : si $(f,g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$, on définit les deux applications $(\max(f,g), \min(f,g)) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$ par :
$$\forall x \in I, \quad \sup(f,g)(x) = \max\{f(x),g(x)\}$$
$$\forall x \in I, \quad \inf(f,g)(x) = \min\{f(x),g(x)\}$$

DÉFINITION 10.2 : **Fonctions bornées**

- On dit qu'une fonction f est majorée si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in I,\ f(x) \leq M$.
- On dit qu'une fonction f est minorée si et seulement si $\exists m \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in I,\ f(x) \geq m$.
- On dit qu'une fonction est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

PROPOSITION 10.1 : **Pour montrer qu'une fonction est bornée, il suffit de la majorer en valeur absolue**
Une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si
$$\exists M > 0\ \forall x \in I,\ |f(x)| \leq M$$

Définition 10.3 : **Voisinage d'un point de I**

- Soit un réel $a \in \mathbb{R}$. On appelle *voisinage du point* a, une partie $V \subset \mathbb{R}$ telle que $\exists \alpha > 0$, $]a-\alpha, a+\alpha[\subset V$. On note $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des voisinages du point a ;
- Une partie $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ si et seulement si il existe $A > 0$ tel que $]A, +\infty[\subset V$.
- Une partie $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $-\infty$ si et seulement si il existe $B < 0$ tel que $]-\infty, B[\subset V$.

Définition 10.4 : **Adhérence d'une partie**
Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On dit que le point x est *adhérent* à la partie A si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A \text{ tq } |x-a| \leq \varepsilon$$

On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A.

Remarque 82. Lorsque A est un intervalle, les points adhérents à A sont les éléments de A et les extrémités de l'intervalle.

Définition 10.5 : **Extremum**
On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un maximum de f si et seulement si il existe $a \in I$ tel que $f(a) = M$ et si, pour tout x de I, $f(x) \leq f(a)$ (on dit aussi que f présente en a un maximum). On définit de même un minimum et on parlera d'extremum lorsqu'on aura un maximum ou un minimum. On notera :

$$M = \max_{x \in I} f(x)$$

$$m = \min_{x \in I} f(x)$$

Définition 10.6 : **Extremum local**
On dit que $M = f(a)$ est un extremum local de f si et seulement si il existe un voisinage V de a tel que la restriction de f à ce voisinage présente en a un extremum.

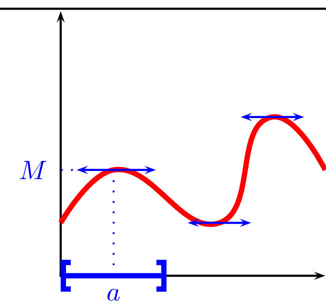


Fig. 10.1 – *Extrémas locaux*

Définition 10.7 : **Fonctions monotones**
On dit que f est croissante sur I si et seulement si $\forall (x,y) \in I^2$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
On dit que f est décroissante sur I si et seulement si $\forall (x,y) \in I^2$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
On dit que f est monotone si et seulement si elle est croissante ou décroissante.
On dit que f est *strictement* croissante sur I si et seulement si $\forall (x,y) \in I^2$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
On dit que f est *strictement* décroissante sur I si et seulement si $\forall (x,y) \in I^2$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

Proposition 10.2 : **Règle des signes**
Si $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $g : J \mapsto \mathbb{R}$ sont monotones, et si $f(I) \subset J$, on peut définir $f \circ g : I \mapsto \mathbb{R}$. Alors $g \circ f$ est monotone et l'on a la règle des signes pour la monotonie de $g \circ f$:

f	g	$g \circ f$
$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Définition 10.8 : **Fonctions paires, impaires**
Soit un intervalle I symétrique par rapport à 0. On dit que f est *paire* si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad f(-x) = f(x)$$

et que f est *impaire* si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad f(-x) = -f(x)$$

Définition 10.9 : **Fonctions périodiques**
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique si et seulement si

$$\exists T > 0, \quad \forall x \in I, \quad f(x+T) = f(x)$$

Définition 10.10 : **Fonctions lipschitziennes** [a]
Une fonction f est lipschitzienne sur une partie I si et seulement si

$$\boxed{\exists k > 0 \text{ tq } \forall (x,y) \in I^2, \ \big|f(x) - f(y)\big| \leq k|x-y|}$$

[a] Rudolf Lipschitz (14/05/1832 – 07/10/1903), Allemand. A contribué à plusieurs branches des mathématiques : fonctions de Bessel, séries de Fourier, géométrie Riemannienne, mécanique. . .

Proposition 10.3 : **Composée de fonctions lipschitziennes**
Si f et g sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}$, alors $f \circ g$ l'est aussi.

Exercice 10-1
Montrer que si f est lipschitzienne sur $[a,b]$ et $[b,c]$ alors f est lipschitzienne sur $[a,c]$.

Exercice 10-2
Soit une fonction f lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Montrez qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x)| \leq a|x| + b$$

10.2 Étude locale d'une fonction

Définition 10.11 : **Limite d'une fonction**
Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, un point $a \in \overline{I}$ (éventuellement infini), et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
On dit que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$ si et seulement si :

$$\forall W \in \mathcal{V}_l \ \exists V \in \mathcal{V}_a \ \text{ tq } \ f(I \cap V) \subset W$$

Lorsque $a \in \mathbb{R}$ est fini, et la limite $l \in \mathbb{R}$ est finie, cette définition se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \ \text{ tq } \ \forall x \in I, |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Lorsqu'un tel l existe, on dit que l est la *limite* de f en a et l'on note alors

$$l = \lim_{x \to a} f(x)$$

Remarque 83. Voici quelques traductions de la définition de limite :

$$\big(f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty\big) \iff \big(\forall B < 0, \exists \ A > 0 \ \text{ tq } \ \forall x \in I, x \geq A \Rightarrow f(x) \leq B\big)$$

$$\big(f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} l\big) \iff \big(\forall \varepsilon > 0, \exists \ B < 0 \ \text{ tq } \ \forall x \in I, x \leq B \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon\big)$$

Remarque 84. On peut utiliser des inégalités strictes dans la définition de la limite.

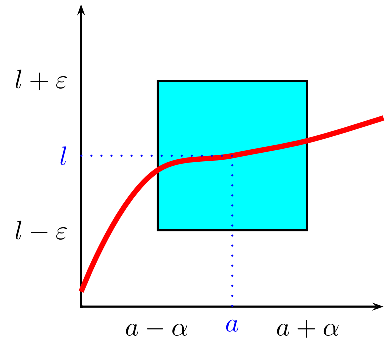


FIG. 10.2 – *Limite d'une fonction*

DÉFINITION 10.12 : **Continuité en un point**
Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et un point $a \in I$. On dit que la fonction f est *continue* au point $a \in I$ lorsque

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$$

Avec des quantificateurs :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tq } \forall x \in I,\ |x-a| \le \alpha \Rightarrow |f(x)-f(a)| \le \varepsilon}$$

DÉFINITION 10.13 : **Limite à gauche, limite à droite**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} l$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tq } \forall x \in I, \quad a-\alpha \le x < a \Rightarrow |f(x)-l| \le \varepsilon$$

On définit de même la limite à droite

Remarque 85. On peut aussi définir la continuité à droite et à gauche en un point a.

DÉFINITION 10.14 : **Prolongement par continuité**
Si la fonction f a une limite finie en une extrémité $a \notin I$ de l'intervalle I, alors on pourra prolonger f en une fonction

$$\widetilde{f} : \begin{cases} I \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ \lim_{x\to a} f(x) & \text{si } x = a \end{cases} \end{cases}$$

La fonction $\widetilde{f}$ est continue au point a. On dit que $\widetilde{f}$ est le prolongement par continuité de f au point a.

THÉORÈME 10.4 : **Unicité de la limite**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$, et un point $a \in \overline{I}$. Si $l = \lim_{x\to a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ existe, alors cette limite est unique.

THÉORÈME 10.5 : **Une fonction admettant une limite finie est localement bornée**
Toute fonction admettant une limite finie en un point de $\overline{\mathbb{R}}$ est bornée sur un voisinage de ce point.

THÉORÈME 10.6 : **La connaissance d'une limite fournit une inégalité**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$, et un point $a \in \overline{I}$. Soient deux réels $(k,k') \in \mathbb{R}^2$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Si

H1 $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$;

H2 $k < l < k'$;

Alors, il existe un voisinage V de a sur lequel

$$\forall x \in V, \quad k \le f(x) \le k'$$

Théorème 10.7 : **Opérations algébriques sur les limites**
On suppose que les fonctions f et g ont une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l' \in \overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. la fonction $|f|$ a une limite en a et
$$|f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} |l|$$
2. lorsque $l + l'$ n'est pas une forme indéterminée, la fonction $(f+g)$ a une limite en a et
$$(f+g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} l + l'$$
3. lorsque ll' n'est pas une forme indéterminée, la fonction (fg) a une limite en a et
$$(fg)(x) \xrightarrow[x \to a]{} ll'$$
4. lorsque $l \neq 0$, il existe un voisinage V du point a sur lequel la fonction f ne s'annule pas, et alors la restriction de $1/f$ à ce voisinage a une limite en a et
$$(1/f)(x) \xrightarrow[x \to a]{} 1/l$$
5. lorsque $l' \neq 0$, il existe un voisinage V du point a sur lequel la fonction (f/g) ne s'annule pas et alors
$$(f/g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} l/l'$$

Exercice 10-3
Soient deux fonctions $f,g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues en un point x_0. Montrer que :
a) Les fonctions $f^+ = \max(f,0)$ et $f^- = \max(-f,0)$ sont continues au point x_0.
b) Les fonctions $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont continues au point x_0.

Théorème 10.8 : **Passage à la limite dans les inégalités**
Soient deux fonctions $f,g : I \mapsto \mathbb{R}$, un point $a \in \overline{I}$. On suppose que les fonctions f et g admettent une limite en a et que :
H1 $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$, $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l'$;
H2 Sur un voisinage V du point a, $f(x) \leq g(x)$.
Alors $l \leq l'$.

Théorème 10.9 : **Théorème de majoration**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$, un point $a \in \overline{I}$ et un réel $l \in \mathbb{R}$. Soit θ une fonction définie sur un voisinage V de a. On suppose que :
H1 $\forall x \in V$, $|f(x) - l| \leq \theta(x)$;
H2 $\theta(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.
Alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$.

Théorème 10.10 : **Théorème des gendarmes**
Soient α,f,β trois fonctions définies sur un voisinage V du point a, et $l \in \mathbb{R}$. On suppose que :
H1 $\forall x \in V$, $\alpha(x) \leq f(x) \leq \beta(x)$;
H2 $\alpha(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$, $\beta(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$.
Alors la fonction f admet une limite au point a et
$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$$

Remarque 86. Ce théorème se généralise aux limites infinies. Par exemple, si sur un voisinage de $a \in \overline{I}$, on a :
H1 $f(x) \geq \alpha(x)$
H2 $\alpha(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$
Alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.

Remarque 87. Ne pas confondre le théorème des gendarmes et le passage à la limite dans les inégalités : le théorème des gendarmes donne l'existence de la limite de f, alors que pour passer à la limite dans les inégalités, il faut supposer que f admet une limite.

Exercice 10-4

Déterminez si elle existe la limite $\lim_{x\to 0^+} xE(1/x)$.

Théorème 10.11 : Composition de limites

Soient deux intervalles $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$ et deux fonctions $f : I \mapsto J$, $g : J \mapsto \mathbb{R}$. Soient un point $a \in I$ et un point $b \in \overline{J}$. On suppose que :

H1 $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$;

H2 $g(y) \xrightarrow[y\to b]{} l$.

Alors

$$g \circ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$$

Théorème 10.12 : Image d'une suite par une fonction.

Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in I$. Soit une suite (u_n) de points de l'intervalle I. Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que :

H1 $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$

H2 $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$

Alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$.

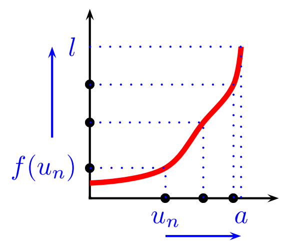


Fig. 10.3 – *Image d'une suite par une fonction*

Remarque 88.

1. Ce théorème est utile pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en a. Il suffit pour cela d'exhiber deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent vers a mais telles que les suites $\big(f(u_n)\big)$ et $\big(f(v_n)\big)$ ne convergent pas vers la même limite.
2. On utilise également ce théorème dans l'étude des suites récurrentes

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

   Si la suite (u_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, et si la fonction f est continue au point l, alors la limite de la suite récurrente est un point fixe de la fonction :

$$l = f(l)$$

Exercice 10-5

Montrez que la fonction définie par $f(x) = \sin(1/x)$ n'admet pas de limite lorsque $x \to 0^+$.

Exercice 10-6

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ périodique. Montrez que si $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est finie, alors la fonction f est constante.

Théorème 10.13 : Caractérisation séquentielle de la continuité en un point

Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in I$. La fonction f est continue au point a si et seulement si pour *toute* suite (x_n) de points de I convergeant vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)$ converge vers $f(a)$.

THÉORÈME 10.14 : **Théorème de la limite monotone**
Soient deux réels $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Si $f :]a,b[\mapsto \mathbb{R}$ est une fonction *croissante*, alors il n'y a que deux possibilités :

1. f est majorée, et alors f admet une limite finie lorsque $x \to b$;
2. f n'est pas majorée, et alors $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to b$.

De même,

1. f est minorée et alors f admet une limite finie lorsque $x \to a$;
2. f n'est pas minorée et alors $f(x) \to -\infty$ lorsque $x \to a$.

On a les résultats correspondants lorsque f est décroissante.

10.3 Etude locale d'une fonction

DÉFINITION 10.15 : **Notations de Landau**

– $f = o(g)$ (la fonction f est *négligeable* devant la fonction g au voisinage du point a) si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists V_a \in \mathcal{V}_a$, voisinage du point a tel que

$$\forall x \in V_a, \quad |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

Si la fonction g ne s'annule pas, c'est équivalent à dire que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

– $f = O(g)$ (la fonction f est *dominée* par la fonction g au voisinage du point a) si et seulement si $\exists M > 0$, $\exists V_a \in \mathcal{V}_a$, voisinage du point a tels que

$$\forall x \in V_a, \quad |f(x)| \leq M |g(x)|$$

Lorsque la fonction g ne s'annule pas, c'est équivalent à dire que la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée sur un voisinage du point a.

PROPOSITION 10.15 : **Opérations sur les relations de comparaisons**

– $f = o(g)$, $g = o(h) \Rightarrow f = o(h)$ (idem avec O).
– $f_1 = o(g)$, $f_2 = o(g) \Rightarrow f_1 + f_2 = o(g)$ (idem avec O),
– $f_1 = o(g_1)$, $f_2 = o(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$ (idem avec O).

DÉFINITION 10.16 : **fonctions équivalentes**
Soient deux fonctions $f,g : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in \overline{I}$. On dit que les fonctions f et g sont *équivalentes* au voisinage du point a lorsque

$$f - g = o(g)$$

Lorsque g ne s'annule pas sur un voisinage de a, cela revient à dire que :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1$$

Remarque 89. La relation $\sim$ sur $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est une relation d'équivalence.

Remarque 90.

– Ne JAMAIS écrire $f \sim 0$ bien que cela ait une signification précise (i.e. f est nulle dans un voisinage de a).
– Il ne faut pas confondre cette notation avec celle de certains physiciens $f \simeq g$ ($\cos x \simeq 1 - x^2/2$ qui est un développement limité caché alors que $\cos x \sim 1$!).
– Le principal intérêt des équivalents est de remplacer localement une fonction compliquée par une fonction plus simple (par exemple pour la recherche de limites). Par exemple, au voisinage de $+\infty$, $x^2 + x \sim x^2$, mais également $x^2 + x \sim x^2 + 2x + 1$ .... On choisira le premier équivalent en pratique car il est le plus simple à manier

Théorème 10.16 : Un équivalent donne localement le signe
Soient deux fonctions $f,g : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in \overline{I}$. Si au voisinage du point a, $f \sim g$ alors, il existe un voisinage V de a sur lequel f et g ont même signe.

Comme avec les suites, on a les propriétés suivantes :

Théorème 10.17 : Opérations sur les équivalents
Soient deux fonctions $f,g : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in \overline{I}$.

1. $f \underset{x\to a}{\sim} g$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$;
2. $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$ et $l \neq 0 \Rightarrow f \underset{x\to a}{\sim} l$;
3. $f_1 \underset{x\to a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{x\to a}{\sim} g_2 \Rightarrow f_1 f_2 \underset{x\to a}{\sim} g_1 g_2$ (et $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$) ;
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ (indépendant de x !). Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$, f et g sont positives alors $f^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g^\alpha$.

Remarque 91.

- Le symbole $\sim$ ne se manipule pas comme le signe $=$. Notamment lorsqu'on a une somme ; dans ce dernier cas, utiliser un développement limité (voir cours futur).
- *On peut prendre des produits, quotients, puissances d'équivalents, mais jamais des sommes, exponentielle ou logarithme d'équivalents.*
- Il est souvent intéressant de mettre en facteur un terme prédominant ou alors l'équivalent deviné dans une somme.

Un exemple à méditer :

1. $f(x) = x^2 + x$
2. $g(x) = -x^2$
3. $h(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$

Au voisinage de $+\infty$,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2, \quad g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^2, \quad h(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$$

Mais pourtant :

- $f(x) + g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$
- $h(x) + g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$
- $e^{f(x)} \not\sim e^{x^2}$, $e^{h(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{x^2}$

Théorème 10.18 : Comparaison des fonctions usuelles
Soient $\alpha,\beta,\gamma > 0$ trois réels.

- Comparaison ln et puissance :
  - en $+\infty$: $(\ln x)^\gamma = o(x^\alpha)$,
  - en 0 : $|\ln x|^\gamma = o(\dfrac{1}{x^\alpha})$,
- Comparaison puissance et exponentielle :
  - en $+\infty$: $x^\alpha = o(e^{\beta x})$,
  - en $-\infty$: $e^{\beta x} = o(\dfrac{1}{x^\alpha})$.

On retient qu'aux bornes des intervalles de définition,

$\boxed{\text{L'exponentielle l'emporte sur la puissance, la puissance l'emporte sur le logarithme.}}$

Equivalents classiques lorsque

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

Au voisinage de a :

- $\ln(1+f(x)) \sim f(x)$
- $\sin(f(x)) \sim f(x)$
- $\tan(f(x)) \sim f(x)$
- $[1-\cos(f(x)] \sim \dfrac{f(x)^2}{2}$
- $\left[e^{f(x)}-1\right] \sim f(x)$
- $[(1+f(x))^\alpha - 1] \sim \alpha f(x)$

Remarque 92. **Forme indéterminée** 1^∞
Pour étudier une fonction de la forme

$$f(x) = (a(x))^{b(x)}$$

l'écrire sous la forme

$$e^{b(x)\ln(a(x))}$$

Exercice 10-7

Montrez que $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Une erreur courante est de dire que lorsque $x \to 0$, $1+x$ se rapproche de 1 et donc la fonction tend vers 1 !

10.4 Propriétés globales des fonctions continues

DÉFINITION 10.17 : **Fonctions continues sur un intervalle**
On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I si et seulement si la fonction f est continue en chaque point de I, ce qui se traduit avec des quantificateurs de la manière suivante :

$$\forall a \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \le \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \le \varepsilon$$

On note $\mathcal{C}(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Remarque 93. Le fait qu'une fonction soit continue sur un intervalle I, correspond intuitivement au fait que l'on puisse tracer sa courbe représentative sans lever le crayon. La continuité en un point est une notion locale, alors que la continuité sur un intervalle est une notion globale.

THÉORÈME 10.19 : **Une fonction lipschitzienne est continue**
Si une fonction $f\ :\ I \mapsto \mathbb{R}$ est K-lipschitzienne sur I, alors f est continue sur l'intervalle I.

Exercice 10-8

Les fonctions

- $x \mapsto x^2$;
- $x \mapsto \sqrt{x}$;

sont-elles lipschitziennes, continues sur $[0,+\infty[$?

Exercice 10-9

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ K-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, avec $0 < K < 1$. On dit que la fonction f est *contractante*).
On considère la suite récurrente définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrez que si la fonction f admet un point fixe l alors il est unique ;
2. On suppose que la fonction f admet un point fixe l. Montrez que la suite (u_n) converge vers ce point fixe l.

Exercice 10-10

1. Soit un réel $x \in \mathbb{R}$. Montrez qu'il existe une suite de rationnels (r_n) qui converge vers ce réel x ;

2. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

En notant $\alpha = f(1)$, déterminer pour $p \in \mathbb{N}$, la valeur de $f(p)$, puis pour $p \in \mathbb{Z}$, calculez $f(p)$ et ensuite déterminez $f(1/q)$ et $f(p/q)$ pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$;

3. Déterminer alors toutes les fonctions f *continues* vérifiant la relation ci-dessus (ce sont les morphismes continus du groupe $(\mathbb{R},+)$).

Théorème 10.20 : Théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.)
Soit un *intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Soit deux réels $(a,b) \in I^2$ avec $a < b$. On suppose que

1. la fonction f est continue sur le segment $[a,b]$;
2. $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$;

Alors, il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

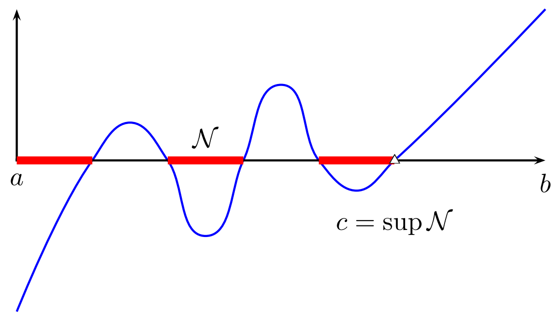


Fig. 10.4 – *Démonstration du TVI*

Corollaire 10.21 : Autre forme du TVI
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et un segment $[a,b] \subset I$. On suppose la fonction f continue sur le segment $[a,b]$. Soit un réel $t \in [f(a),f(b)]$. Alors il existe un réel $z \in [a,b]$ tel que $f(z) = t$.

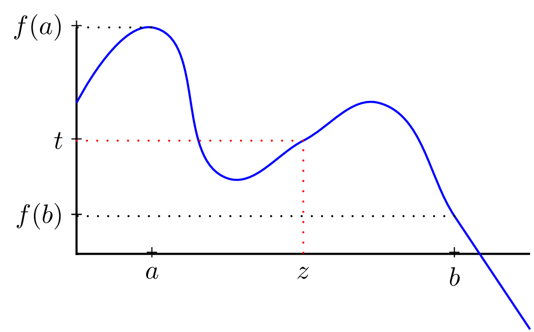


Fig. 10.5 – *TVI deuxième forme*

Corollaire 10.22 : Image continue d'un intervalle
Soit un intervalle I et une fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ continue sur cet intervalle. Alors, la partie $f(I)$ est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 10-11

Soit une fonction $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ continue. Montrez qu'elle admet un point fixe.

Exercice 10-12

Soit une fonction polynômiale $P : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de degré impair. Montrer que P s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 10.23 : Théorème de la bijection
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$. On note $J = f(I)$. On suppose que la fonction f est :

1. continue sur I ;
2. strictement monotone sur I.

Alors la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle J, et sa bijection réciproque $f^{-1} : J \mapsto I$ est une fonction continue strictement monotone de même sens que f.

Remarque 94. Soit un intervalle $I = [a,b[$ (les bornes peuvent être infinies), et une fonction $f : I \mapsto J = f(I)$ strictement croissante sur l'intervalle I. D'après le théorème de la limite monotone,

$$\alpha = \lim_{x \to a} f(x) \text{ et } \beta = \lim_{x \to b} f(x) \text{ existent}$$

(ces limites sont finies ou infinies). Alors $J = [\alpha,\beta[$. On remarque que les bornes de J sont fermées (resp. ouvertes) lorsque celles correspondantes de I sont fermées (resp. ouvertes).

Exercice 10-13

Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$$f_n : \begin{cases} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1 \end{cases}$$

1. Montrez qu'il existe un unique réel $u_n \in [0,1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$;
2. Montrez que la suite (u_n) converge ;
3. Déterminez la limite de la suite (u_n).

Remarque 95. Si les bijections f et f^{-1} sont deux fonctions continues monotones, alors les courbes représentatives de f et f^{-1} se déduisent l'une de l'autre par une symétrie par rapport à la première bissectrice.

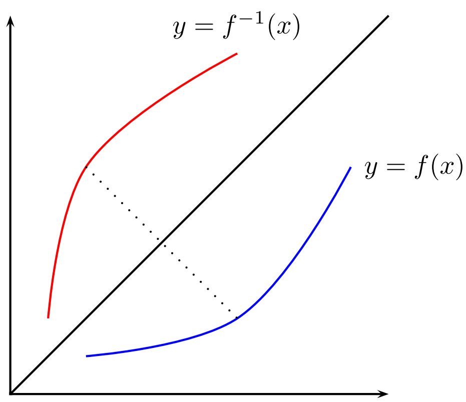


FIG. 10.6 – *Bijection et bijection réciproque*

THÉORÈME 10.24 : Recherche d'un zéro par dichotomie
On considère une fonction continue $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. On suppose que la fonction f ne s'annule qu'un un seul point $c \in]a,b[$. On construit deux suites récurrentes (a_n) et (b_n) en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0 \\ \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \end{cases} \qquad b_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n + b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0 \\ b_n & \text{si } f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

Alors les deux suites (a_n) et (b_n) convergent vers c, et si l'on choisit de prendre a_n comme valeur approchée de c, on obtient la majoration de l'erreur suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |c - a_n| \leq \frac{b - a}{2^n}$$

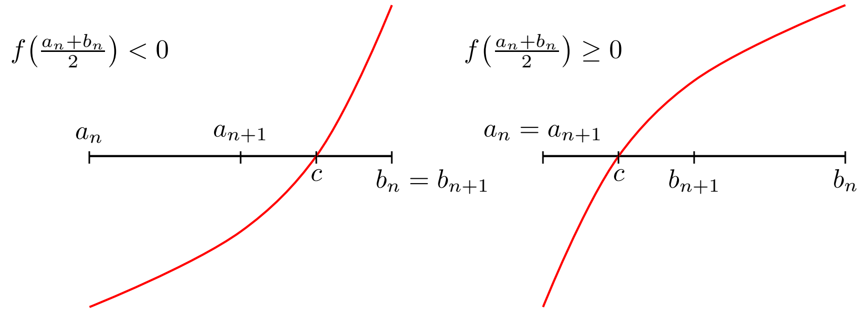


FIG. 10.7 – *Recherche d'un zéro par dichotomie*

> THÉORÈME 10.25 : **Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes**
> Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continue sur un *segment*. Alors la fonction f est bornée et atteint ses bornes :
> $$\exists (x_1,x_2) \in [a,b]^2 \text{ tq } f(x_1) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \text{ et } f(x_2) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

Remarque 96. Une autre façon de citer ce théorème : une fonction continue sur un *segment* possède un maximum et un minimum.

Remarque 97.

- $I =]0,1[$, $f(x) = 1/x$: la fonction f est continue sur I mais pas bornée (I n'est pas un segment) ;
- $I = [0,1[$, $f(x) = x$: la fonction f est continue sur I mais f n'atteint pas sa borne supérieure ($[0,1[$ est un intervalle, mais ce n'est pas un segment) ;
- $I = [0,1]$ $f(x) = x$ si $x \notin \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1/2$ si $x \in \mathbb{Q}$. $\sup f = 1$, $\inf f = 0$, mais les bornes ne sont pas atteintes (la fonction f n'est pas continue).

Exercice 10-14

Soient deux fonctions $f,g : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continues telles que
$$\forall x \in [0,1],\ f(x) < g(x)$$
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall x \in [0,1],\ f(x) + \alpha \leq g(x)$$

> THÉORÈME 10.26 : **L'image continue d'un segment est un segment**
> Soit deux réels $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a,b]$. Alors, l'image directe du segment $[a,b]$, $f\big([a,b]\big)$ est également un segment.

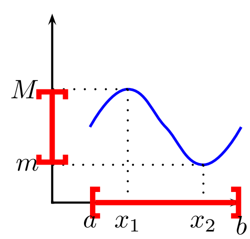


FIG. 10.8 – *Image continue d'un segment*

> DÉFINITION 10.18 : **Fonction uniformément continue**
> Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I. On dit qu'elle est *uniformément continue* sur I lorsque
> $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$
> Le nombre η est indépendant des réels (x,y) et s'appelle un *module d'uniforme continuité*.

Exercice 10-15

Montrez que si $f : I \mapsto \mathbb{R}$,

$$(f \text{ lipschitzienne sur } I) \Rightarrow (f \text{ uniformément continue sur } I) \Rightarrow (f \text{ continue sur } I)$$

THÉORÈME 10.27 : **Théorème de Heine**

Une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

Exercice 10-16

On considère une fonction continue $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} l \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 11

Dérivées

11.1 Dérivée

Dans la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 11.1 : **Dérivée d'une fonction**
Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, et un point $x_0 \in I$.
On définit le *taux d'accroissement* de la fonction f au point x_0 :

$$\Delta_{x_0} f : \begin{cases} I \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{cases}$$

1. On dit que la fonction f est dérivable à droite (respectivement à gauche) au point x_0 lorsque le taux d'accroissement $\Delta_{x_0}(x)$ admet une limite finie lorsque $x \to x_0$ à droite (respectivement à gauche).
2. Lorsque la fonction f admet une dérivée à droite (resp. à gauche), on note $f'_d(x_0)$ (respectivement $f'_g(x_0)$) la limite du taux d'accroissement.
3. On dit que la fonction f est dérivable au point x_0 lorsque le taux d'accroissement $\Delta_{x_0}(x)$ admet une limite finie lorsque $x \to x_0$. On note $f'(x_0)$ cette limite.

Théorème 11.1 : **DL à l'ordre 1 d'une fonction dérivable**
La fonction f est dérivable au point x_0 si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon : I \mapsto \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ et un réel $c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in I$,

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

On a alors $c = f'(x_0)$.

Remarque 98. On peut écrire le $\mathrm{DL}(x_0,1)$ de la façon suivante :

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + R(x)$$

où $R(x) = o(x - x_0)$. La droite d'équation $y = g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point x_0. La fonction $|R(x)| = |f(x) - g(x)|$ représente la distance entre le point $\big(x,f(x)\big)$ de la courbe représentative de f et le point correspondant $\big(x,g(x)\big)$ de sa tangente. L'hypothèse sur le reste dit que cette distance tend vers 0 plus vite qu'une fonction linéaire.

Remarque 99. Le $\mathrm{DL}(x_0,1)$ peut également s'écrire :

$$\forall h \in \mathbb{R}, \text{ tq } x_0 + h \in I,\ f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\varepsilon(h)$$

avec $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

Corollaire 11.2 : **Dérivabilité implique continuité**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Alors

$$(f \text{ dérivable au point } x_0) \Rightarrow (f \text{ continue au point } x_0)$$

Remarque 100. La réciproque est bien entendu fausse ($f(x) = |x|$)

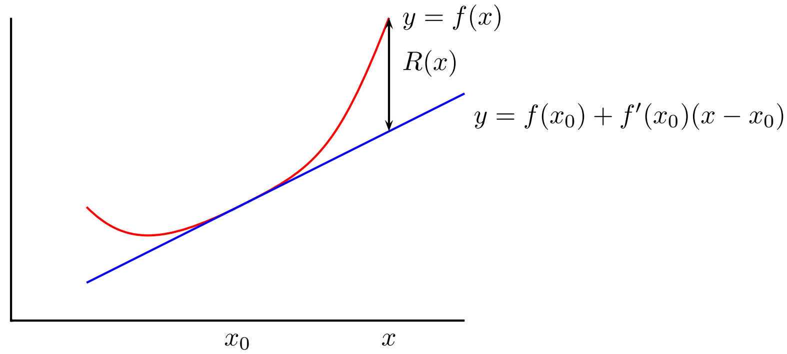


FIG. 11.1 – *Interprétation du DL1*

DÉFINITION 11.2 : **Dérivabilité sur un intervalle**
On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point $x_0 \in I$. On définit alors la fonction dérivée :

$$f' : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{cases}$$

THÉORÈME 11.3 : **Règles de calcul de dérivées**
Si u et v sont deux fonctions dérivables en un point $x_0 \in I$, on a les propriétés suivantes :

1. la fonction $(u + v)$ est dérivable au point x_0 et
$$(u + v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$$
2. pour tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $(\lambda.u)$ est dérivable au point x_0 et
$$(\lambda.u)'(x_0) = \lambda \times u'(x_0)$$
3. la fonction (uv) est dérivable au point x_0 et
$$(uv)'(x_0) = u'(x_0) \times v(x_0) + u(x_0) \times v'(x_0)$$
4. si $v(x_0) \neq 0$, il existe un voisinage de x_0 sur lequel la fonction v ne s'annule pas et alors la fonction $(1/v)$ est dérivable au point x_0 avec
$$(1/v)'(x_0) = -\frac{v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$
5. si $v(x_0) \neq 0$, la fonction (u/v) est dérivable au point x_0 avec
$$(u/v)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$
6. pour un entier $n \in \mathbb{Z}$ la fonction (u^n) est dérivable au point x_0 et
$$(u^n)'(x_0) = nu^{n-1}(x_0) \times u'(x_0)$$

Remarque 101. On en déduit que si les fonctions u et v sont dérivables sur un intervalle I, alors la fonction (uv) est dérivable sur I avec $(uv)' = u'v + uv'$ ...

Théorème 11.4 : **Dérivation des fonctions composées**
Soient deux fonctions $f : I \mapsto \mathbb{R}$, $g : J \mapsto \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. On suppose que :
- H1 la fonction f est dérivable au point x_0 ;
- H2 la fonction g est dérivable au point $g(x_0)$.

Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable au point x_0 avec

$$(g \circ f)'(x_0) = \Big[g'\big(f(x_0)\big)\Big] \times f'(x_0)$$

On en déduit que si :
- H1 la fonction f est dérivable sur l'intervalle I ;
- H2 la fonction g est dérivable sur l'intervalle J ;

alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur l'intervalle I avec

$$(g \circ f)' = [g' \circ f] \times f'$$

Théorème 11.5 : **Dérivation de la bijection réciproque**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $x_0 \in I$. On suppose que :
- H1 f est strictement monotone sur l'intervalle I ;
- H2 f est dérivable au point x_0 ;
- H3 $f'(x_0) \neq 0$.

On sait déjà que f réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle $J = f(I)$ et alors la fonction f^{-1} est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ avec

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

On en déduit que si :
- H1 $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est strictement monotone sur l'intervalle I ;
- H2 f est dérivable sur l'intervalle I ;
- H3 $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$;

alors la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(I)$ avec

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

11.2 Dérivées successives

Définition 11.3 : **Dérivées successives**
On définit lorsqu'elles existent les fonctions f'' par $(f')'$ et par récurrence :

$$\begin{cases} f^{(0)} & = f \\ \forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k+1)} & = (f^{(k)})' = (f')^{(k)} \end{cases}$$

On notera $\mathcal{D}_k(I)$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur l'intervalle I.

Définition 11.4 : **Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$**
On dit qu'une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle I si et seulement si elle est k-fois dérivable sur l'intervalle I et si la fonction $f^{(k)}$ est continue sur l'intervalle I.
On note $\mathcal{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle I. On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur l'intervalle$I$.

Remarque 102. la continuité en un point est une notion de régularité plus faible que la dérivabilité en un point, qui est elle-même plus faible que de dire que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle contenant ce point.

$$\mathcal{C}^0(I) \supset \mathcal{D}_1(I) \supset \mathcal{C}^1(I) \supset \mathcal{D}_2(I) \supset \mathcal{C}^2(I) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^\infty(I)$$

Exercice 11-1

Etudier la régularité de la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Exercice 11-2

Exprimer la dérivée k$^{\text{e}}$ de la fonction définie par $f(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

THÉORÈME 11.6 : **$\mathcal{C}^n(I)$ est un stable par somme**
Soient $(f,g) \in \mathcal{C}^n(I)$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. alors $(\lambda.f + \mu.g) \in \mathcal{C}^n(I)$.

THÉORÈME 11.7 : **Formule de Leibniz** [a]
Soient deux fonctions f,g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I. Alors la fonction (fg) est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I et on a la formule de Leibniz qui exprime la dérivée nième du produit :

$$\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}}$$

[a] Gottfried Whilhelm von Leibniz (01/07/1646-14/11/1716), Allemand. À l'origine avec Newton du calcul différentiel.

Exercice 11-3

On considère la fonction définie par $f(x) = (x^2+1)e^{2x}$. Calculer pour $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x)$.

THÉORÈME 11.8 : **La composée de fonctions $\mathcal{C}^n$ est $\mathcal{C}^n$**
Si $f \in \mathcal{C}^n(I,J)$ et $g \in \mathcal{C}^n(J,\mathbb{R})$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$.
Il n'y a pas de formule simple qui donne $(g \circ f)^{(n)}$.

DÉFINITION 11.5 : **Difféomorphisme**
Soit un intervalle I, et une application $\phi : I \mapsto \mathbb{R}$. Soit un entier $k \geq 1$. On dit que l'application ϕ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de l'intervalle I vers l'intervalle $f(I)$ si et seulement si :

1. ϕ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle I ;
2. ϕ réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle $J = f(I)$;
3. La bijection réciproque $\phi^{-1} : J \mapsto I$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle J.

Remarque 103. Si une fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et si $\forall x \in I$, $\phi'(x) \neq 0$, alors ϕ réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de I vers $J = f(I)$.

11.3 Théorème de Rolle et des accroissements finis

THÉORÈME 11.9 : **En un extremum local intérieur, la dérivée s'annule**
Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, et un point $a \in I$. On suppose que

- H1 a est un point *intérieur* à I ;
- H2 a est un extremum local de f ;
- H3 f est dérivable au point a.

Alors $f'(a) = 0$.

Remarque 104. $f'(a) = 0$ n'est pas une condition suffisante (penser à $f(x) = x^3$). Cependant, si l'on sait que f présente un extremum en un point de I et si f est dérivable alors on cherchera ce point parmi les solutions de $f'(x) = 0$ ou aux extrémités de I.

Théorème 11.10 : **Théorème de Rolle** [a]

Soit une fonction f : $[a,b]$. On suppose que :

(H1) f est continue sur le segment $[a,b]$;

(H2) f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$;

(H3) $f(a) = f(b)$.

Alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

[a] Michel Rolle, 21/04/1652 – 08/11/1719, mathématicien français à l'origine de la notation $\sqrt[n]{x}$.

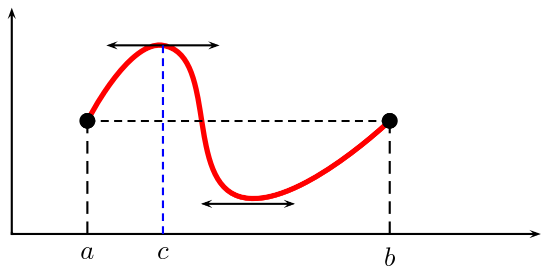


Fig. 11.2 – *Théorème de Rolle*

Exercice 11-4

On considère la fonction polynômiale $P(x) = x^n + ax + b$ avec $n \geq 2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction P possède au plus trois racines réelles distinctes.

Exercice 11-5

Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

C'est le théorème de Darboux [1] : si une fonction est dérivable, alors la fonction dérivée f' vérifie les conclusions du théorème des valeurs intermédiaires même si la fonction f' n'est pas continue.

Exercice 11-6

Généralisation du théorème de Rolle

Si une fonction f : $[a, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ vérifie :

(H1) f est continue sur $[a, +\infty[$;

(H2) f est dérivable sur $]a, +\infty[$;

(H3) $f(a) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Alors $\exists c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

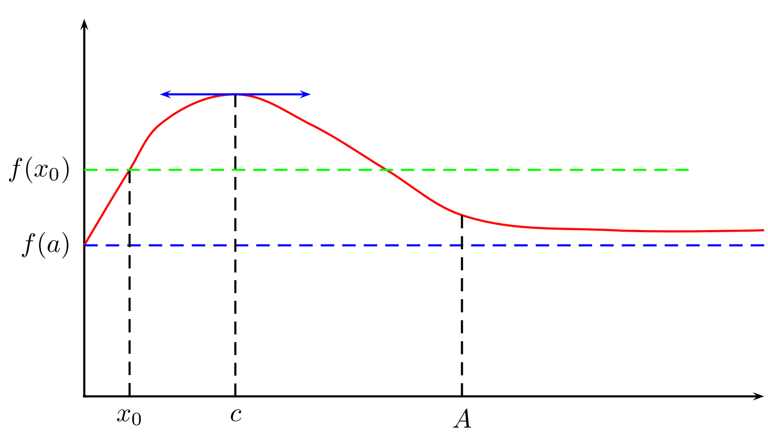


Fig. 11.3 – *Généralisation du théorème de Rolle*

1. Gaston Darboux, (14/08/1842 – 23/02/1917) Français, a démontré de nombreux théorèmes en géométrie différentielle, et a construit une intégrale qui porte son nom.

THÉORÈME 11.11 : **Théorème des accroissements finis**
Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ telle que :
H1 f est continue sur le segment $[a,b]$;
H2 f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$.
Alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

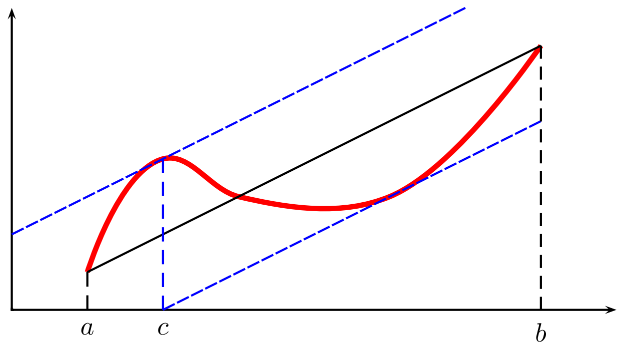


FIG. 11.4 – *Théorème des accroissements finis*

THÉORÈME 11.12 : **Inégalité des accroissements finis**
Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ définie sur un segment et un réel $M \in \mathbb{R}$. On suppose que :
H1 la fonction f est continue sur le segment $[a,b]$;
H2 la fonction f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$;
H3 $\forall x \in]a,b[,\ |f'(x)| \le M$.
Alors $|f(b) - f(a)| \le M|b-a|$.

COROLLAIRE 11.13 : **Une fonction à dérivée bornée est lipschitzienne**
Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et un réel $k \ge 0$. On suppose que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I. Alors

$$(\forall x \in I,\ |f'(x)| \le k) \iff (f \text{ est } k-\text{lipschitzienne sur } I)$$

Remarque 105. On en déduit qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$ est lipschitzienne.

Exercice 11-7

Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a,b]$ telle que :
H1 la fonction f' est continue sur le segment $[a,b]$;
H2 la fonction f' est dérivable sur l'intervalle $]a,b[$.
Soit un réel $x_0 \in]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(x_0) - \left[f(a) + (x_0 - a)\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \right] = \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2} f''(c)$$

Remarque 106. On se sert souvent du TAF pour passer d'une hypothèse locale (propriété de f') à une propriété globale (relation entre $f(b)$ et $f(a)$) comme dans le théorème suivant.

THÉORÈME 11.14 : **Caractérisation des fonctions constantes, monotones**
On suppose que :
H1 f est une fonction continue sur le segment $[a,b]$;
H2 f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$.
On a les résultats suivants :
1. $\big(\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \ge 0\big) \iff \big(f \text{ est croissante sur} [a,b]\big)$;
2. $\big(\forall x \in]a,b[,\ f'(x) > 0\big) \Rightarrow \big(f \text{ est strictement croissante sur } [a,b]\big)$;
3. $\big(\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0\big) \iff \big(f \text{ est constante sur le segment } [a,b]\big)$.

Remarque 107. – Ces résultats s'étendent à un intervalle quelconque I : si une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intérieur de l'intervalle I, et si pour tout point x intérieur à I, $f'(x) > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur I. On a les mêmes caractérisations pour les fonctions décroissantes.

– La réciproque de (2) est fausse : si $f(x) = x^3$, alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais sa dérivée s'annule en 0.

– Il est important dans ce théorème que I soit un *intervalle*. Si $I = [0,1] \cup [2,3]$, et si $f = 1$ sur $[0,1]$, $f = 0$ sur $[2,3]$, on a bien $f' = 0$ et pourtant la fonction f n'est pas constante sur l'ensemble I.

DÉFINITION 11.6 : **Primitives**
Soit deux fonctions f et F définies sur un intervalle I. On dit que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I si et seulement si :

1. la fonction F est dérivable sur I ;
2. $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

THÉORÈME 11.15 : **Deux primitives diffèrent d'une constante**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et deux primitives $F,G :\mapsto \mathbb{R}$ de la fonction f sur l'intervalle I. Alors ces deux primitives diffèrent d'une constante :

$$\exists C \in \mathbb{R} \text{ tq } \quad \forall x \in I,\ G(x) = F(x) + C$$

COROLLAIRE 11.16 : **Primitivation d'égalités et d'inégalités**
Soient deux fonctions f, $g : I \mapsto \mathbb{R}$ dérivables sur un intervalle I.

1. Si
$$\forall x \in I,\ f'(x) = g'(x)$$
Alors pour tous points $(a,b) \in I^2$, on a
$$f(b) - f(a) = g(b) - g(a)$$

2. Si
$$\forall x \in I,\ f'(x) \le g'(x)$$
alors pour tous points $(a,b) \in I^2$, avec $a \le b$, on a
$$f(b) - f(a) \le g(b) - g(a)$$

THÉORÈME 11.17 : **Théorème du prolongement dérivable**
Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant :

H1 la fonction f est continue sur le segment $[a,b]$;

H2 la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]a,b]$;

H3 $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$ où $l \in \mathbb{R}$.

Alors la fonction f est dérivable au point a et $f'(a) = l$.

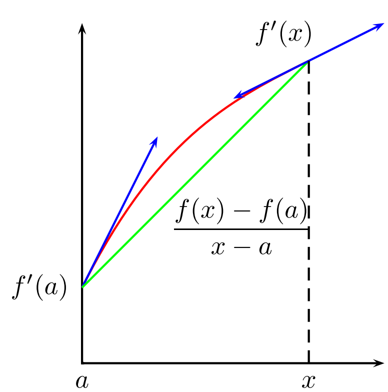


FIG. 11.5 – *Prolongement dérivable*

Remarque 108. Considérons la fonction :

$$f : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Elle est continue sur le segment $[0,1]$, dérivable sur $[0,1]$ mais la fonction dérivée f' n'a pas de limite lorsque $x \to 0$. Cela montre que la réciproque du théorème précédent est fausse.

Exercice 11-8

Soit $f :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-1/x}$. Etudier le prolongement de la fonction f en 0.

Exercice 11-9

Une généralisation utile du théorème précédent. Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$. On suppose que :

1. f est continue sur le segment $[a,b]$;
2. f est dérivable sur l'intervalle $]a,b]$;
3. $f'(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.

Montrer que

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$$

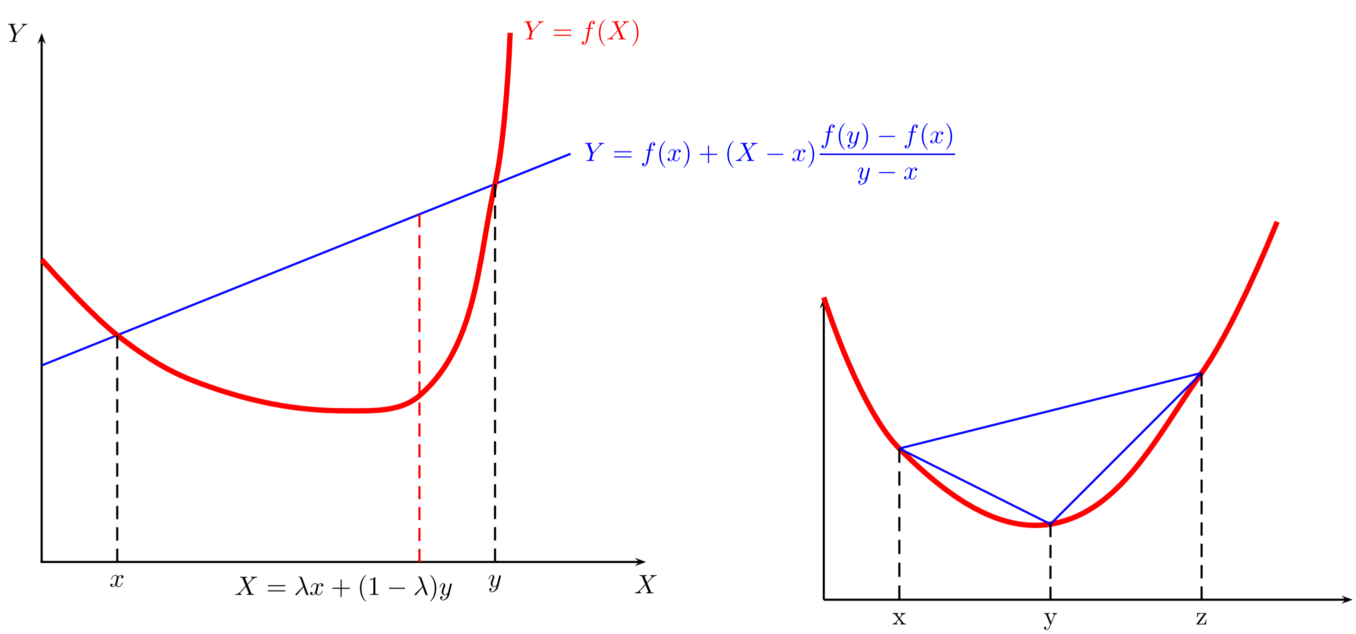
En d'autres termes, le graphe de f présente une demi-tangente verticale au point a et n'est donc pas dérivable au point a.

11.4 Fonctions convexes.

Définition 11.7 : Fonction convexe
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que f est *convexe* lorsque

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], \quad f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Remarque 109. Cela signifie géométriquement que le graphe de f est situé en dessous de toutes les cordes joignant deux points de ce graphe.



(a) Fonction convexe (b) Lemme des trois pentes

Fig. 11.6 – *Fonctions convexes*

Remarque 110. On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I est *concave* lorsque

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], \quad f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

La fonction f est concave si et seulement si la fonction $-f$ est convexe. Dans la suite, on n'étudiera que les propriétés des fonctions convexes.

Remarque 111. Les fonctions qui sont à la fois convexes et concaves sont les fonctions affines.

DÉFINITION 11.8 : **Fonction strictement convexe**
On dit qu'une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est *strictement convexe* lorsque $\forall (x,y) \in I^2$, $x \neq y$,

$$\forall \lambda \in]0,1[, \quad f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

PROPOSITION 11.18 : **Inégalité de convexité généralisée**
soit une fonction f convexe sur l'intervalle I. Alors

$$\forall n \geq 2, \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n \text{ tq } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)$$

LEMME 11.19 : **Lemme des trois pentes**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe :

$$\forall (x,y,z) \in I^3,\ x < y < z, \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Remarque 112. C'est le résultat principal sur les fonctions convexes.
Il est utilisé dans la majorité des démonstrations.

Exercice 11-10

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. Montrer que f est constante.

THÉORÈME 11.20 : **Caractérisation des fonctions convexes dérivables**

1. Si $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable,
$$(f \text{ convexe }) \Longleftrightarrow (f' \text{ croissante })$$
2. Si $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est deux fois dérivable,
$$(f \text{ convexe }) \Longleftrightarrow (f'' \geq 0 \text{ sur } I)$$

THÉORÈME 11.21 : **Le graphe d'une fonction convexe est situé au dessus de toutes ses tangentes**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ convexe et dérivable.

$$\forall x_0 \in I, \forall x \in I, \quad f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

On obtient des inégalités intéressantes, dites « inégalités de convexité » de la façon suivante :
1. On se donne une fonction f ;
2. On vérifie qu'elle est convexe sur I en calculant f'' ;
3. On écrit l'inégalité de convexité (éventuellement généralisée).

Exercice 11-11

a) Montrer que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$(x_1 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \dots + x_n^2)$$

b) Majorer pour $x,y > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $(x+y)^n$ en fonction de x^n et y^n.

Exercice 11-12

a) Ecrire une inégalité de convexité en utilisant la fonction $f(x) = -\ln(x)$.

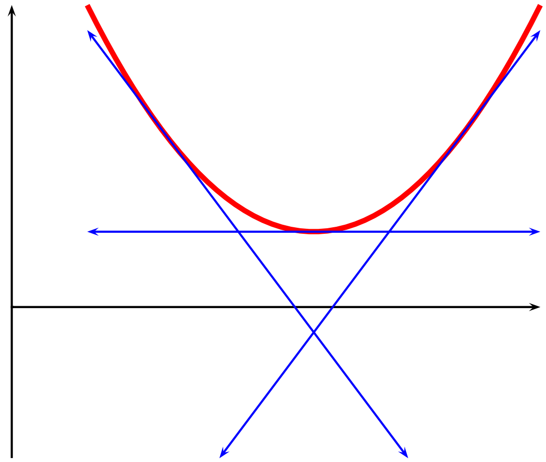


Fig. 11.7 – *Le graphe d'une fonction convexe est au dessus de toutes ses tangentes*

b) En déduire l'inégalité de Young : $\forall a > 0,\ b > 0,\ \forall p > 0,\ q > 0,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

c) Montrer que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+\star})^2$,

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

(la moyenne géométrique de deux nombres est inférieure à la moyenne arithmétique).
d) Montrer que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+\star})^n$,

$$(x_1 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Chapitre 12

Les entiers naturels

12.1 Les entiers naturels

12.1.1 Propriétés fondamentales

Muni de la relation d'ordre :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, n \leq m \iff \exists k \in \mathbb{N}, m = n + k$$

l'ensemble des entiers naturels possède les trois propriétés suivantes :

Définition 12.1 : **Propriétés de $\mathbb{N}$**

1. **plus petit élément :** toute partie $A \subset \mathbb{N}$ non-vide possède un plus petit élément :
$$\exists a \in A \text{ tq } \forall x \in A, a \leq x$$
2. **plus grand élément :** toute partie $A \subset \mathbb{N}$ non-vide et majorée possède un plus grand élément :
$$\exists b \in A \text{ tq } \forall x \in A, x \leq b$$
3. **axiome de récurrence :** soit une partie $A \subset \mathbb{N}$ telle que :
   - $0 \in A$
   - $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \in A) \Rightarrow \big((n+1) \in A\big)$

   Alors $A = \mathbb{N}$.

Théorème 12.1 : **Division euclidienne**
Soient deux entiers $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ avec $b \neq 0$. Alors $\exists !(q,r) \in \mathbb{N}^2$ tels que :
1. $a = bq + r$
2. $0 \leq r < b$

Théorème 12.2 : **Le principe de récurrence**
Soit une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier n. On suppose que :
H1 $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n_0)$ est VRAI ;
H2 $\forall n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.
Alors $\forall n \geq n_0$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Corollaire 12.3 : **Récurrence forte**
On considère une proposition $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier n. On suppose que :
H1 $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n_0)$ est VRAI ;
H2 $\forall n \geq n_0$, $\big(\mathcal{P}(n_0) \text{ et } \mathcal{P}(n+1) \text{ et } \dots \text{ et } \mathcal{P}(n)\big) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.
Alors $\forall n \geq n_0$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Remarque 113. La récurrence forte est plus facile à utiliser : l'hypothèse $\mathcal{P}(1)$ et $\dots$ et $\mathcal{P}(n)$ est plus forte que l'hypothèse $\mathcal{P}(n)$.

Exercice 12-1

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{[n(n+1)]^2}{4}$$

12.1.2 Ensembles finis

On définit pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $(p \leq q)$, l'intervalle d'entiers :

$$[\![p,q]\!] = \{k \in \mathbb{N} \text{ tq } p \leq k \leq q\}$$

Lemme 12.4 : **Injections, surjections d'intervalles entiers**
Soient deux entiers $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ non-nuls. On a :

$$(p \leq q) \Longleftrightarrow (\exists f : [\![1,p]\!] \mapsto [\![1,q]\!] \text{ injective})$$

$$(p \geq q) \Longleftrightarrow (\exists f : [\![1,p]\!] \mapsto [\![1,q]\!] \text{ surjective})$$

Définition 12.2 : **Ensembles finis**
Soit E un ensemble. On dit que l'ensemble E est *fini* lorsqu'il existe un entier non nul $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection $\phi : E \mapsto [\![1,n]\!]$. Par convention, on dira que l'ensemble vide $\emptyset$ est également un ensemble fini.

Théorème 12.5 : **Unicité du cardinal**
Si E est un ensemble fini, alors l'entier n de la définition précédente est unique.

Définition 12.3 : **Cardinal**
Soit un ensemble fini E non-vide. L'unique entier n tel qu'il existe une bijection entre E et $[\![1,n]\!]$ est appelé le *cardinal* de l'ensemble E, que l'on note $|E|$ (ou $\text{Card}(E)$ ou encore $\sharp E$).
Par convention, le cardinal de l'ensemble vide vaut 0.

Théorème 12.6 : **Comment montrer qu'un ensemble est fini**
Soit un ensemble fini F et un ensemble E. S'il existe une injection $\phi : E \mapsto F$, alors l'ensemble E est fini et $|E| \leq |F|$.

Définition 12.4 : **Ensembles équipotents**
Soient deux ensembles E et F. On dit qu'ils sont *équipotents* et l'on note $E \approx F$ lorsqu'il existe une bijection ϕ entre ces deux ensembles.

Corollaire 12.7 : **Pour montrer que deux ensembles ont même cardinal**
Soient deux ensembles finis E et F. Les deux ensembles E et F sont équipotents si et seulement si ils ont même cardinal

Théorème 12.8 : **Applications entre ensembles finis**
Soient deux ensembles finis E et F de même cardinal n, et une application $f : E \mapsto F$. On a :

$$(f \text{ injective }) \Longleftrightarrow (f \text{ surjective }) \Longleftrightarrow (f \text{ bijective })$$

Corollaire 12.9 : **Comment montrer que deux ensembles de même cardinal sont égaux**
Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal. Alors

$$E \subset F \Rightarrow E = F$$

12.1.3 Dénombrements fondamentaux

Lemme 12.10 : Lemme des Bergers
Si A et B sont deux ensembles finis, on a :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Plus généralement, si $\mathcal{P} = (A_1, \dots, A_p)$ est un *partage* d'un ensemble fini E en classes disjointes, on a :

$$|E| = |A_1| + \cdots + |A_p|$$

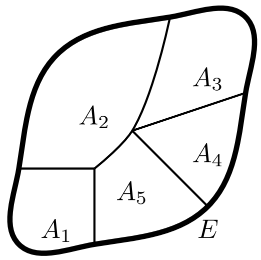


Fig. 12.1 – *Lemme des bergers*

Théorème 12.11 : Dénombrements fondamentaux
Soient deux ensembles finis E et F, avec $|E| = n, |F| = p$. Alors :

1. $E \times F$ est fini et $\boxed{|E \times F| = np}$
2. $\mathcal{F}(E,F)$ est fini et $\boxed{|\mathcal{F}(E,F)| = p^n}$
3. $\mathcal{P}(E)$ est fini et $\boxed{|\mathcal{P}(E)| = 2^n}$

Définition 12.5 : Arrangements, coefficients binômiaux
Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. On définit :

- $n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \times (n-1) \times \dots 2 \times 1 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$
- Si $0 \leq p \leq n$, $\boxed{A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)$
- Si $0 \leq p \leq n$, $\boxed{C_n^p = \dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p \times (p-1) \times \cdots \times 1}}$

Remarque 114. En particulier, on a les relations :

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Théorème 12.12 : Nombre d'injections, de bijections

1. Si $|E| = p$, $|F| = n$, avec $p \leq n$ (attention aux notations !), le nombre d'applications injectives de E vers F vaut A_n^p ;
2. Si $|E| = |F| = n$, le nombre d'applications bijectives de E vers F vaut $n!$

Théorème 12.13 : Nombres de parties à p éléments
Soit un ensemble fini E, de cardinal n, et un entier $0 \leq p \leq n$. Le nombre de parties de E de cardinal p vaut $\dbinom{n}{p}$ (c'est le nombre de façons différentes de choisir p éléments parmi n).

Remarque 115. Soit un ensemble fini E de cardinal n. Une p-liste de E est une application de $[\![1,p]\!]$ vers E, notée en informatique $l = [a_1, \dots, a_n]$.

- n^p est le nombre de p-listes ;
- A_n^p est le nombre de p-listes sans répétition. (l'ordre des éléments compte) ;
- $\binom{n}{p}$ représente le nombre de sous-ensembles de E à p éléments (l'ordre n'est pas important et il n'y a pas de répétitions).

Exercice 12-2

Quel est le nombre de façons de placer k boules identiques dans n urnes pouvant contenir au plus 1 boule?
Quel est le nombre de façons de placer k boules numérotées dans n urnes pouvant contenir au plus 1 boule?

Exercice 12-3

Trouver le nombre de diviseurs de 1800.

Exercice 12-4

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Quel est le nombre de couples de parties $(X,Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ vérifiant $X \subset Y$?

Exercice 12-5

Trouver le nombre d'applications strictement croissantes de l'intervalle entier $[\![1,p]\!]$ vers l'intervalle entier $[\![1,n]\!]$.

Exercice 12-6

Soient $0 \leq p \leq n$ deux entiers. On veut trouver le nombre de p-uplets $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ d'entiers vérifiant :

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_p = n$$

Pour cela, étant donné un tel p-uplet, considérer α_1 cases blanches, 1 case noire, α_2 cases blanches ... :

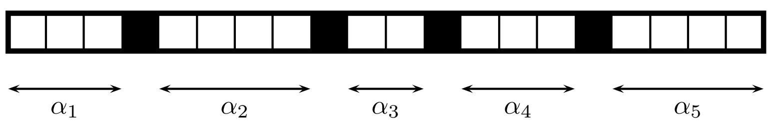


FIG. 12.2 – *Transformation du problème*

Déterminer ensuite le nombre de p-uplets vérifiant :

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_p \leq n$$

Exercice 12-7

Combien y a-t-il d'applications croissantes de $[\![1,k]\!]$ vers $[\![1,p]\!]$?

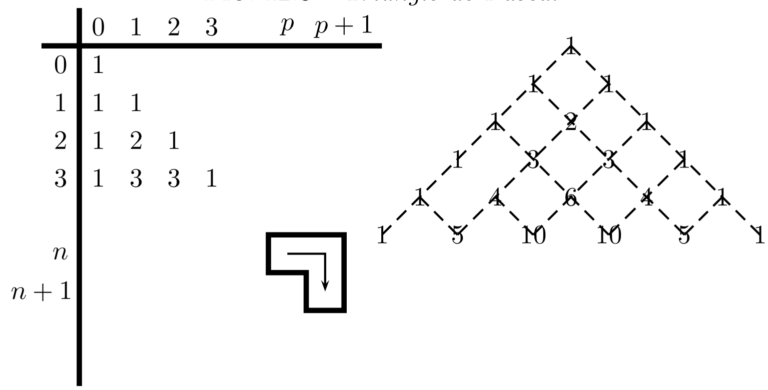
12.1.4 Propriétés des coefficients binômiaux

THÉORÈME 12.14 : **Propriété des coefficients binômiaux**
Soients $0 \leq p \leq n$ deux entiers. Les coefficients binômiaux vérifient les propriétés suivantes :

- *Symétrie* : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- *Factorisation* : $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ (si $p \geq 1$)
- *Additivité* : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

De l'additivité, on obtient le *triangle de Pascal* qui permet de calculer de proche en proche tous les coefficients binômiaux.

FIG. 12.3 – *Triangle de Pascal*



Théorème 12.15 : Formule du binôme de Newton
Soient deux réels $a,b \in \mathbb{R}$ et un entier $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Exercice 12-8

Calculer les sommes

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} \binom{n}{k}$$

Exercice 12-9

Calculer les sommes

$$S_1 = \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} \qquad S_2 = \sum_{\substack{0 \le k \le n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$$

Exercice 12-10

Calculer les sommes

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$$

Exercice 12-11

Quelques propriétés des coefficients binômiaux.

a. Montrer que $\forall 1 \le k \le n$, on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1}$$

b. En déduire les inégalités suivantes selon la parité de n :

$$n = 2p \ : \quad \binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \dots < \binom{n}{p-1} < \binom{n}{p} > \binom{n}{p+1} > \dots > \binom{n}{n}$$

$$n = 2p+1 \ : \quad \binom{n}{0} < \dots < \binom{n}{p-1} = \binom{n}{p+1} > \dots > \binom{n}{n}$$

c. En déduire que $\forall n \ge 1$,

$$\binom{2n}{n} \ge \frac{4^n}{2n+1}$$

12.1.5 Numérotation en base b

THÉORÈME 12.16 : **Numérotation en base p**
Soit un entier $n \in \mathbb{N}$. Il s'écrit de façon unique :

$$n = a_k 10^p + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 \quad 0 \leq a_i < 10$$

Plus généralement, si $p \in \mathbb{N}^\star$ est un entier non nul, l'entier n s'écrit de façon unique :

$$n = b_k p^k + b_{k-1} p^{k-1} + \cdots + b_1 p + b_0 \quad 0 \leq b_i < p$$

On dit que $(a_p, \ldots, a_0)_{10}$ sont les *chiffres* de l'entier n en base 10 et que $(b_k, \ldots, b_0)_p$ sont les chiffres de l'entier n en base p.

Exercice 12-12

En base 16, les chiffres sont notés $\{0,1,\ldots,9,A,B,C,D,E,F\}$. Déterminer les chiffres de l'entier 95 en base 16.

Calcul des chiffres d'un entier en base p

Une fonction récursive qui renvoie la liste $[b_k, \ldots, b_0]$ des chiffres d'un entier n en base p :

```
chiffres := proc(n)
  if n < p then
    [n]
  else
    [op(chiffres( iquo(n, p) ), n mod p ) ]
  fi;
end;
```

La même fonction programmée avec une boucle :

1. **Arguments :** n (entier) ;
2. **Variables :** a (entier), l (liste), r (entier)
3. **Initialisation :** $a \leftarrow n$, $l \leftarrow []$
4. **Corps :** Tant que $a <> 0$, faire :
   - $r \leftarrow a \bmod p$,
   - $l \leftarrow [r, op(l)]$,
   - $a \leftarrow \dfrac{a-r}{p}$,

   Fin tant que
5. **Fin :** renvoyer l.

en Maple :

Maple
```
conversion := proc(n, b)
  local a, l, r;
  while (a <> 0) do
    r := irem(a, p);
    l := [r, op(l)];
    a := (a - r) / p;
  od;
  l;
end;
```

Exercice 12-13

Combien y a-t-il d'entiers qui s'écrivent avec moins de k chiffres en base p? Avec exactement k chiffres?

Algorithme d'exponentiation rapide

On veut calcuer a^n. Pour cela, on peut effectuer $n-1$ multiplications en utilisant la formule :

$$a^n = a \times \cdots \times a$$

ce qui conduit à l'algorithme :

1. **Arguments :** a (entier), n (entier ≥ 1)

2. **Variables :** P entier
3. **Initialisation :** $P \leftarrow a$
4. **Corps :** Pour i de 1 à $n-1$ faire :
   - $P \leftarrow P \times a$
5. **Fin :** renvoyer P

Maple
```
expo := proc(a, n)
  local P;
  P := a;
  for i from 1 to n - 1 do
     P := P * a
  od;
  P;
end;
```

Mais on remarque que pour calculer a^8, on peut se contenter de 3 multiplications :
- $b = a \times a$ ($b = a^2$)
- $c = b \times b$ ($c = a^4$)
- $d = c \times c$ ($d = a^8$)

L'idée de l'algorithme d'exponentiation rapide est la formule récursive :

$$a^n = \begin{cases} x \times x & \text{si } n \text{ pair} \\ a \times x \times x & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \qquad \text{où } x = a^{n/2}$$

Exercice 12-14

Déterminer le nombre de multiplications nécessaires pour calculer a^n avec cet algorithme en fonction des chiffres de n en base 2, et montrer que ce nombre $T(n)$ vérifie :

$$\lfloor \log_2(n) \rfloor \leq T(n) \leq 2 \lfloor \log_2(n) \rfloor$$

12.2 Les entiers relatifs

12.2.1 Congruences

Théorème 12.17 : **Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$**
Soient deux entiers $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ avec $b \neq 0$. Alors $\exists!(q,r) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :
1. $a = bq + r$
2. $0 \leq r < b$

On dit que l'entier q est le *quotient* et l'entier r le *reste* de la division euclidienne de a par b.

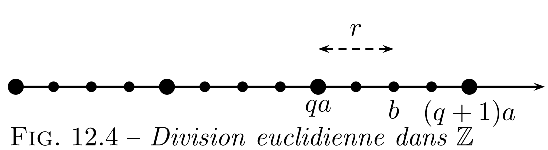


Fig. 12.4 – *Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$*

Définition 12.6 : **Divisibilité**
Soient deux entiers relatifs $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. On dit que l'entier a *divise* l'entier b si et seulement si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $b = ka$.

Remarque 116.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n/0$;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $0/n \Rightarrow n = 0$;
- $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$, $\begin{cases} a/b \\ c/d \end{cases} \Rightarrow ac/bd$.

Proposition 12.18 : Propriétés de la divisibilité

- Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. On a l'équivalence
$$(a/b) \Longleftrightarrow (b \in a\mathbb{Z}) \Longleftrightarrow (b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z})$$
- Si $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$,
$$\big(a/b \text{ et } b/a\big) \Longleftrightarrow (a = b \text{ ou } a = -b\big)$$
- Si $(a,b) \in \mathbb{N}^{\star 2}$, $a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z} \Rightarrow a = b$.

Définition 12.7 : Congruence

Considérons un entier strictement positif $n \in \mathbb{N}^\star$ et deux entiers $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. On dit que l'entier a est *congru* à l'entier b modulo n, et l'on note $a \equiv b\ [n]$ lorsque l'entier n divise l'entier $(b-a)$:
$$a \equiv b\ [n] \Longleftrightarrow n/(b-a)$$

Proposition 12.19 : Caractérisation par les restes

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ et deux entiers $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. On note r_a le reste de la division euclidienne de a par n et r_b le reste de la division euclidienne de b par n. Alors :
$$a \equiv b\ [n] \Longleftrightarrow r_a = r_b$$

Proposition 12.20 : La relation de congruence est une relation d'équivalence

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^\star$. La relation $\equiv$ définie sur $\mathbb{Z}$ par :
$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ a \equiv b \Longleftrightarrow a \equiv b\ [n]$$
est une relation d'équivalence.

Proposition 12.21 : Compatibilité des lois avec les congruences

Soient quatre entiers $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$ et un entier $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose que

1. $a \equiv b\ [n]$;
2. $c \equiv d\ [n]$.

Alors

1. $a + c \equiv b + d\ [n]$;
2. $a \times c \equiv b \times d\ [n]$;
3. $\forall k \in \mathbb{N},\ a^k \equiv b^k\ [n]$.

Exercice 12-15

1. Trouver le reste de l'entier 126745 dans la division par 9.
2. Trouver le reste de la division de l'entier 121^{1256} par 7.
3. Trouver le reste de la division euclidienne de $(1001)^{77}$ par 3.

12.3 Structure de groupe

Définition 12.8 : Groupe

On appelle *groupe* un ensemble G muni d'une lci $\star$ vérifiant :

1. la loi $\star$ est associative ;
2. G possède un élément neutre ;
3. Tout élément x de G admet un symétrique.

Si de plus la loi $\star$ est commutative, on dit que le groupe est *abélien* (ou *commutatif*).

Théorème 12.22 : Groupe produit
On considère deux groupes $(G,.)$ et $(H,\star)$ et sur l'ensemble $G \times H$, on définit la loi T par :

$$\forall((x,y),(x',y')) \in (G \times H)^2, \quad (x,y)T(x',y') = (x.x',y \star y')$$

Alors $(G \times H,T)$ est un groupe appelé *groupe produit.*

Définition 12.9 : Sous-groupe
Soit $(G,\star)$ un groupe. On dit qu'une partie $H \subset G$ est un *sous-groupe* de G ssi :
1. $e \in H$;
2. la partie H est *stable* par la loi : $\forall(x,y) \in H^2$, $x \star y \in H$.
3. $\forall x \in H$, $x^{-1} \in H$.

Théorème 12.23 : Une caractérisation équivalente
Les trois conditions précédentes sont équivalentes aux deux conditions :
1. $e \in H$;
2. $\forall(x,y) \in H^2$, $x \star y^{-1} \in H$.

Pour montrer que $H \subset G$ est un sous-groupe du groupe $(G,\star)$:
1. $e \in H$;
2. *Soit* $(x,y) \in H^2$;
3. Calculons $x \star y^{-1}, \dots$;
4. On a bien $x \star y^{-1} \in H$;
5. Donc H est un sous-groupe de G.

Théorème 12.24 : Un sous-groupe a une structure de groupe
Si la partie H est un sous-groupe de $(G,\star)$, alors puisque cette partie est stable pour la lci, on peut définir la restriction de la loi $\star$ à H qui est une lci sur H. Muni de cette loi restreinte, $(H,\star)$ est un groupe.

Pour montrer qu'un ensemble a une structure de groupe, on essaie de montrer que c'est un sous-groupe d'un groupe connu

`Exemple 20.` On considère l'ensemble $U = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| = 1\}$. Montrer que $(U,\times)$ est un groupe.

Exercice 12-16

Soit un ensemble E non-vide et un élément $a \in E$. On note

$$G = \{f \in \mathcal{B}(E,E), \text{ tq } f(a) = a\}$$

(c'est l'ensemble des bijections de G laissant invariant l'élément a). Montrer que $(G,\circ)$ est un groupe.

Exercice 12-17

Soit $(G,.)$ un groupe. On note

$$C = \{x \in G \mid \forall g \in G,\ g.x = x.g\}$$

C'est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G. Montrer que $(C,.)$ est un sous-groupe de G (appelé *centre* du groupe G).

Théorème 12.25 : L'intersection de sous-groupes est un sous-groupe
Si H_1 et H_2 sont deux sous-groupes d'un groupe G, alors $H_1 \cap H_2$ est un sous-groupe de G

Remarque 117. $H_1 \cup H_2$ n'est pas un sous-groupe de G en général.

Exercice 12-18

Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes d'un groupe $(G,.)$. Montrer que

$$(H_1 \cup H_2 \text{ est un sous-groupe de } G) \Longleftrightarrow (H_1 \subset H_2 \text{ ou } H_2 \subset H_1)$$

Théorème 12.26 : Sous-groupes de $\mathbb{Z}$
Les sous groupes du groupe $(\mathbb{Z},+)$ sont les ensembles de la forme :

$$a\mathbb{Z} = \{ka;\ k \in \mathbb{Z}\}$$

où $a \in \mathbb{N}$

Définition 12.10 : Morphismes de groupes
Soient deux groupes $(G_1,\star)$ et $(G_2,\bullet)$. Une application $f\ :\ G_1 \mapsto G_2$ est un *morphisme* de groupes si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in G_1^2, \quad f(x \star y) = f(x) \bullet f(y)$$

Pour montrer que $f : G_1 \mapsto G_2$ est un morphisme :
1. *Soit* $(x,y) \in G_1^2$;
2. On a bien $f(x \star y) = f(x) \bullet f(y)$.

Proposition 12.27 : Propriétés d'un morphisme de groupes
Si e_1 est l'élément neutre de G_1 et e_2 l'élément neutre de G_2, alors
1. $f(e_1) = e_2$;
2. $\forall x \in G_1$, $[f(x)]^{-1} = f(x^{-1})$.

Théorème 12.28 : Image directe et réciproque de sous-groupes par un morphisme
Soit $f\ :\ G_1 \mapsto G_2$ un morphisme de groupes.
1. Si H_1 est un sous-groupe de G_1, alors $f(H_1)$ est un sous-groupe de G_2 ;
2. Si H_2 est un sous-groupe de G_2, alors $f^{-1}(H_2)$ est un sous-groupe de G_1.

Définition 12.11 : Noyau, image d'un morphisme
On considère un morphisme de groupes $f\ :\ G_1 \mapsto G_2$. On note e_1 l'élément neutre du groupe G_1 et e_2 l'élément neutre du groupe G_2. On définit
- le *noyau* du morphisme f :

$$\operatorname{Ker}(f) = \{x \in G_1 \mid f(x) = e_2\} = f^{-1}\big(\{e_2\}\big)$$

- l'*image* du morphisme f :

$$\operatorname{Im} f = f(G_1) = \{y \in G_2 \mid \exists x \in G_1\ f(x) = y\}$$

$\operatorname{Ker} f$ est un sous-groupe de G_1 et $\operatorname{Im} f$ est un sous-groupe de G_2.

Théorème 12.29 : Caractérisation des morphismes injectifs, surjectifs
Soit un morphisme de groupes $f\ :\ G_1 \mapsto G_2$. On note e_1 l'élément neutre du groupe G_1 et e_2 l'élément neutre du groupe G_2. On a les propriétés suivantes :
- (f injective) $\Longleftrightarrow$ ($\operatorname{Ker} f = \{e_1\}$) ;
- (f surjective) $\Longleftrightarrow$ ($\operatorname{Im} f = G_2$).

Pour montrer qu'un morphisme $f\ :\ (G_1,\star) \mapsto (G_2,\bullet)$ est injectif :
1. *Soit* $x \in G_1$ tel que $f(x) = e_2$
2. Alors $x = e_1$;
3. Donc $\operatorname{Ker} f = \{e_1\}$, et puisque f est un morphisme, f est injectif.

Définition 12.12 : Isomorphisme
On dit qu'une application $f\ :\ G_1 \mapsto G_2$ est un isomorphisme de groupes si et seulement si
1. l'application f est un morphisme de groupes ;
2. l'application f est bijective.

Remarque 118. Un isomorphisme d'un groupe G vers lui-même est appelé un *automorphisme*.

Théorème 12.30 : La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme
Si f est un isomorphisme de groupes, sa bijection réciproque $f^{-1}\ :\ G_2 \mapsto G_1$ est aussi un isomorphisme de groupes.

`Exemple 21.` Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^{+*},\times) \\ x & \mapsto & e^x \end{array} \right.$$

Vérifier que l'application f est un isomorphisme de groupes. Quel est son isomorphisme réciproque?

Exercice 12-19

Trouver tous les morphismes du groupe $(\mathbb{Z},+)$ vers lui-même. Lesquels sont-ils des isomorphismes?

12.4 Structure d'anneau

DÉFINITION 12.13 : **anneau**
Soit A un ensemble muni de deux lci notées $+$ et $\times$. On dit que $(A,+,\times)$ est un *anneau* ssi :

1. $(A,+)$ est un groupe commutatif ;
2. la loi $\times$ est associative ;
3. la loi $\times$ est *distributive* par rapport à la loi $+$:

$$\forall (x,y,z) \in A^3, \quad \begin{aligned} x \times (y+z) &= x \times y + x \times z \\ (x+y) \times z &= x \times z + y \times z \end{aligned}$$

4. Il existe un élément neutre pour $\times$, noté 1.

Si en plus la loi $\times$ est commutative, on dit que $(A,+,\times)$ est un anneau commutatif.

Remarque 119. Dans un anneau $(A,+,\times)$, on note $-x$ le symétrique de l'élément x pour la loi $+$ et 0 l'élément neutre de la loi $+$. Attention, un élément $x \in A$ n'a pas forcément de symétrique pour la loi $\times$, la notation x^{-1} n'a pas de sens en général.

`Exemple 22.` $(\mathbb{Z},+,\times)$ et $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\times)$ sont des anneaux commutatifs.

DÉFINITION 12.14 : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
Soit un entier strictement positif $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalences de la relation de congruence modulo n. Il y a n classes distinctes, notées

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\widehat{0},\dots,\widehat{n-1}\}$$

Ces classes correspondent aux restes possibles dans la division euclidienne par l'entier n. On définit sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ les « lois quotient » notées $\widehat{+}$ et $\widehat{\times}$. Muni de ces deux lois, $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\widehat{+},\widehat{\times}\right)$ est un anneau commutatif d'éléments neutres $\widehat{0}$ et $\widehat{1}$.

THÉORÈME 12.31 : **Règles de calcul dans un anneau**
On considère un anneau $(A,+,\times)$. On a les règles de calcul suivantes :

- $\forall a \in A$, $a \times 0 = 0 \times a = 0$;
- $\forall a \in A$, $(-1) \times a = -a$;
- $\forall (a,b) \in A^2$, $(-a) \times b = -(a \times b)$.

Remarque 120. Si $(A,+,\times)$ est un anneau, $(A,\times)$ n'est pas un groupe en général (par exemple lorsque $A = \mathbb{Z}$).

Remarque 121. En général, (par exemple dans l'anneau $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$),

$$\boxed{a \times b = 0 \not\Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0}$$

On dit que de tels éléments a et b sont des *diviseurs de zéro*.

DÉFINITION 12.15 : **Anneau intègre**
Soit un anneau $(A,+,\times)$. On dit que cet anneau est *intègre* si et seulement si :

1. $A \neq \{0\}$;
2. la loi $\times$ est commutative ;
3. $\forall (x,y) \in A^2$, $x \times y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

Remarque 122. Dans un anneau *intègre*, on peut « simplifier » à gauche et à droite : Si $(a,y,z) \in A^3$, avec $ax = ay$, et si $a \neq 0$, alors $x = y$. Cette propriété est fausse dans un anneau général.

Définition 12.16 : Notations
On considère un anneau $(A,+,\times)$. Soit un élément $a \in A$ et un entier $n \in \mathbb{N}$. On note

– $na = \begin{cases} \underbrace{a+\dots+a}_{n \text{ fois}} & \text{si } n \neq 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$
– $(-n)a = n(-a) = \underbrace{(-a)+\dots+(-a)}_{n \text{ fois}}$
– $a^n = \begin{cases} \underbrace{a\times\dots\times a}_{n \text{ fois}} & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$
– a^{-n} n'a pas de sens si a n'est pas inversible pour $\times$.

Définition 12.17 : Élément nilpotent
Soit un anneau $(A,+,\times)$. On dit qu'un élément $a \in A$ $(a \neq 0)$ est *nilpotent* s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $a^n = 0$.
Le plus petit entier n vérifiant $a^n = 0$ s'appelle l'indice de nilpotence de l'élément a.

Remarque 123. Si l'anneau A est intègre, il n'y a pas d'élément nilpotent dans cet anneau.

Exercice 12-20
Soit un anneau $(A,+,\times)$ vérifiant :

$$\forall x \in A, \quad x^2 = x$$

Montrer que l'anneau A est commutatif.

Théorème 12.32 : Binôme de Newton et formule de factorisation dans un anneau
Dans un anneau $(A,+,\times)$, si $(a,b) \in A^2$ vérifient

$$\boxed{a \times b = b \times a}$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

et $\forall n \geq 1$,

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$$

Théorème 12.33 : Calcul d'une progression géométrique
Soit un anneau $(A,+,\times)$ et un élément $a \in A$. On considère un entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. De la formule de factorisation, on tire :

$$\boxed{1 - a^n = (1-a)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})}$$

En particulier, si l'élément a est *nilpotent* d'indice n : $a^n = 0$, alors l'élément $(1-a)$ est inversible pour la loi $\times$ et on sait calculer son inverse :

$$(1-a)^{-1} = 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$$

Définition 12.18 : Sous-anneau
On considère un anneau $(A,+,\times)$ et une partie $A' \subset A$ de cet anneau. On dit que la partie A' est un sous-anneau de A si et seulement si :

1. $(A',+)$ est un sous-groupe du groupe $(A,+)$;
2. la partie A' est *stable* pour la loi$\times$: $\forall (a,b) \in A'^2$, $a \times b \in A'$;
3. l'élément neutre de l'anneau A est dans A' : $1 \in A'$.

Définition 12.19 : Morphisme d'anneaux
Soient deux anneaux $(A,+,\times)$ et $(A',+,\times)$. On dit qu'une application $f : A \mapsto A'$ est *morphisme d'anneaux* si et seulement si :

1. $\forall (x,y) \in A^2$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$;
2. $f(x \times y) = f(x)\times f(y)$;
3. $f(1_A) = 1_{A'}$.

Remarque 124. On dit que l'application f est un *isomorphisme* lorsque c'est un morphisme bijectif.

Exercice 12-21

Déterminer tous les morphismes d'anneaux de l'anneau $(\mathbb{Z},+,\times)$ vers lui-même.

Théorème 12.34 : Groupe des unités d'un anneau
Soit un anneau $(A,+,\times)$. On note U l'ensemble des éléments inversibles pour la loi $\times$:

$$U = \{a \in A \mid \exists a' \in A \text{ tq } a \times a' = a' \times a = 1_A\}$$

Alors muni de la seconde loi de l'anneau, l'ensemble $(U,\times)$ a une structure de groupe : c'est le *groupe des unités* de l'anneau A.

`Exemple 23.` Dans l'anneau $(\mathbb{Z},+,\times)$, le groupe des unités est $U = \{1,-1\}$. Dans l'anneau $\big(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}),+,\times\big)$, le groupe des unités est constitué des fonctions qui ne s'annulent pas.

Définition 12.20 : Idéal d'un anneau
On considère un anneau $(A,+,\times)$ et une partie $I \subset A$ de cet anneau. On dit que la partie I est un *idéal* de l'anneau A lorsque :

1. la partie I est un sous-groupe du groupe $(A,+)$;
2. la partie I est « absorbante » : $\forall x \in I$, $\forall a \in A$, $a \times x \in I$.

Remarque 125. La notion d'idéal d'un anneau est plus riche que celle de sous-anneau. Elle fournit un cadre général à l'arithmétique.

Exercice 12-22

Montrez qu'il n'existe pas de couple d'entiers $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant

$$x^2 - 5y^2 = 3$$

Exercice 12-23

Trouvez les entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que $x^2 - 4x + 3$ soit divisible par 6.

12.4.1 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Définition 12.21 : PGCD, PPCM
Soient deux entiers non nuls $(a,b) \in \mathbb{Z}^{\star 2}$.

1. L'ensemble des diviseurs de $\mathbb{N}^\star$ communs à a et b admet un plus grand élément δ noté $\delta = a \wedge b$. C'est le *plus grand commun diviseur* des entiers a et b.
2. L'ensemble des entiers de $\mathbb{N}^\star$ multiples communs de a et b admet un plus petit élément μ noté : $\mu = a \vee b$. C'est le *plus petit commun multiple* des entiers a et b.

Exercice 12-24

Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z},+)$. On définit l'ensemble

$$H_1 + H_2 = \{h_1 + h_2 \ ;\ (h_1,h_2) \in H_1 \times H_2\}$$

a. Montrer que $H_1 + H_2$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$ qui contient la partie $H_1 \cup H_2$;
b. Déterminer le sous-groupe $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z}$;
c. Comment interpréter l'inclusion $a\mathbb{Z} \cup b\mathbb{Z} \subset c\mathbb{Z}$ en termes de divisibilité ?

Théorème 12.35 : Caractérisation du ppcm et du pgcd avec les sous-groupes de $\mathbb{Z}$
Soient deux entiers non nuls $(a,b) \in \mathbb{Z}^{\star 2}$, δ leur pgcd et μ leur ppcm. Alors :

$$\delta\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{au + bv \ ; \ (u,v) \in \mathbb{Z}^2\}$$

$$\mu\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$$

Proposition 12.36 : Caractérisation des diviseurs (multiples) de a et b
Soient deux entiers $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Soit un entier $d \in \mathbb{Z}$. $\begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases} \iff d/(a \wedge b)$
2. soit un entier $m \in \mathbb{Z}$. $\begin{cases} a/m \\ b/m \end{cases} \iff (a \vee b)/m$.

Proposition 12.37 : Le pgcd et le ppcm sont associatifs

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^{\star 3},\ (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \text{ et } (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$$

On définit par récurrence le pgcd et le ppcm de n entiers par :

$$\mathrm{pgcd}(x_1, \dots, x_n) = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$$

$$\mathrm{ppcm}(x_1, \dots, x_n) = x_1 \vee \cdots \vee x_n$$

Proposition 12.38 :
Soient deux entiers non nuls $(a,b) \in \mathbb{Z}^{\star 2}$. Pour un entier $k \in \mathbb{N}^\star$, $\begin{cases} (ka) \wedge (kb) = k(a \wedge b) \\ (ka) \vee (kb) = k(a \vee b) \end{cases}$.

Théorème 12.39 : Théorème d'Euclide
Soient deux entiers $(a,b) \in \mathbb{Z}^{\star 2}$. Effectuons la division euclidienne de l'entier a par l'entier b :

$$\exists! (q,r) \in \mathbb{N}^2 \text{ tq } \begin{cases} a = bq + r \\ 0 \le r < b \end{cases}$$

Alors :

$$\mathrm{pgcd}(a,b) = \mathrm{pgcd}(b,r)$$

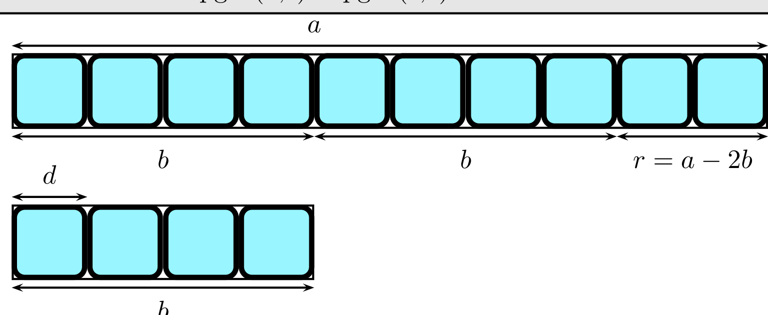


Fig. 12.5 – *Euclide : si d/b et d/a, alors d/r*

Le théorème précédent justifie l'algorithme d'Euclide pour trouver le pgcd de deux entiers non nuls $(a,b) \in \mathbb{N}^{\star 2}$. On pose $r_0 = a$, $r_1 = b$ et on définit ensuite $\forall k \ge 1$, les couples (q_k, r_k) en utilisant une division euclidienne :

$$\text{si } r_k \ne 0,\ \exists! (q_k, r_{k+1}) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tq } r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1} \text{ et } 0 \le r_{k+1} < r_k$$

Comme la suite d'entiers (r_k) est strictement décroissante, il existe un rang $n \ge 1$ tel que $r_n \ne 0$ et $r_{n+1} = 0$. D'après le théorème d'Euclide, on a $\forall k \in [0, n-1]$, $a \wedge b = r_k \wedge r_{k+1}$. Comme r_n divise r_{n-1}, on a $r_n \wedge r_{n-1} = r_n$. Par conséquent, le dernier reste non-nul r_n est le pgcd des entiers (a,b).

`Exemple 24.` Déterminez le pgcd des entiers 366 et 43 en utilisant l'algorithme d'Euclide, et en éliminant les restes « à la main ».

- **Paramètres :** a, b (entiers).
- **Variables locales :** A,B,r.
- **Initialisation :**
  - $A \leftarrow a$,
  - $B \leftarrow b$,
- **Corps :** Tant que $b \neq 0$ faire :
  - $r \leftarrow A \bmod B$,
  - $A \leftarrow B$,
  - $B \leftarrow r$,

  Fin tant que
- Renvoyer A ($A = \mathrm{pgcd}(a,b)$).

Maple
```
pgcd := proc(a, b)
  local A, B, r;
  A := a;
  B := b;
  while (b > 0) do
     r := irem(A, B);
     A := B;
     B := r;
  od;
  A;
end;
```

ou sous une forme récursive :

Maple
```
pgcd := proc(a, b)
   if b = 0 then a
   else
     pgcd(b, irem(a, b))
   fi;
end;
```

DÉFINITION 12.22 : **Nombres premiers entre eux**
Soient n entiers non nuls $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{Z}^{\star n}$. On dit que :
- les entiers $(x_1,\dots,x_n)$ sont premiers entre eux si et seulement si et seulement si $x_1 \wedge \dots \wedge x_n = 1$;
- les entiers $(x_1,\dots,x_n)$ sont premiers entre eux deux à deux si et seulement si $\forall (i,j) \in [1,n]^2$, $i \neq j \Rightarrow x_i \wedge x_j = 1$.

Remarque 126. Les entiers (3,6,7) sont premiers entre eux, mais pas premiers entre eux deux à deux. Si des entiers sont premiers deux à deux entre eux, ils sont premiers entre eux.

THÉORÈME 12.40 : **Théorème de Bezout** [a]
Soient deux entiers non nuls $(a,b) \in \mathbb{Z}^{\star 2}$. On a

$$(a \wedge b = 1) \iff (\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tq } 1 = au + bv)$$

[a] Étienne Bezout, (31/03/1730- 27/09/1783), Français, auteur de livres d'enseignement, célèbre pour ce théorème mais a travaillé également sur les déterminants

Exercice 12-25

Soient deux entiers non nuls $(a,b) \in \mathbb{Z}^{\star 2}$ premiers entre eux. Montrez qu'il existe deux entiers $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$au + bv = 1 \text{ et } |u| < |b|,\ |v| \leq |a|$$

Exercice 12-26

Trouver grâce à l'algorithme d'Euclide un couple de Bezout pour $a = 22$ et $b = 17$.

Remarque 127. Soient deux entiers $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$ premiers entre eux. L'algorithme d'Euclide permet de trouver un couple de Bezout $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$. On définit les suites (r_k) et (q_k) des restes dans l'algorithme d'Euclide. Notons $r_n = a \wedge b = 1$ le dernier reste non-nul. On pose $r_0 = a$, $r_1 = b$ et par récurrence, on définit

$$\forall k \geq 1,\ r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1}\ 0 < r_{k+1} \leq r_k$$

On définit simultanément deux suites (u_k) et (v_k) telles que

$$\forall k \in [0,n],\ r_k = u_k a + v_k b$$

Pour que cette propriété soit vraie pour tout $k \in [0,n]$, on doit poser :

$$(u_0,v_0) = (1,0),\ (u_1,v_1) = (0,1) \text{ et } \forall k \in [2,n],\ \begin{cases} u_{k+1} = u_{k-1} - q_k u_k \\ v_{k+1} = v_{k-1} - q_k v_k \end{cases}$$

On a alors $1 = au_n + bv_n$.

$r_0 = a$	$r_1 = b$	r_2	...	r_k	...	1
X	q_1	q_2	...	q_k	...	q_n
1	0	u_2	...	u_k	...	$u_n = u$
0	1	v_2	...	v_k	...	$v_n = v$

Voici une procédure Maple qui prend comme paramètres a et b et qui retourne $a \wedge b$, ainsi qu'un couple de Bezout (U,V)

Maple
```
bezout := proc(a, b)
  local R, RR, Q, U, UU, V, VV, temp;
  R := a;
  RR := b;
  U := 1;
  UU := 0;
  V := 0;
  VV := 1;
  #Cond entrée :  R = r0, RR = r1, U = u0, V = v0, UU = u1, VV = v1
  while (RR > 0) do
    Q := iquo(R, RR);
    temp := UU;
    UU := U - Q * UU;
    temp := VV;
    VV := V - Q * VV;
    V := temp;
    temp := RR;
    RR := irem(R, RR);
    R := temp;
    #INV : R = rk, RR = r_{k+1}, U = uk, UU = u_{k+1}, V = vk, VV = v_{k+1},
    #    Q = qk,  k : nombre de passages dans la boucle while
  od;
    #Cond sortie : RR = u_{n+1}=0, R = r_n = pgcd(a, b), U = u_n, V = v_n
  R, U, V;
end;
```

Théorème 12.41 : Théorème de Gauss [a]

Soient trois entiers non nuls $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^{\star 3}$.

$$\begin{cases} a/bc \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow a/c$$

[a] Carl Friedrich Gauss (30/04/1777 − 23/02/1855), Allemand. Considéré comme un des plus grand mathématicien de tous les temps avec Henri Poincaré. Il a permi des avancées énormes en théorie des nombres, géométrie non-euclidienne, ...

Exercice 12-27

Considérons deux entiers $(a,b) \in \mathbb{Z}^{\star 2}$ premiers entre eux : $a \wedge b = 1$ et un couple de Bezout $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 1$. Déterminer l'ensemble de tous les couples de Bezout $(u',v') \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant $au' + bv' = 1$.

Proposition 12.42 : Autres propriétés du PGCD

Soient trois entiers non nuls $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^{\star 3}$.

1. Soient trois entiers $(\delta,a',b') \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{Z}^2$ tels que $a = \delta a'$, $b = \delta b'$, alors
$$\big(\delta = a \wedge b\big) \iff \big(a' \wedge b' = 1\big)$$
2. $\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases} \Rightarrow a \wedge (bc) = 1$;
3. $\begin{cases} a/c \\ b/c \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow ab/c$;
4. pour tous entiers $(k,p) \in \mathbb{N}^{\star 2}$, si $a \wedge b = 1$, alors $a^k \wedge b^p = 1$;
5. pour tout entier $k \in \mathbb{N}^\star$, $a^k \wedge b^k = (a \wedge b)^k$

Exercice 12-28

On se donne trois entiers non nuls $(A,B,C) \in \mathbb{Z}^{\star 3}$, et on considère l'équation diophantienne :

$$(E) \ : \ Ax + By = C \quad (x,y) \in \mathbb{Z}^2$$

Résoudre cette équation consiste à déterminer l'ensemble des solutions $\mathcal{S} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid Ax + By = C\}$.

1. Notons $\delta = A \wedge B$. Montrez que si δ ne divise pas C, alors $\mathcal{S} = \emptyset$;
2. On suppose désormais que δ/C. Il existe trois entiers non nuls $(A',B',C') \in \mathbb{Z}^{\star 3}$ tels que $A = \delta A'$, $B = \delta B'$ avec $A' \wedge B' = 1$, et $C = \delta C'$. Montrez que l'équation (E) a même ensemble de solutions que l'équation
$$(E') \ : \ A'x + B'y = C'$$
3. Comment trouver une solution particulière de l'équation (E') ?
4. En déduire l'ensemble $\mathcal{S}$ de toutes les solutions ;
5. résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation
$$(E) \ : \ 24x + 20y = 36$$

Théorème 12.43 : Relation entre PGCD et PPCM

Soient deux entiers non nuls $(a,b) \in \mathbb{Z}^{\star 2}$.

1. Si $a \wedge b = 1$, alors $a \vee b = |ab|$;
2. $(a \wedge b)(a \vee b) = |ab|$.

12.4.2 Nombres premiers

Définition 12.23 : Nombres premiers

Un entier $n \in \mathbb{N}$ est dit *premier* si $n \geq 2$ et si ses seuls diviseurs dans $\mathbb{N}$, sont 1 ou lui-même :

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star,\ k/n \Rightarrow k \in \{1,n\}$$

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Proposition 12.44 : Propriétés des nombres premiers

1. Soit un entier $n \in \mathbb{N}$ premier, et un entier $a \in \mathbb{Z}$. Alors, n/a ou bien $n \wedge a = 1$.
2. Si n et m sont deux nombres premiers distincts, ils sont premiers entre eux : $n \neq m \Rightarrow n \wedge m = 1$.
3. Si n est un nombre premier et si $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^k$,
$$n/a_1 \dots a_k \Rightarrow \exists i \in [\![1,n]\!] \text{ tq } n/a_i$$

PROPOSITION 12.45 : Existence d'un diviseur premier
Tout entier $n \geq 2$ possède au moins un diviseur premier.

THÉORÈME 12.46 : Décomposition en facteurs premiers
Soit un entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Cet entier n s'écrit de façon unique (à l'ordre des facteurs près) comme :

$$n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(n)}$$

où $\nu_p(n) \in \mathbb{N}$ est appelé la *p-valuation* de l'entier n.

Remarque 128. Tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ non nul s'écrit de façon unique sous la forme :

$$n = \pm \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(|n|)}$$

Pour des entiers $a,b \in \mathbb{N}^\star$, et $p \in \mathcal{P}$,

$$\nu_p(a \times b) = \nu_p(a) + \nu_p(b) \quad a/b \Rightarrow \nu_p(a) \leq \nu_p(b)$$

THÉORÈME 12.47 : Il existe une infinité de nombres premiers
L'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est infini.

THÉORÈME 12.48 : Expression du PGCD et du PPCM à l'aide des facteurs premiers
Soient deux entiers non-nuls $(a,b) \in \mathbb{N}^{\star 2}$. Leur décomposition en facteurs premiers s'écrit :

$$a = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(a)} \quad b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(b)}$$

Alors la décomposition de $a \wedge b$ et de $a \vee b$ en facteurs premiers s'écrit :

$$a \wedge b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min\{\nu_p(a),\nu_p(b)\}} \quad a \vee b = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\max\{\nu_p(a),\nu_p(b)\}}$$

COROLLAIRE 12.49 :
Dans l'ensemble $\mathbb{Z}^\star$, les lois $\wedge$ et $\vee$ sont distributives. Pour tous entiers non nuls $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^{\star 3}$,

- $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$;
- $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Exercice 12-29

On considère un entier n décomposé en produit de facteurs premiers :

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$$

où $\forall i \in [1,k]$, $\alpha_i \in \mathbb{N}^\star$. Calculez la somme de tous les diviseurs de l'entier n :

$$S = \sum_{d/n} d$$

12.4.3 Applications de l'arithmétique

THÉORÈME 12.50 : Éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
Soit un entier $x \in [0,n-1]$. L'élément $\widehat{x}$ est inversible pour la multiplication dans l'anneau $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\widehat{+},\widehat{\times}\right)$ si et seulement si $x \wedge n = 1$.

COROLLAIRE 12.51 :
Soit un entier $n \in \mathbb{N}^\star$. L'anneau $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\widehat{+},\widehat{\times}\right)$ est un corps si et seulement si l'entier n est un nombre premier.

Exercice 12-30

Déterminez tous les entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que $x^2 + 5x - 3$ soit divisible par 7.

Exercice 12-31

On considère un entier non nul $n \in \mathbb{N}^\star$ et le groupe $(U_n, \times)$ des racines nièmes de l'unité. On note $\omega = e^{2i\pi/n}$ la racine nième primitive de l'unité et $\alpha = \omega^p$. À quelle condition, a-t-on $U_n = \{\alpha^k;\ k \in \mathbb{N}\}$?

Chapitre 13

Espaces vectoriels

13.1 Structure de corps

Définition 13.1 : **Corps**
On considère un ensemble K muni de deux lois de composition interne, notées $+$ et $\times$. On dit que $(K,+,\times)$ est un *corps* si et seulement si :

1. $(K,+,\times)$ est un anneau ;
2. tout élément non-nul de K est inversible pour la loi $\times$.

`Exemple 25.` $(\mathbb{Q},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$, $(\mathbb{C},+,\times)$ sont des corps, mais $(\mathbb{Z},+,\times)$ n'en est pas un car les seuls éléments inversibles sont 1 et -1.

Proposition 13.1 : **Un corps est un anneau intègre**
Dans un corps $(\mathbb{K},+,\times)$, si deux éléments $(x,y) \in \mathbb{K}^2$ vérifient $x \times y = 0_K$, alors $x = 0_K$ ou $y = 0_K$. En particulier, on peut « simplifier par un élément non nul » :

$$\forall (a,x,y) \in \mathbb{K}^3,\ a \neq 0_K, \quad a \times x = a \times y \Rightarrow x = y$$

Définition 13.2 : **Sous-corps**
Soit $K' \subset K$ un sous-ensemble d'un corps $(K,+,\times)$. On dit que la partie K' est un *sous-corps* du corps K si et seulement si :

1. K' est un sous-anneau de l'anneau $(K,+,\times)$;
2. l'inverse de tout élément non-nul de K' est dans K'.

Définition 13.3 : **Morphisme de corps**
Une application f entre deux corps $(K,+,\times)$ et $(K',+,\times)$ est un morphisme de corps si et seulement si c'est un morphisme d'anneaux.

Théorème 13.2 : **Calcul d'une somme géométrique dans un corps**
Soit un élément $k \in K$ du corps $(K,+,\times)$. Alors la formule suivante permet de calculer une progression géométrique de raison k :

$$\sum_{i=0}^{n} k^i = 1 + k + k^2 + \cdots + k^n = \begin{cases} (1-k)^{-1}\big(1-k^{n+1}\big) & \text{si } k \neq 1 \\ (n+1)1_K & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

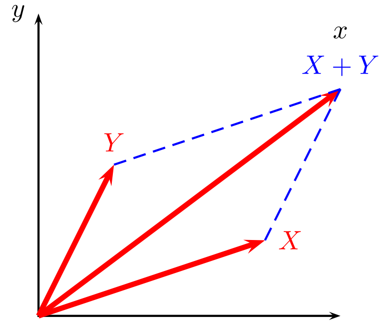


FIG. 13.1 – *Addition de vecteurs dans* $\mathbb{R}^2$.

13.2 Espaces vectoriels

DÉFINITION 13.4 : **Espace vectoriel**
Soit $(\mathbb{K},+,\times)$ un corps commutatif. On appelle espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ tout ensemble E muni d'une lci $+$ et d'une loi de composition *externe*

$$\left\{\begin{array}{ccc} K\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda\cdot x\end{array}\right.$$

vérifiant :

1. $(E,+)$ est un groupe commutatif,
2. $\forall(\lambda,\mu)\in K^2$, $\forall(x,y)\in E^2$:
   (a) $(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$
   (b) $\lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$
   (c) $(\lambda\times\mu)\cdot x=\lambda\cdot(\mu\cdot x)$
3. $\forall x\in E$, $1_K\cdot x=x$

On dit aussi que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Les éléments de E s'appellent les *vecteurs* et les éléments de K les *scalaires*. L'élément neutre pour $+$, est noté 0_E et s'appelle le *vecteur nul*.

Exemples
a) Si K est un corps commutatif, on définit une loi externe en posant pour $\lambda\in K$ et $x\in K$, $\lambda\cdot x=\lambda\times x$. Muni de « $+$ » et « $\cdot$ », K a une structure de K-ev.
b) Si $K=\mathbb{R}$ et $E=\mathbb{R}^2$, on définit l'addition de deux vecteurs: $X=(x_1,x_2)$, $Y=(y_1,y_2)$ $X+Y=(x_1+y_1,x_2+y_2)$ et la multiplication d'un scalaire par un vecteur : Si $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\cdot X=(\lambda x_1,\lambda x_2)$. Muni de ces deux lois, $\mathbb{R}^2$ a une structure de $\mathbb{R}$-ev. On peut représenter un vecteur $X=(x_1,x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ par une flèche joignant le point $(0,0)$ au point (x_1,x_2). L'addition de deux vecteurs s'obtient en traçant un parallélogramme.

PROPOSITION 13.3 : **Espace produit**
Soit K un corps commutatif et $E_1,\dots,E_n$ des K-ev. On définit sur $E_1\times\dots\times E_n$ les lois :

$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$

$$\lambda\cdot(x_1,\dots,x_n)=(\lambda\cdot x_1,\dots,\lambda\cdot x_n)$$

et alors $(E_1\times\dots\times E_n,+,\cdot)$ est un K-ev. Le vecteur nul est $(0_{E_1},\dots,0_{E_n})$.

En particulier, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-ev et $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-ev.

PROPOSITION 13.4 : **Espaces de fonctions**
Soit A un *ensemble* quelconque et E un K-ev. On note $\mathcal{F}(A,E)$ l'ensemble des fonctions de A vers E. On définit alors deux lois sur $\mathcal{F}(A,E)$:

$$\forall(f,g)\in\mathcal{F}(A,E),\quad (f+g):\left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & f(x)+g(x)\end{array}\right.$$

$$\forall f\in\mathcal{F}(A,E),\forall\lambda\in K,\quad \lambda\cdot f:\left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & \lambda\cdot f(x)\end{array}\right.$$

Alors $\Big(\mathcal{F}(A,E),+,\cdot\Big)$ est un K-ev.

Corollaire 13.5 : **Espace de suites**
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni des lois $+$ et $\cdot$ est également un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\big(\mathcal{S}(E),+,\cdot\big)$.

Proposition 13.6 : **Règles de calcul dans un ev**
pour tout (λ,μ) dans $\mathbb{K}^2$, pour tout (x,y) dans E^2, on a :

$$(\lambda-\mu)\cdot x = \lambda\cdot x - \mu\cdot x$$
$$0_K\cdot x = 0_E$$
$$\lambda\cdot(x-y) = \lambda\cdot x - \lambda\cdot y$$
$$\lambda\cdot 0_E = 0_E$$
$$(-\lambda)\cdot x = -(\lambda\cdot x) = \lambda\cdot(-x)$$
$$(\lambda\cdot x) = 0_E \iff (\lambda = 0_K \text{ ou } x = 0_E)$$

On écrira désormais λx à la place de $\lambda\cdot x$ lorsque la confusion ne sera plus à craindre.

13.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 13.5 : **Sous-espaces vectoriels**
Soit $(E,+,\cdot)$ un K-ev et $F\subset E$ une partie de E. On dit que F est un sev de E si et seulement si :
1. $0_E\in F$
2. $\forall (x,y)\in F^2$, $\forall(\lambda,\mu)\in K^2$, $\lambda x+\mu y\in F$ (on dit que F est *stable par combinaisons linéaires*).

Proposition 13.7 : **Un sev a une structure d'espace vectoriel**
Si F est un sev de E, alors muni des lois restreintes à F, F est un K-ev.

Remarque 129. Si E est un espace vectoriel, alors les parties $\{0_E\}$ et E sont toujours des sev de E.
`Exemple 26.` Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont : $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$, toutes les droites passant par l'origine :

$$F = \{\lambda(x_0,y_0)\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}\}$$

Exercice 13-1
Soit l l'ensemble des suites réelles convergeant vers 0. Montrer que c'est un $\mathbb{R}$-ev.

Exercice 13-2
Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sev de l'espace vectoriel $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
1. $F=\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$;
2. $F=\{f\in F\mid f(1)=2f(0)\}$;
3. $F=\{f\in F\mid f(0)=f(1)+1\}$;
4. $F=\{f\in F\mid \forall x\in\mathbb{R}, f(x)=f(1-x)\}$;
5. $F=\{f\in F\mid f$ dérivable et $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=a(x)f(x)\}$ où $a\in E$.
6. $F=\{f\in F\mid f$ dérivable et $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=a(x)f^2(x)\}$ où $a\in E$.

Théorème 13.8 : **L'intersection de sev est un sev**
Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sev de E. Alors $\bigcap_{i\in I}F_i$ est un sev de E.

Exercice 13-3
Montrer que $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-ev.

Définition 13.6 : **Espace vectoriel engendré par une partie**
Soit un K-ev E et une partie $A\subset E$ de E. On appelle *sous-espace engendré* par la partie A, le plus petit sev de E contenant A. On note $\mathcal{F}_A$ l'ensemble des sev de E contenant A, alors :

$$\mathrm{Vect}(A) = \bigcap_{F\in\mathcal{F}_A} F$$

Théorème 13.9 : Caractérisation de $\text{Vect}(A)$
Si $A \neq \emptyset$, $\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires *finies* d'éléments de A :

$$\text{Vect}(A) = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n x_n \ ; \ n \in \mathbb{N}^*, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n, (a_1, \dots, a_n) \in A^n\}$$

Exercice 13-4
Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer le sev engendré par $A = \{(1,1,1),(1,0,1)\}$

Exercice 13-5

1. Si $A \subset B$, montrer que $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.
2. Si F est un sev, montrer que $\text{Vect}(F) = F$.
3. Montrer que $\text{Vect}\big(\text{Vect}(A)\big) = \text{Vect}(A)$.

Exercice 13-6
Dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on définit pour $n \in \mathbb{N}$ la suite :

$$e_n = (0,0,\dots,0,1,0\dots)$$

(tous les termes de la suite sont nuls sauf le nième qui vaut 1). Déterminer le sev engendré par la partie $A = \{e_n \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Définition 13.7 : Somme de sev
Soit E un K-ev et $F_1, \dots, F_n$ des sev de E. On appelle *somme* des sev F_i, l'ensemble

$$F_1 + \dots + F_n = \{x_1 + \dots + x_n \ ; \ x_1 \in F_1, \dots, x_n \in F_n\}$$

Théorème 13.10 : Caractérisation de $\text{Vect}(F_1 + \dots + F_n)$
$F_1 + \dots + F_n$ est un sev de E et

$$F_1 + \dots + F_n = \text{Vect}(F_1 \cup \dots \cup F_n)$$

Exercice 13-7
Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les parties $F = \{(x,0,0) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x,x,0) \ ; \ x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que ce sont des sev et déterminer le sous espace $F + G$.

Définition 13.8 : Somme directe
Soient deux sev F_1, F_2 de l'espace vectoriel E. On dit que la somme $F_1 + F_2$ est *directe* si et seulement si tout vecteur de $F_1 + F_2$ s'écrit de façon *unique* $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$. On note alors $F_1 \oplus F_2$ cette somme.

Théorème 13.11 : Caractérisation d'une somme directe
Soient deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 d'un espace vectoriel E. On a la caractérisation suivante d'une somme directe :

$$\boxed{F_1 + F_2 = F_1 \oplus F_2 \iff F_1 \cap F_2 = \{0_E\}}$$

Définition 13.9 : Sous-espaces supplémentaires
On dit que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel E si et seulement si :

$$E = F_1 \oplus F_2$$

Remarque 130. Cela signifie que tout vecteur de E s'écrit de façon *unique* sous la forme

$$x = x_1 + x_2 \text{ avec } x_1 \in F_1,\ x_2 \in F_2$$

Pour montrer que $E = F_1 \oplus F_2$:
1. Montrons que la somme est directe, c'est à dire $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Soit $x \in F_1 \cap F_2 \dots$ donc $x = 0_E$.
2. Montrons que $E = F_1 + F_2$: soit $x \in E$. Posons $x_1 = \dots$ et $x_2 = \dots$. On a bien $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$ et $x = x_1 + x_2$.

Remarque 131. Ne pas confondre *supplémentaire* avec *complémentaire* : le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est jamais un sous-espace vectoriel (il ne contient pas le vecteur nul).

Remarque 132. Il existe en général une infinité de supplémentaires d'un sous-espace vectoriel. Ne pas parler *du* supplémentaire d'un sev.

Exercice 13-8

Dans l'espace $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sev

$$F = \text{Vect}\big((1,2,-1,0),(0,2,0,1)\big) \text{ et } G = \text{Vect}\big((2,0,0,1),(1,0,0,1)\big)$$

Ces deux sous-espaces sont-ils supplémentaires dans E ?

Exercice 13-9

Dans l'espace $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ on considère l'ensemble $\mathcal{P}$ des fonctions paires et l'ensemble $\mathcal{I}$ des fonctions impaires. Montrer que

$$E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$$

13.4 Sous-espaces affines

DÉFINITION 13.10 : **Sous-espace affine**
On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un *sous-espace affine* de E si il existe un élément a de E et un sous-espace vectoriel F de E tel que

$$\mathcal{F} = \{a + \overrightarrow{f} \mid \overrightarrow{f} \in F\}$$

On note alors $\mathcal{F} = a + F$. On dit que : le sev F est la *direction* du sous-espace affine $\mathcal{F}$;

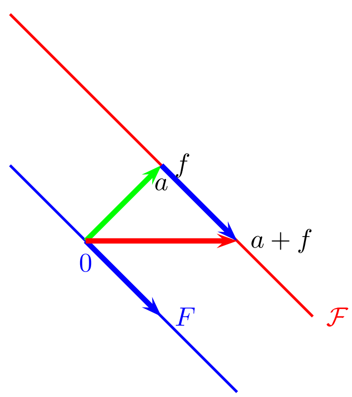


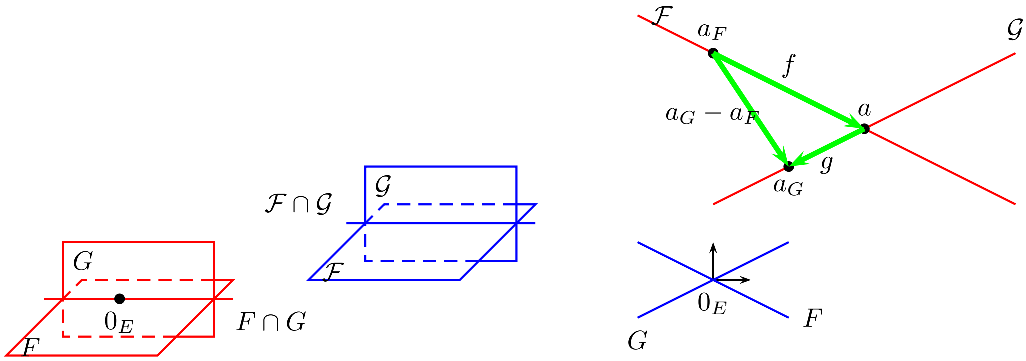
FIG. 13.2 – *Sous-espace affine*

LEMME 13.12 : **Indépendance d'un vecteur particulier**
Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de direction F, alors pour tout élément $a' \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = a' + F$.

DÉFINITION 13.11 : **Sous-espaces affines parallèles**
On dit que le sous-espace affine $\mathcal{G}$ de direction G est *parallèle* au sous-espace affine $\mathcal{F}$ de direction F lorsque $G \subset F$.

Remarque 133. Dans $\mathbb{R}^3$, une droite peut être parallèle à un plan, mais il est incorrect de dire qu'un plan est parallèle à une droite.

THÉORÈME 13.13 : **Intersection de sous-espaces affines**
Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de directions F et G. Si l'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ n'est pas vide, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction le sous-espace vectoriel $F \cap G$.



(a) Sous-espaces affines parallèles

(b) Sous-espaces affines supplémentaires dans le plan

FIG. 13.3 – *Intersection de sous-espaces affines*

PROPOSITION 13.14 : **Intersection de deux sous-espaces affines de directions supplémentaires**
Soient deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de directions F et G, avec

$$E = F \oplus G$$

Alors leur intersection est un singleton : $\exists a \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ tel que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{a\}$.

13.5 Systèmes libres, générateurs

DÉFINITION 13.12 : **Système de vecteurs**
Un système de vecteurs est un n-uplet $S = (x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E.

Remarque 134. On parle également de *famille finie* $(x_i)_{i \in I}$ de vecteurs où I est un ensemble fini.

DÉFINITION 13.13 : **Système libre**
On dit qu'un système de vecteurs $S = (x_1, \dots, x_n)$ est *libre* si et seulement si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n,\ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_K$$

Sinon, on dit que le système est *lié*.

Pour montrer qu'un système est libre :
1. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ tels que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E$;
2. ... donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_K$

PROPOSITION 13.15 : **Propriétés des systèmes liés**
Soit $S = (x_1, \dots, x_n)$ un système de vecteurs de E.
a. Si l'un des vecteurs est nul, le système est lié ;
b. Si l'un des vecteurs du système apparaît plus d'une fois dans S, le système est lié ;
c. Si le système est lié, l'un des vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs du système :

$$\exists i \in [1,n],\ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n) \in K^{n-1} \text{ tq } x_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} \lambda_j x_j$$

Exercice 13-10
Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $x_1 = (1,0,2)$, $x_2 = (1,1,1)$ et $x_3 = (1,1,1)$. Le système (x_1, x_2, x_3) est-il libre ?

Exercice 13-11

Dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère les deux fonctions définies par $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \sin x$. Montrer que le système (f,g) est libre.
Les trois fonctions définies par $f(x) = 1$, $g(x) = \cos^2 x$ et $h(x) = \cos 2x$ forment-elles un système libre?

Exercice 13-12

Dans l'espace $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère les fonctions définies par $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$f_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(kx) \end{array} \right.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, le système $S = (f_1, \dots, f_n)$ est libre. On calculera d'abord pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, l'intégrale:

$$\int_0^{2\pi} \sin(px)\, \sin(qx)\, \mathrm{d}x = \delta_{pq}$$

Exercice 13-13

Dans l'espace $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose pour $k \in \mathbb{N}$,

$$f_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{array} \right.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, le système $S = (f_1, \dots, f_n)$ est libre.

DÉFINITION 13.14 : **Systèmes générateurs**
On dit qu'un système de vecteurs $S = (x_1, \dots, x_n)$ est *générateur* d'un espace vectoriel E si et seulement si tout vecteur de E peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs du système:

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n \text{ tq } x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

Remarque 135. Cela signifie que $\mathrm{Vect}(S) = E$.

Pour montrer qu'un système est générateur:
1. Soit $x \in E$;
2. posons $\lambda_1 = \dots, \lambda_n = \dots$;
3. on a bien $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$.

Exercice 13-14

Dans l'espace $\mathbb{R}^2$, montrer que les trois vecteurs $x_1 = (1,1)$, $x_2 = (2,3)$ et $x_3 = (2,2)$ forment un système générateur.

DÉFINITION 13.15 : **Base**
On dit qu'un système de vecteurs $S = (x_1, \dots, x_n)$ est une *base* de l'espace vectoriel E si et seulement si:
1. le système S est libre;
2. le système S est générateur.

Remarque 136. Cela signifie que tout vecteur de E s'écrit de façon *unique* comme combinaison linéaire de vecteurs de S.

Pour montrer qu'un système est une base:
1. Montrons que S est libre ...
2. Montrons que S est générateur ...

DÉFINITION 13.16 : **Base canonique de K^n**
Si $E = K^n$, il existe une base privilégiée, la base canonique $e = (e_1, \dots, e_n)$ où

$$e_1 = (1,0,\dots,0),\ e_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots,\ e_n = (0,\dots,0,1)$$

Remarque 137. Ne pas parler de la « base canonique » d'un espace vectoriel quelconque ...

Exercice 13-15

Montrer que dans l'espace $\mathbb{R}^3$, le système formé des vecteurs $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (1,-1,1)$ et $e_3 = (0,1,1)$ est une base.

13.6 Applications linéaires

DÉFINITION 13.17 : **Application linéaire**
Soient E et F deux espaces vectoriels sur le *même* corps K et une application $u : E \mapsto F$. On dit que l'application u est *linéaire* si et seulement si :

1. $\forall (x,y) \in E^2$, $u(x+y) = u(x) + u(y)$;
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in K$, $u(\lambda x) = \lambda u(x)$.

PROPOSITION 13.16 : **Caractérisation des applications linéaires**
L'application u est linéaire si et seulement si :

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2, \forall (\lambda,\mu) \in K^2, u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)}$$

Remarque 138. Si l'application u est linéaire et si $e = (e_1, \dots, e_n)$ est une *base* de E, on connaît complètement l'application u si l'on connaît l'image par u des vecteurs de la base.

Exercice 13-16
Déterminer toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice 13-17
Déterminer toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13-18
Soit l'application

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right.$$

Montrer que ϕ est une application linéaire.

THÉORÈME 13.17 : **Image directe, réciproque d'un sev par une application linéaire**
Soit $u : E \mapsto F$ une application linéaire, V un sev de E et W un sev de F. Alors :

1. $u^{-1}(W)$ est un sev de E ;
2. $u(V)$ est un sev de F.

DÉFINITION 13.18 : **Image, noyau d'une application linéaire**
Soit $u : E \mapsto F$ une application linéaire. On appelle :

1. *noyau* de u : $\operatorname{Ker} u = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\} = u^{-1}(\{0_F\})$ (sev de E) ;
2. *image* de u : $\operatorname{Im} u = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = u(x)\} = u(E)$ (sev de F).

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ \cup & & \cup \\ \operatorname{Ker} u & & \operatorname{Im} u \end{array}$$

THÉORÈME 13.18 : **Caractérisation des applications linéaires injectives et surjectives**
Soit une application linéaire $u : E \mapsto F$.

1. L'application u est *injective* si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$;
2. L'application u est *surjective* si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$.

Exercice 13-19
Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y-z, x-y+2z) \end{array} \right.$$

Est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 13-20
Soit l'espace E des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. On considère l'application :

$$D : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \mapsto & f' \end{array} \right.$$

Montrer que l'application D est linéaire et déterminer son noyau.

Théorème 13.19 : Équation $u(x) = b$
Soit une application linéaire $u : E \mapsto F$. On considère un vecteur $b \in F$, et on note $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b$. Alors

1. si $b \notin \operatorname{Im} u$, $\mathcal{S}_E = \emptyset$;
2. si $b \in \operatorname{Im} u$, il existe une solution particulière $x_0 \in \mathcal{S}_E$. L'ensemble des solutions s'écrit alors

$$\mathcal{S}_E = \{x_0 + k \ ; \ k \in \operatorname{Ker} u\}$$

On dit que c'est un sous-espace *affine* de l'espace vectoriel E.

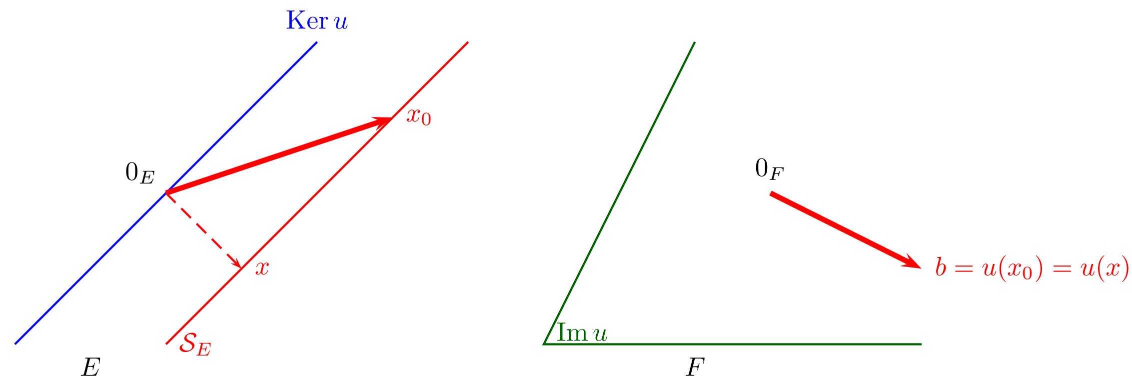


Fig. 13.4 – *Équation* $u(x) = b$

Théorème 13.20 : Composée d'applications linéaires
Soient E,F,G trois K-ev et $u : E \mapsto F$, $v : F \mapsto G$ deux applications linéaires. Alors $v \circ u : E \mapsto G$ est une application linéaire.

Exercice 13-21
Soient (u,v) les deux applications linéaires définies par :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (0,x) \end{array} \right. \qquad v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y,0) \end{array} \right.$$

Déterminer $u \circ v$ et $v \circ u$.

Exercice 13-22
Soient $u,v : E \mapsto E$ deux applications linéaires vérifiant $u \circ v = 0$. Comparer $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} u$.

Théorème 13.21 : Inverse d'une application linéaire bijective
Soit $u : E \mapsto F$ une application linéaire *bijective* et u^{-1} sa bijection réciproque. Alors $u^{-1} : F \mapsto E$ est une application linéaire.

Définition 13.19 : endomorphisme, Isomorphisme, automorphisme
Soient E, F deux K-ev. On note $L(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

1. Un *endomorphisme* de E est une application linéaire $u : E \mapsto E$. On note $L(E) = L(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes de E ;
2. Un *isomorphisme* de E vers F est une application linéaire $u : E \mapsto F$ *bijective* ;
3. Un automorphisme de E est un endomorphisme de E *bijectif*. On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Théorème 13.22 : $L(E,F)$ est un espace vectoriel
L'ensemble des applications linéaires d'un espace E vers un espace F, $\big(L(E,F), +, \cdot\big)$ est un K-ev.

13.7 Structure d'algèbre

DÉFINITION 13.20 : **Structure d'algèbre**
Soit un corps commutatif K et un ensemble E muni de deux lois de composition interne $+$, $\times$ et d'une loi de composition externe « $\cdot$ ». On dit que $(E, +, \times, \cdot)$ est une *algèbre* sur K si et seulement si :

1. $(E, +, .)$ est un K-ev ;
2. $(E, +, \times)$ est un anneau ;
3. $\forall \lambda \in K$, $\forall (x,y) \in E^2$, $(\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y) = \lambda \cdot (x \times y)$.

Remarque 139. Si E est une algèbre, alors $(E, +, \cdot)$ est un e.v. et $(E, +, \times)$ est un anneau.
En particulier, on dispose des règles de calcul dans ces deux structures (binôme, factorisation).

Exemples fondamentaux d'algèbres :

1. $(\mathbb{C}, +, \times, \cdot)$ (où $\cdot$ désigne la multiplication d'un complexe par un réel) est une $\mathbb{R}$-algèbre ;
2. $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}), +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.
3. $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), +, \times, \cdot)$ (suites réelles) est une $\mathbb{R}$-algèbre ;
4. $\mathbb{K}^n$ est une algèbre si l'on définit la multiplication par

$$(x_1, \dots, x_n) \times (y_1, \dots, y_n) = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n)$$

DÉFINITION 13.21 : **Sous-algèbre**
Soit une K-algèbre $(E, +, \times, \cdot)$ et une partie $A \subset E$ de cette algèbre. On dit que A est une sous-algèbre de E lorsque :

1. $0_E \in A$, $1_E \in A$;
2. A est stable par CL: $\forall (x,y) \in A^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in K^2$, $\lambda x + \mu y \in A$;
3. A est stable pour la loi $\times$: $\forall (x,y) \in A^2$, $x \times y \in A$.

Alors munie des lois restreintes, A est une algèbre.

DÉFINITION 13.22 : **Morphismes d'algèbres**
Soit $f : E \mapsto E'$ une application entre deux algèbres. On dit que f est un morphisme d'algèbres si et seulement si :

1. f est une application linéaire : $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in K^2$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$;
2. $\forall (x,y) \in E^2$, $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$;
3. $f(1_E) = 1_F$.

Remarque 140. En d'autres termes, un morphisme d'algèbres est un morphisme d'anneau et une application linéaire.

Exercice 13-23

Montrer que $\mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est une algèbre.

Exercice 13-24

Montrer que $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ défini par $f(z) = \overline{z}$ est un morphisme d'algèbres.

DÉFINITION 13.23 : **Application identité**
Soit E un K-ev on définit *l'identité* de E par :

$$\mathrm{id}_E : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & x \end{cases}$$

Soit $\alpha \in K$. On appelle *homothétie vectorielle* de rapport α l'application

$$h_\alpha = \alpha \, \mathrm{id}_E : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & \alpha \cdot x \end{cases}$$

C'est un endomorphisme de E.

THÉORÈME 13.23 : **Algèbre $L(E)$**
Soit E un K-ev. $(L(E), +, \circ, \cdot)$ est une K-algèbre.

THÉORÈME 13.24 : Groupe linéaire
$(\mathrm{GL}(E),\circ)$ est un groupe (non-commutatif) d'élément neutre id_E. C'est le *groupe linéaire*.

Remarque 141. En général, si $(u,v) \in \mathrm{GL}(E)^2$, on n'a pas $(u+v) \in \mathrm{GL}(E)$. Si $u \in \mathrm{GL}(E)$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}^\star$, $\lambda.u \in \mathrm{GL}(E)$ et $(\lambda.u)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}.u^{-1}$.

Remarque 142. Puisque l'algèbre $\big(L(E),+,\circ\big)$ est un anneau (non-commutatif), on a les formules de calcul suivantes : Si u et v sont deux endomorphismes tels que $\boxed{u \circ v = v \circ u}$, on dispose des formules suivantes :

1. **Binôme :** $\boxed{(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}}$;
2. **Factorisation :** $\boxed{u^n - v^n = (u-v) \circ (u^{n-1} + u^{n-2} \circ v + \cdots + u \circ v^{n-2} + v^{n-1})}$;
3. **Cas particulier de factorisation :** $\boxed{\mathrm{id} - u^n = (\mathrm{id} - u) \circ (\mathrm{id} + u + u^2 + \cdots + u^{n-1})}$.

Exercice 13-25

Soit un K-ev E et deux endomorphismes $u,v \in L(E)$.

a) Développer $(u+v)^2$;

b) Développer $(\mathrm{id} - u) \circ (\mathrm{id} + u)$;

c) Si $u^2 = 0$, montrer que $(\mathrm{id} - u)$ est bijective.

Exercice 13-26

On considère les deux endomorphismes de $E = \mathbb{R}^2$ suivants :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,0) \end{array} \right. \quad \text{et } v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (0,y) \end{array} \right.$$

Calculer $u \circ v$, $v \circ u$, u^2 et v^2. Conclusion ? Montrer que l'endomorphisme $(\mathrm{id} - u)$ est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 13-27

Soit un $\mathbb{R}$-ev E et un endomorphisme $u \in L(E)$ vérifiant :

$$u^3 + u^2 + 2\,\mathrm{id}_E = 0$$

Montrer que $u \in \mathrm{GL}(E)$ et déterminer son inverse u^{-1}. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver une condition suffisante sur le scalaire λ pour que l'endomorphisme $u + \lambda\,\mathrm{id}$ soit inversible.

Exercice 13-28

Soit un K-ev E et un endomorphisme $k \in \mathrm{GL}(E)$. On considère l'application

$$\phi_k : \left\{ \begin{array}{ccc} L(E) & \longrightarrow & L(E) \\ u & \longmapsto & k \circ u \end{array} \right.$$

Montrer que $\phi_k \in \mathrm{GL}\big(L(E)\big)$, puis que l'application

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(E) & \longrightarrow & \mathrm{GL}\big(L(E)\big) \\ k & \longmapsto & \phi_k \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes injectif.

Exercice 13-29

Soit un $\mathbb{R}$-ev E et un endomorphisme $u \in L(E)$. Montrer que :

a) $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Im}\, u^2 \iff E = \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Im}\, u$

b) $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2 \iff \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u = \{0\}$.

Exercice 13-30

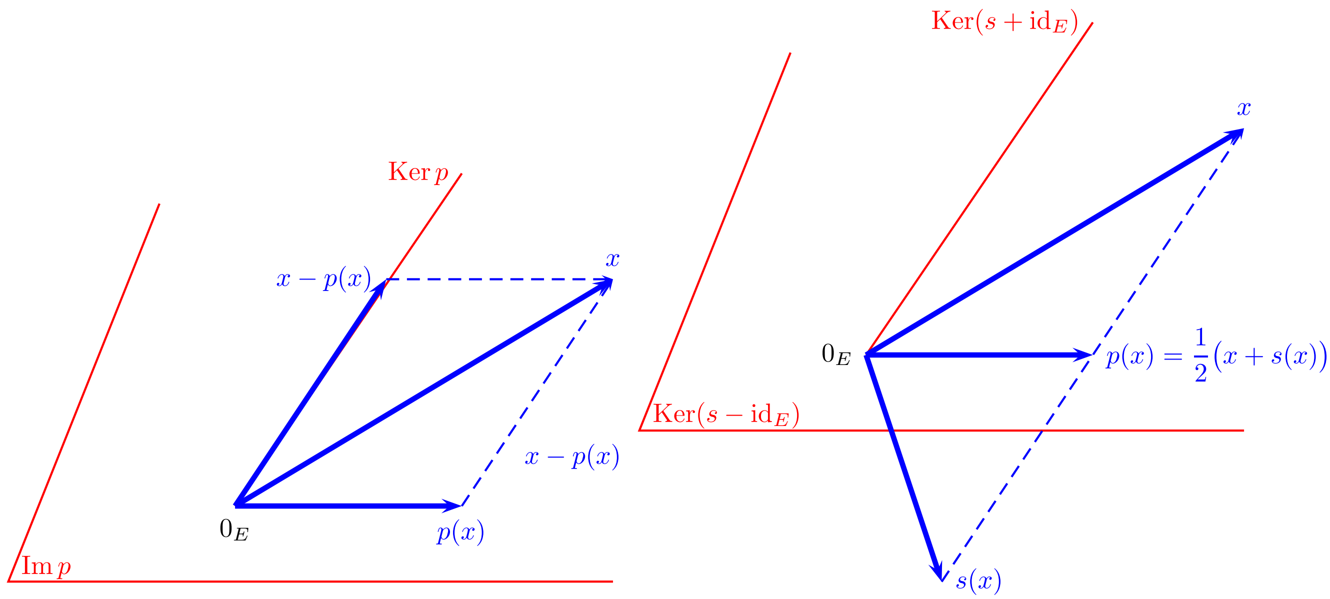
Soit un endomorphisme $u \in L(E)$ tel que $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que le système $S = \big(x,u(x),\dots,u^{n-1}(x)\big)$ soit libre.

13.8 Projecteurs

Définition 13.24 : Projecteurs
Soit un endomorphisme $p \in L(E)$. On dit que p est un *projecteur* si et seulement si il vérifie l'identité
$$p \circ p = p$$

Théorème 13.25 : Décomposition associée à un projecteur
Soit un projecteur p d'un espace vectoriel E. Alors

1. on a la caractérisation suivante de $\operatorname{Im} p$:
$$\operatorname{Im}(p) = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \operatorname{Ker}(\mathrm{id}_E - p)$$
2. $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ et la décomposition d'un vecteur $x \in E$ s'écrit
$$x = \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{\bigl[x - p(x)\bigr]}_{\in \operatorname{Ker} p}$$



(a) Décomposition associée à un projecteur

(b) Décomposition associée à une symétrie

Fig. 13.5 – *Projecteur, symétrie*

Théorème 13.26 : Projecteur associé à deux sev supplémentaires
Soient F et G deux sev de E supplémentaires : $E = F \oplus G$. Alors il existe un unique projecteur p vérifiant :
$$F = \operatorname{Im} p \quad G = \operatorname{Ker} p$$
On dit que p est le projecteur sur le sous-espace F parallèlement au sous-espace G.

Exercice 13-31

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces $E_1 = \operatorname{Vect}(1,1,1)$ et $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Déterminer l'expression analytique du projecteur sur E_2 parallèlement à E_1.

Exercice 13-32

Soit un projecteur p d'un espace vectoriel E. Montrer que l'endomorphisme $(\mathrm{id} - p)$ est aussi un projecteur de E et que l'on a $\operatorname{Ker}(\mathrm{id} - p) = \operatorname{Im} p$, $\operatorname{Im}(\mathrm{id} - p) = \operatorname{Ker} p$.

Exercice 13-33

Soit un projecteur p d'un espace vectoriel E et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit l'endomorphisme $u = p + \lambda\,\mathrm{id}_E$. Exprimer pour $n \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme u^n à l'aide de p et de id_E.

Exercice 13-34

Soient deux projecteurs p et q d'un espace vectoriel E. Montrer que l'endomorphisme $(p+q)$ est un projecteur de E si et seulement si l'on a $p \circ q = q \circ p = 0$. Si c'est le cas, montrer qu'alors $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\,p \oplus \mathrm{Im}\,q$ et que $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}\,p \cap \mathrm{Ker}\,q$.

DÉFINITION 13.25 : **Symétries**

Soit un endomorphisme $s \in L(E)$ de E. On dit que cet endomorphisme est une *symétrie vectorielle* si et seulement s'il vérifie :

$$s \circ s = \mathrm{id}_E$$

THÉORÈME 13.27 : **Décomposition associée à une symétrie**

On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit une symétrie vectorielle s . Alors

1. $E = E_1 \oplus E_2$ où $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ (vecteurs invariants) et $E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$ (vecteurs transformés en leur opposé) ;
2. si p est la projection sur E_1 parallèlement à E_2, on a $\mathrm{id} + s = 2p$.

Exercice 13-35

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, déterminer l'expression analytique de la symétrie par rapport au sous-espace E_1 parallèlement au sous-espace E_2 où :

$$E_1 = \mathrm{Vect}\big((1,0,0),(1,1,1)\big) \text{ et } E_2 = \mathrm{Vect}(1,2,0)$$

Exercice 13-36

Soit un $\mathbb{R}$-ev E et un endomorphisme $u \in L(E)$. Soient deux réels distincts $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$(u - a\,\mathrm{id}) \circ (u - b\,\mathrm{id}) = 0$$

a) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - b\,\mathrm{id})$.

b) Déterminer la restriction de u à $\mathrm{Ker}(u - a\,\mathrm{id})$ et à $\mathrm{Ker}(u - b\,\mathrm{id})$.

Exercice 13-37

On considère un projecteur p d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et un réel $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Soit un vecteur $b \in E$. Montrer que l'équation vectorielle

$$(E) \quad p(x) + \lambda x = b$$

possède une unique solution $x \in E$.

13.9 Formes linéaires

DÉFINITION 13.26 : **Formes linéaires, dual**

Soit un K-ev E. On appelle *forme linéaire* sur E, une application linéaire $\phi : E \mapsto K$. On note $E^\star = L(E,K)$ l'ensemble des formes linéaires sur E. $E^\star$ s'appelle l'espace *dual* de l'espace E.

DÉFINITION 13.27 : **Hyperplan**

On appelle *hyperplan* de E, le noyau d'une forme linéaire non-nulle :

$$H = \mathrm{Ker}\,\phi$$

Exercice 13-38

Déterminer toutes les formes linéaires de l'espace $\mathbb{R}^3$. Quels-sont les hyperplans de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 13-39

Soit l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et l'application

$$\delta : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{cases}$$

Vérifier que δ est une forme linéaire sur E et déterminer un supplémentaire de $H = \operatorname{Ker}\delta$.

THÉORÈME 13.28 : **Caractérisation des hyperplans**
Soit H un sev d'un K-ev E tel que $H \neq E$. Alors H est un hyperplan si et seulement s'il existe un vecteur $a \in E$ tel que H admette la droite vectorielle $\operatorname{Vect}(a)$ comme supplémentaire :

$$\big(H \text{ est un hyperplan }\big) \iff \big(\forall a \in E \setminus H, \quad E = H \oplus \operatorname{Vect}(a)\big)$$

Exercice 13-40

Soit $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y + z = t\}$. Déterminer un supplémentaire de F.

Exercice 13-41

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $H = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$. Déterminer un supplémentaire de H dans E.

THÉORÈME 13.29 : **Deux formes linéaires sont proportionnelles si et seulement si elles ont même noyau**
Soient ϕ et ψ deux formes linéaires non-nulles sur E. Alors le système (ϕ,ψ) est lié dans $E^\star$ si et seulement si $\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Ker}\psi$.

Chapitre 14

Polynômes

14.1 Définitions

Dans ce chapitre, $(\mathbb{K}, + ,\times)$ désigne un corps commutatif (pour nous ce sera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 14.1 : **Polynôme**
Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est suite $(a_0,a_1,\dots,a_n,0,\dots)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang. On définit les opérations suivantes sur les polynômes. Soit $P = (a_0,a_1,\dots,a_n,\dots)$ et $Q = (b_0,b_1,\dots,b_n,\dots)$ deux polynômes. On pose :

$$P + Q = (a_0 + b_0,a_1 + b_1,\dots,a_n + b_n,\dots)$$

$$\lambda.P = (\lambda a_0,\lambda a_1,\dots,\lambda a_n,\dots)$$

$$P \times Q = (c_0,c_1,\dots,c_n,\dots)$$

où les coefficients c_n du produit sont définis par la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Théorème 14.1 : **L'algèbre des polynômes**
$\big(\mathbb{K}[X],+,\times,\cdot\big)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. Le vecteur nul est le polynôme $0 = (0,0,\dots)$ et l'élément neutre pour $\times$ est le polynôme
$1 = (1,0,\dots)$.

Remarque 143. En particulier, $(\mathbb{K}[X], + ,\times)$ est un anneau commutatif, dans lequel on dispose de la formule du binôme. On sait également que $\big(\mathbb{K}[X], + ,\cdot\big)$ est un $\mathbb{K}$-ev.

Notation définitive

Un polynôme $P = (a_0,a_1,\dots,a_n,0,\dots)$ s'écrira par la suite : $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$. On identifiera un scalaire $\lambda \in K$ avec le polynôme constant $P(X) = (\lambda,0,\dots) = \lambda$.

Définition 14.2 : **Degré, terme dominant**
Soit un polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ avec $a_n \neq 0$.
- On appelle *degré* du polynôme P, l'entier n noté $\deg P$;
- Par convention, le degré du polynôme nul vaut $-\infty$;
- on appelle *terme dominant* de P, le monôme a_nX^n ;
- lorsque $a_n = 1$, on dit que le polynôme P est *normalisé* ou *unitaire*.

Théorème 14.2 : **Degré d'un produit, d'une somme**

1. $\deg\big(P + Q\big) \le \max\big(\deg P, \deg Q\big)$
2. $\deg\big(PQ\big) = \deg P + \deg Q$

Remarque 144. La somme de polynômes de degré n peut être un polynôme de degré strictement inférieur à n si les termes dominants s'annulent. Lorsque $\deg P \neq \deg Q$, on a toujours $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$. Si l'on a k polynômes $(P_1,\dots,P_k)$ tous de degré n, pour montrer que la combinaison linéaire $Q=\sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$ est de degré n, on utilise le théorème précédent pour justifier que $\deg Q \le n$ et on calcule le coefficient de X^n du polynôme Q, en justifiant qu'il est non nul.

Théorème 14.3 : **L'anneau des polynômes est intègre**
Soient trois polynômes $(P,Q,R)\in\mathbb{K}[X]^3$.

1. si $PQ=0$, alors $P=0$ ou $Q=0$;
2. si $PQ=PR$, et si $P\neq 0$, alors $Q=R$.

Théorème 14.4 : **Polynômes inversibles**
Les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non-nuls.

Théorème 14.5 : **Espace des polynômes de degré inférieur à n**
On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. Le système $\left(1,X,X^2,\dots,X^n\right)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée *base canonique* de $\mathbb{K}_n[X]$.

Théorème 14.6 : **Polynômes de degrés étagés**
On considère un système $S=(P_1,\dots,P_n)$ de polynômes non-nuls de degrés tous distincts. Alors S est un système libre de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 14-1
Soit $n\ge 1$ et pour $k\in[0,n]$, $P_k=X^k(1-X)^{n-k}$. Montrer que le système $\left(P_0,\dots,P_n\right)$ est libre dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Définition 14.3 : **Composition des polynômes**
Si $P(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^n a_kX^k$ et $Q\in\mathbb{K}[X]$ on définit le polynôme composé par la formule suivante :

$$P\circ Q=\sum_{k=0}^n a_kQ^k$$

Remarque 145. On a $\deg(P\circ Q)=\deg P\times\deg Q$.

Exercice 14-2
Soit un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P=P\circ(-X)$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P=Q\circ(X^2)$.

Exercice 14-3
On considère le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par

$$P=(1+\lambda X)(1+\lambda^2X)\dots(1+\lambda^nX)$$

où $\lambda\in\mathbb{C}$, vérifie $|\lambda|\neq 1$. Déterminer les coefficients du polynôme P.

Exercice 14-4
Déterminer les polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P\circ P=P$.

14.2 Arithmétique des polynômes

Théorème 14.7 : **Division euclidienne**
Soient A,B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $B\neq 0$. Alors il existe un unique couple (Q,R) de polynômes vérifiant :

1. $A=BQ+R$
2. $\deg R<\deg B$

Exercice 14-5
Soit $A=X^7-2X+1$ et $B=X^2+1$ deux polynômes à coefficients réels. Effectuer la division euclidienne de A par B.

Exercice 14-6

On dit qu'une partie $\mathcal{I}$ de $\mathbb{K}[X]$ est un *idéal* de l'anneau $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ lorsque :

- $\mathcal{I}$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{K}[X],+)$;
- $\mathcal{I}$ est *absorbant* : $\forall A \in \mathcal{I}$, $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $A \times P \in \mathcal{I}$.

Montrer que tout idéal de l'anneau $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est engendré par un polynôme : $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(P) = \{Q \times P \ ; \ Q \in \mathbb{K}[X]\}$$

On dit que l'anneau $(\mathbb{K}[X],+,\times)$ est *principal*. Cette notion correspond aux sous-groupes de l'anneau $(\mathbb{Z},+,\times)$ utilisés en arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

Définition 14.4 : Divisibilité
Soient A,B deux polynômes. On dit que A divise B ssi il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = AQ$.

Exercice 14-7

Cette notion a un intérêt pratique important : si un polynôme A divise un polynôme B, cela signifie que l'on peut *mettre en facteur* le polynôme A dans le polynôme B.

Théorème 14.8 : Polynômes associés
Soient deux polynômes $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]$ non-nuls.

$$(P/Q \text{ et } Q/P) \iff (\exists \lambda \in K \setminus \{0\} \text{ tq } Q = \lambda P)$$

On dit alors que les deux polynômes P et Q sont *associés*.

Définition 14.5 : Congruences
Soit un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non-nul. Soient deux polynômes $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$. On dit que A est *congru* à B modulo P et l'on note

$$A \equiv B \bmod (P)$$

ssi A et B ont même reste dans la division euclidienne par P.

Théorème 14.9 : Caractérisation des congruences
Soient un polynôme non-nul $P \in \mathbb{K}[X]$ et deux polynômes $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$,

$$\big(A \equiv B \bmod (P)\big) \iff \big(P/(B-A)\big)$$

Théorème 14.10 : Propriétés des congruences
On suppose que $A \equiv B \bmod (P)$ et $A' \equiv B' \bmod (P)$. Alors :

- $A + A' \equiv B + B' \bmod (P)$.
- $AA' \equiv BB' \bmod (P)$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n \equiv B^n \bmod (P)$.

Exercice 14-8

Déterminer le reste de la division euclidienne de $A = X^{2000} - X^3 + X$ par $B = X^2 + 1$, puis par $C = X^2 + X + 1$.

Exercice 14-9

Soit un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $(P - X) \ / \ (P \circ P - X)$.

Proposition 14.11 : Théorème d'Euclide
Soient deux polynômes non nuls $(A,B) \in \mathbb{K}[X]$. On effectue la division euclidienne de A par B :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg R < \deg B \end{cases}$$

Soit un polynôme $D \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$\Big(\underbrace{\begin{cases} D/A \\ D/B \end{cases}}_{(i)}\Big) \iff \Big(\underbrace{\begin{cases} D/B \\ D/R \end{cases}}_{(ii)}\Big)$$

Définition 14.6 : Algorithme d'Euclide, PGCD
On considère deux polynômes non nuls $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$. On définit une suite (R_n) de polynômes en posant $R_0 = A$, $R_1 = B$ et $\forall k \geq 1$,

$$R_{k-1} = Q_k R_k + R_{k+1},\ \deg(R_{k+1}) < \deg(R_k)$$

Comme la suite d'entiers $\big(\deg(R_k)\big)$ est strictement décroissante, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $R_n \neq 0$ et $R_{n+1} = 0$. On note $A \wedge B$ le polynôme R_n normalisé. On dit que le polynôme $\delta = A \wedge B$ est le pgcd des polynômes A et B.

Proposition 14.12 : Caractérisation du pgcd
Soient deux polynômes non nuls $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$ et δ leur pgcd. Alors :

1. $\begin{cases} \delta / A \\ \delta / B \end{cases}$;
2. Si $D \in \mathbb{K}[X]$, $\begin{cases} D/A \\ D/B \end{cases} \Rightarrow D/\delta$.

En d'autres termes, δ est le « plus grand » commun diviseur normalisé des polynômes A et B.

Proposition 14.13 : Propriété du pgcd
Soient deux polynômes non nuls $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$. Alors en notant δ leur pgcd, il existe deux polynômes $(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que

$$UA + VB = \delta$$

Remarque 146. On trouve en pratique un tel couple de polynômes (U,V) en utilisant l'algorithme d'Euclide et en éliminant les restes successifs. Si l'on veut écrire une procédure calculant ce couple (U,V), on pourra adapter l'algorithme vu pour les entiers.

Exercice 14-10

Déterminer le pgcd des polynômes $A = X^3 + X^2 + 2$ et $B = X^2 + 1$. Trouver ensuite un couple (U,V) tel que $AU + BV = \delta$.

Exercice 14-11

On considère deux entiers non nuls $(a,b) \in \mathbb{N}^{\star 2}$. On note $\delta = a \wedge b$ leur pgcd. Montrer, en utilisant l'algorithme d'Euclide que

$$(X^a - 1) \wedge (X^b - 1) = X^\delta - 1$$

Définition 14.7 : Polynômes premiers entre eux
On dit que deux polynômes non nuls A et B sont premiers entre eux lorsque $A \wedge B = 1$.

Théorème 14.14 : Théorème de Bezout
Soient deux polynômes non nuls A et B.

$$A \wedge B = 1 \Longleftrightarrow \exists (U,V) \in \mathbb{K}[X]^2 \text{ tels que } 1 = AU + BV$$

Théorème 14.15 : Théorème de Gauss
Soient trois polynômes non nuls $(A,B,C) \in \mathbb{K}[X]^3$.

$$\begin{cases} A/BC \\ A \wedge B = 1 \end{cases} \Rightarrow A/C$$

Remarque 147. On démontre ensuite de la même façon les théorèmes vus en arithmétique dans $\mathbb{Z}$. En particulier :

1. $(\lambda A) \wedge (\lambda B) = \lambda (A \wedge B)$;
2. $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$;
3. $\begin{cases} A \wedge B = 1 \\ A \wedge C = 1 \end{cases} \Rightarrow A \wedge (BC) = 1$;
4. Si $A \wedge B = 1$, alors $\forall (k,p) \in \mathbb{N}^{\star 2}$, $A^p \wedge B^k = 1$;
5. Si $\delta = A \wedge B$, alors on peut écrire $A = \delta A'$, $B = \delta B'$ avec $A' \wedge B' = 1$;

6. $\begin{cases} A/C \\ B/C \\ A \wedge B = 1 \end{cases} \Rightarrow (AB)/C.$

Exercice 14-12

Montrez que si $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ sont deux scalaires distincts, alors pour tous entiers $k \geq 1$ et $p \geq 1$, les polynômes $A = (X-a)^k$ et $B = (X-b)^p$ sont premiers entre eux.

DÉFINITION 14.8 : **PPCM**
Soient deux polynômes (A,B) non nuls. Il existe un unique polynôme normalisé $\mu \in \mathbb{K}[X]$ tel que

1. A/μ, B/μ ;
2. $\forall M \in \mathbb{K}[X]$, $\begin{cases} A/M \\ B/M \end{cases} \Rightarrow \mu/M$

On appelle plus grand commun multiple des polynômes (A,B) ce polynôme μ, et on le note

$$\mu = A \vee B$$

Remarque 148. On montre que $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$, ce qui permet de définir le ppcm de n polynômes.

THÉORÈME 14.16 : **Relation entre PPCM et PGCD**
Soient deux polynômes non nuls $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$.

1. Si $A \wedge B = 1$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ tel que $AB = \lambda(A \vee B)$;
2. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ tel que $AB = \lambda.(A \wedge B) \times (A \vee B)$.

14.3 Fonctions polynômiales. Racines d'un polynôme

DÉFINITION 14.9 : **Fonction polynômiale**
Soit un polynôme $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ de $\mathbb{K}[X]$. On définit à partir des coefficients de P, la *fonction polynômiale* associée :

$$\widetilde{P} : \begin{cases} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \end{cases}$$

THÉORÈME 14.17 : **Les lois sur $\mathbb{K}[X]$ correspondent à celles sur $\mathcal{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$**
Soient $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. On a les propriétés suivantes :

- $\widetilde{P \times Q} = \widetilde{P} \times \widetilde{Q}$;
- $\lambda\widetilde{P + \mu} Q = \lambda\widetilde{P} + \mu\widetilde{Q}$;
- $\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$

Remarque 149. En d'autres termes, l'application

$$\phi : \begin{cases} \big(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot\big) & \longrightarrow & \big(\mathcal{F}(\mathbb{K},\mathbb{K}), +, \times, \cdot\big) \\ P & \longmapsto & \widetilde{P} \end{cases}$$

est un morphisme d'algèbres.

DÉFINITION 14.10 : **Racine d'un polynôme**
Soit un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit qu'un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est une *racine* de P lorsque $\widetilde{P}(\alpha) = 0$.

Exercice 14-13

Trouver un algorithme qui permet de trouver toutes les racines rationnelles d'un polynôme à coefficients rationnels. Appliquer cet algorithme pour trouver toutes les racines rationnelles du polynôme $P = 3X^3 - X + 1$.

THÉORÈME 14.18 : **Factorisation d'une racine**
Soit un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ et un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors le scalaire α est racine du polynôme P si et seulement si l'on peut mettre en facteur le polynôme $(X - \alpha)$ dans le polynôme P :

$$\Big(\widetilde{P}(\alpha) = 0\Big) \iff \Big((X-\alpha)/P\Big)$$

Théorème 14.19 : **Un polynôme non nul de degré inférieur à n admet au plus n racines**
Soit un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Si le polynôme P admet au moins $(n+1)$ racines distinctes, alors il est nul.

Remarque 150. Ce théorème est très utilisé pour montrer des unicités.

Exercice 14-14

Soient deux polynômes $(P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$. Si $\widetilde{P}(0) = \widetilde{Q}(0), \widetilde{P}(1) = \widetilde{Q}(1)$ et $\widetilde{P}(2) = \widetilde{Q}(2)$, montrer que $P = Q$.

Exercice 14-15

Trouver les fonctions polynômiales à coefficients réels qui sont périodiques.

Théorème 14.20 : **Relation entre polynômes et fonctions polynômes**
Si le corps $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $\left(\widetilde{P} = 0\right) \iff \left(P = 0\right)$.

Remarque 151. C'est ce théorème qui permet de confondre un polynôme et sa fonction polynômiale associée. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'application

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{F}(K,K) \\ P & \mapsto & \widetilde{P} \end{array} \right.$$

est un morphisme d'algèbres injectif.

Exercice 14-16

Soit le polynôme $P(X) = X^{2n} + X^n + 1 \in \mathbb{C}[X]$. Trouver une CNS pour que le polynôme P soit divisible par le polynôme $X^2 + X + 1$.

Algorithme de Hörner

En Maple, un polynôme A est représenté par la liste de ses coefficients :

$$a = [a_1, \dots, a_n] \quad A = a_1 + a_2 X + \dots + a_n X^{n-1}$$

Si $x \in \mathbb{K}$, l'idée de l'algorithme d'Hörner est d'écrire :

$$\widetilde{A}(x) = \Big(\cdots \big(a_n * x + a_{n-1}\big) * x + \cdots \Big) * x + a_1$$

1. **Arguments :** a (liste) x (scalaire)
2. **Variables :** *valeur* (scalaire), n (entier)
3. **Initialisation :**
   - $n \leftarrow$ longueur(l)
   - $valeur \leftarrow a[n]$
4. **Corps :** Pour i de 1 à $n-1$ faire :
   - $valeur \leftarrow valeur * x + a[n-i]$
5. **Fin :** retourner *valeur*.

On montre par récurrence qu'après le ième passage dans la boucle for, la variable *valeur* contient

$$valeur_i = a_n x^i + a_{n-1} x^{i-1} + \dots + a_{n-i}$$

Après le dernier passage, *valeur* contient donc $\widetilde{A}(x)$. Cet algorithme nécessite $n-1$ multiplications, lorsque $\deg A = n-1$.

14.4 Dérivation, formule de Taylor

Définition 14.11 : **Dérivée des polynômes**
Soit un polynôme $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p$. On définit le *polynôme dérivé* de P par

$$P' = a_1 + 2a_2 X + \dots + p a_p X^{p-1}$$

On définit ensuite par récurrence, les polynômes $P'', \dots, P^{(k)}$.

Remarque 152. La définition précédente est purement algébrique. Elle correspond à la dérivée des fonctions polynômes lorsque le corps $\mathbb{K}$ vaut $\mathbb{R}$. Si $P = (p_n)$, alors $P' = \big((n+1)p_{n+1}\big)$.

Théorème 14.21 : Dérivée d'un produit de polynômes
L'application

$$D : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{cases}$$

est linéaire et vérifie

$$(PQ)' = P'Q + PQ'$$

Remarque 153.

- $\deg(P') = \begin{cases} -\infty & \text{si } \deg(P) \leq 0 \\ \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) \geq 1 \end{cases}$.
- $\mathrm{Ker}(D) = \mathbb{K}_0[X]$, $\mathrm{Im}(D) = \mathbb{K}[X]$, donc l'endomorphisme D est surjectif mais pas injectif.
- $\mathrm{Ker}(D^n) = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Théorème 14.22 : Formule de Leibniz
Soient deux polynômes $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. On a la formule suivante pour la dérivée du polynôme produit :

$$\boxed{(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}}$$

Remarque 154. Si l'on considère un polynôme P, on peut exprimer ses coefficients à l'aide des dérivées de la fonction polynômiale en 0 :

$$\begin{aligned}
P &= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n & P(0) &= a_0 \\
P' &= a_1 + 2a_2 X^2 + \cdots + n a_n X^{n-1} & P'(0) &= a_1 \\
P'' &= 2a_2 + 2 \times 3X + \cdots + n(n-1) a_n X^{n-2} & P''(0) &= 2a_2 \\
&\vdots & & \vdots \\
P^{(k)} &= k! a_k + \cdots + n(n-1)\dots(n-k+1) a_n X^{n-k} & P^{(k)}(0) &= k! a_k \\
&\vdots & & \vdots \\
P^{(n)} &= n! a_n & P^{(n)}(0) &= n! a_n
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$. Donc on peut écrire

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

La formule de Taylor est une généralisation de cette idée.

Lemme 14.23 : Dérivées de $(X-a)^n$
Soit $a \in \mathbb{K}$. On exprime pour $k \in \mathbb{N}$, la dérivée $k$ième du polynôme $(X-a)^n$:

$$\Big[(X-a)^n\Big]^{(k)} = \begin{cases} 0_{\mathbb{K}[X]} & \text{si } k > n \\ n! & \text{si } k = n \\ n(n-1)\dots(n-k+1)(X-a)^{n-k} & \text{si } k < n \end{cases}$$

Théorème 14.24 : Formule de Taylor
Soit un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n et un scalaire $a \in \mathbb{K}$. On obtient la décomposition du polynôme P sur la base $\mathcal{B} = \left(1, \frac{(X-a)}{1!}, \dots, \frac{(X-a)^n}{n!}\right)$:

$$\boxed{P(X) = P(a) + P'(a)(X-a) + \cdots + P^{(n)}(a)\frac{(X-a)^n}{n!}}$$

Théorème 14.25 : **Deuxième formule de Taylor**
Lorsque le corps $\mathbb{K}$ vaut $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (corps infini), pour tout scalaire $a \in \mathbb{K}$ et tout polynôme P de degré n, on a la décomposition du polynôme $P \circ (X - a)$ sur la base canonique :

$$\boxed{P(X+a) = P(a) + P'(a)X + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}X^n}$$

Théorème 14.26 : **Troisième formule de Taylor**
Soit un polynome $P \in \mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), avec $n = \deg(P)$. Soit $a \in \mathbb{K}$. On a la formule de Taylor

$$\boxed{P(X+a) = P + aP' + \frac{a^2}{2!}P'' + \dots + \frac{a^n}{n!}P^{(n)}}$$

Définition 14.12 : **Ordre de multiplicité d'une racine**
Soit un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est *racine d'ordre k exactement* de P ssi $(X - \alpha)^k$ divise P et $(X - \alpha)^{k+1}$ ne divise pas P.

Remarque 155. Cela signifie que l'on peut mettre en facteur le polynôme $(X-\alpha)^k$ dans P, mais pas le polynôme $(X - \alpha)^{k+1}$. On dit que α est racine d'ordre au moins k lorsque $(X - \alpha)^k$ divise P.

Théorème 14.27 : **Caractérisation des racines multiples**
Soit un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ et un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$. On peut voir si α est une racine multiple de P en calculant les valeurs $P(\alpha)$, $P'(\alpha)$ ... :
- Le scalaire α est racine de P d'ordre k au moins si et seulement si
  1. $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0_{\mathbb{K}}$.
- le scalaire α est racine de P d'ordre k exactement si et seulement si :
  1. $P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$;
  2. $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Remarque 156. Retenons qu'une formule de Taylor permet d'obtenir le reste et le quotient de la division d'un polynôme P par $(X - a)^k$.

Exercice 14-17
Trouver le reste de la division du polynôme $P = X^n + 1$ ($n \geq 2$) par le polynôme $(X - 1)^3$.

Exercice 14-18
On considère le polynôme $P(X) = (X + 1)^n - X^n - 1 \in \mathbb{C}[X]$ où l'entier n est strictement positif. Trouver une CNS sur n pour que P admette une racine multiple.

Exercice 14-19
Montrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ admet une racine multiple si et seulement si les polynômes P et P' ne sont pas premiers entre eux. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que le polynôme $P = X^7 - X + \lambda$ admette une racine multiple.

14.5 Relations coefficients-racines pour les polynômes scindés

Définition 14.13 : **Polynôme scindé**
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, on dit que P est scindé si P s'écrit

$$P = a_p \prod_{i=0}^{p} (X - \alpha_i)$$

où les scalaires α_i sont les racines de P comptées avec leur ordre de multiplicité et a_p est le coefficient dominant du polynôme P.

La principale différence entre les corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ concernant les polynômes provient du théorème suivant :

Théorème 14.28 : **Théorème de d'Alembert**
Soit un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg P \geq 1$. Alors P possède au moins une racine complexe $\alpha \in \mathbb{C}$.

Remarque 157. On en déduit que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé. Ce résultat est faux pour $\mathbb{R}[X]$ comme le montre l'exemple $P(X) = X^2 + 1$.

Exercice 14-20

Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si P est scindé, alors P' est également scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Remarque 158. Le résultat précédent est faux dans un corps quelconque. Par exemple, $P(X) = X^3 - X = X(X-1)(X+1) \in \mathbb{Q}[X]$ est scindé dans $\mathbb{Q}[X]$, mais $P'(X) = 3X^2 - 1$ n'est pas scindé dans $\mathbb{Q}[X]$, car les racines de P' sont $1/\sqrt{3}$ et $-1/\sqrt{3}$ qui ne sont pas rationnels.

Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé

Remarque 159. Commençons par un exemple simple avec un polynôme de degré 2, $P(x) = \lambda(X-\alpha_1)(X-\alpha_2) = a_2X^2 + a_1X + a_0$. En développant et en identifiant les coefficients, on trouve que

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{a_1}{a_2} \text{ et } \alpha_1\alpha_2 = \frac{a_0}{a_2}$$

Définition 14.14 : **Fonctions symétriques élémentaires des racines**

Considérons maintenant un polynôme scindé $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré p, s'écrivant

$$P = a_pX^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_0$$

Notons $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_p$ ses racines. On définit les *fonctions symétriques élémentaires des racines* :

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_p \\
\sigma_2 &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{p-1}\alpha_p \\
&\dots \\
\sigma_k &= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le p} a_{i_1}\dots a_{i_k} \\
&\dots \\
\sigma_n &= \alpha_1\dots\alpha_p
\end{aligned}$$

Théorème 14.29 : **Relations coefficients-racines**

Les formules suivantes relient les coefficients d'un polynôme scindé avec ses racines :

$$\forall k \in [1,n], \quad \boxed{\sigma_k = (-1)^k\frac{a_{p-k}}{a_p}}$$

Remarque 160. Un célèbre résultat de Galois dit qu'il n'existe pas d'algorithme qui permet d'exprimer les racines d'un polynôme quelconque à coefficients réels de degré supérieur à 5 à partir des coefficients du polynôme. C'est la principale limitation sur les calculs des polynômes et fractions rationnelles en calcul formel.
Par contre, on montre que toute expression polynômiale en les racines d'un polynôme qui est invariante par permutations peut s'exprimer à l'aide des fonctions symétriques élémentaires, c'est à dire à l'aide des coefficients du polynôme. Par exemple, la somme et le produit des racines s'expriment facilement sans calculer explicitement celles-ci. De même, si $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ sont les racines d'un polynôme de degré n, on peut exprimer les quantités

$$S_k = \alpha_1^k + \cdots \alpha_n^k \quad (k \in \mathbb{N})$$

à l'aide des coefficients du polynôme P.

Exercice 14-21

Trouver $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$a+b+c = 1, \quad a^2+b^2+c^2 = 3 \quad a^3+b^3+c^3 = 1$$

14.6 Décomposition d'un polynôme en facteurs irréductibles

Définition 14.15 : **Polynômes irréductibles**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, un polynôme non constant. On dit que P est *irréductible* ssi $P = QH$ implique $Q \in \mathbb{K}$ ou $H \in \mathbb{K}$.

Remarque 161. Cette notion correspond aux nombres premiers en arithmétique des entiers.

THÉORÈME 14.30 : **Les polynômes de degré 1 sont irréductibles**
Quel que soit le corps $\mathbb{K}$, pour tout scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$, le polynôme $P = X - \alpha$ est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

THÉORÈME 14.31 : **Décomposition d'un polynôme en facteurs irréductibles**
Soit un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors P s'écrit de façon unique à l'ordre près comme produit de polynômes irréductibles normalisés dans $\mathbb{K}[X]$:

$$P = \lambda P_1 \times \cdots \times P_n \text{ où } \lambda \in \mathbb{K}^\star$$

THÉORÈME 14.32 : **Décomposition dans** $\mathbb{C}[X]$

1. Dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes irréductibles unitaires sont les polynômes de degré 1 : $X - \alpha$, $(\alpha \in \mathbb{C})$;
2. Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ s'écrit de façon unique (à l'ordre près) sous la forme :

$$P(X) = \lambda(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)\dots(X - \alpha_n)$$

(les complexes α_i ne sont pas forcément distincts).

THÉORÈME 14.33 : **Décomposition dans** $\mathbb{R}[X]$

1. Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles normalisés sont :
   (a) Les polynômes de degré 1 de la forme $(X - \alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$;
   (b) Les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif de la forme $X^2 + pX + q$, avec $(p^2 - 4q < 0)$.
2. Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ s'écrit de façon unique (à l'ordre près) sous la forme :

$$P(X) = \lambda(X - \alpha_1)\dots(X - \alpha_p)(X^2 + p_1X + q_1)\dots(X^2 + p_rX + q_r)$$

où tous les facteurs sont irréductibles normalisés et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque 162. D'après le théorème précédent, un polynôme bicarré $X^4 + pX^2 + q$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Pour obtenir sa factorisation lorsque $p^2 - 4q < 0$, regrouper le terme en X^4 et le terme constant, faire apparaître un début de carré, puis utiliser l'identité $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

Exercice 14-22
On considère les polynômes $P(X) = X^{2n} - 1$ et $Q(X) = X^{2n+1} - 1$. Factoriser P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Chapitre 15

Intégration

15.1 Construction de l'intégrale

15.1.1 Intégrale d'une fonction en escalier

DÉFINITION 15.1 : **Subdivision**
On appelle subdivision σ du segment $[a,b]$ tout sous-ensemble fini de $[a,b]$ contenant les éléments a et b. On ordonnera ces éléments et l'on écrira $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ les éléments de cette subdivision.

Remarque 163. Si σ_1 et σ_2 sont deux subdivisions du segment $[a,b]$, on peut introduire la subdivision $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ qui est plus fine que σ_1 et que σ_2.

DÉFINITION 15.2 : **Fonction en escalier**
Une fonction $\varphi \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est en escalier s'il existe une subdivision σ de $[a,b]$: $a < x_1 \ldots < x_n = b$ telle que φ soit constante sur chaque intervalle $]x_i,x_{i+1}[$ pour $0 \leq i \leq n-1$.
La subdivision σ est dite *subordonnée* à la fonction φ. On notera $\mathcal{E}([a,b])$ l'ensemble des fonctions en escalier.

Remarque 164. Si σ est une subdivision associée à la fonction en escalier φ, alors toute subdivision plus fine que σ est également subordonéee à φ.

Remarque 165. Une fonction constante est une fonction en escalier.

PROPOSITION 15.1 : **Algèbre des fonctions en escalier**
L'ensemble $\mathcal{E}([a,b])$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\big(\mathcal{F}([a,b]), +, \times, \cdot\big)$ des fonctions définies sur le segment $[a,b]$.

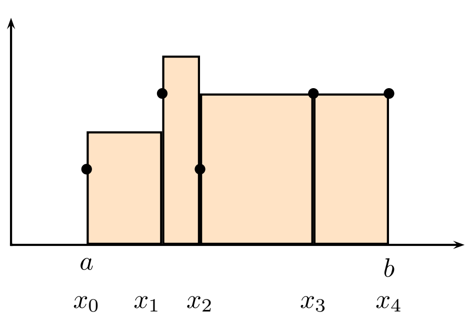


FIG. 15.1 – *Fonction en escalier*

DÉFINITION 15.3 : **Intégrale de Riemann d'une fonction en escalier**
On appelle intégrale de Riemann de la fonction en escalier $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$, le réel :

$$\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i (x_{i+1} - x_i)$$

pour une subdivision subordonnée à la fonction φ. Cette quantité est indépendante de la subdivision σ subordonnée à φ.

Théorème 15.2 : **Propriétés**

1. $\varphi \mapsto \int_{[a,b]} \varphi$ est une forme linéaire sur $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$;
2. Si φ est une fonction en escalier positive sur $[a,b]$, alors $\int_{[a,b]} \varphi \geq 0$;
3. On a la relation de Chasles : si $a < c < b$ alors $\int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi$.

Remarque 166. En utilisant la linéarité et la positivité, on montre la croissance de l'intégrale : si φ et ψ sont deux fonctions en escalier sur le segment $[a,b]$ telles que $\varphi \leq \psi$, alors $\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$.

15.1.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 15.4 : **Fonction continue par morceaux**
Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$. On dit qu'elle est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b$ du segment $[a,b]$ telle que :

1. La restriction f_i de la fonction f à chaque intervalle $]x_i,x_{i+1}[$, $(0 \leq i \leq n-1)$ est continue ;
2. Pour $i \in [\![0,n-1]\!]$, la fonction f_i possède une limite finie λ_i lorsque $x \to x_i^+$, et une limite finie μ_i lorsque $x \to x_{i+1}^-$.

Remarque 167. On montre que l'ensemble $\mathcal{C}_m([a,b])$ des fonctions continues par morceaux est une sous-algèbre de l'algèbre $\left(\mathcal{C}^0([a,b]), +, \times, \cdot\right)$ des fonctions continues sur le segment $[a,b]$.

Lemme 15.3 : **Une fonction continue par morceaux est égale à une fonction continue plus une fonction en escalier**
Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. Alors il existe une fonction en escalier φ définie sur le segment $[a,b]$ telle que la fonction $g = f + \varphi$ soit continue sur le segment $[a,b]$.

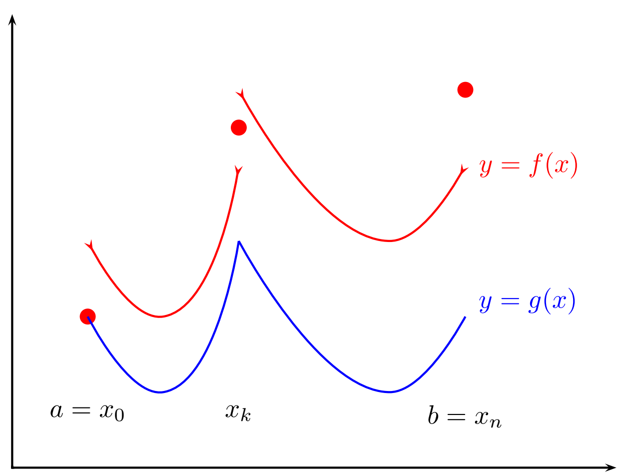


Fig. 15.2 – *Fonction continue par morceaux et la fonction continue associée*

Théorème 15.4 : **Approximation d'une fonction continue par morceaux par une fonction en escalier**
Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. Soit un réel $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction en escalier $\varphi : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$\|f - \varphi\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

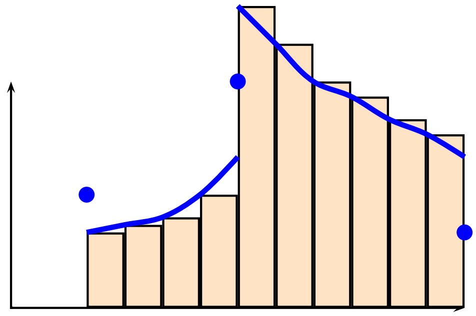


Fig. 15.3 – *Approximation d'une fonction continue par morceaux par une fonction en escalier*

Corollaire 15.5 : **Encadrement d'une fonction continue par morceaux par deux fonctions en escalier**
Soit une fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ sur $[a,b]$ telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in [a,b],\ \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \\ \forall x \in [a,b],\ 0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon \end{cases}$$

Définition 15.5 : **Intégrale supérieure, intégrale inférieure**
Soit une fonction bornée $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$. On note

$$I^-(f) = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{E}([a,b]) \\ \varphi \leq f}} \int_{[a,b]} \varphi \quad \text{et} \quad I^+(f) = \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{E}([a,b]) \\ \psi \geq f}} \int_{[a,b]} \psi$$

On dit que la fonction bornée f est intégrable sur le segment $[a,b]$ si et seulement si $I^-(f) = I^+(f)$ et on appelle intégrale de f sur le segment $[a,b]$ cette valeur commune :

$$\int_{[a,b]} f = I^-(f) = I^+(f)$$

Remarque 168. Il existe des fonctions bornées non-intégrables. Par exemple la fonction caractéristique des rationnels sur $[0, 1]$ définie par

$$\chi : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{cases}$$

En effet, on montre que $I^-(\chi) \leq 0$ et $I^+(\chi) \geq 1$.

Théorème 15.6 : **Intégrale d'une fonction continue par morceaux**
Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. La fonction f est intégrable sur $[a,b]$.

Théorème 15.7 : **Approximation de l'intégrale d'une fonction continue**
Soit une fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors il existe une suite (φ_n) de fonctions en escalier telle que

$$d_n = \|f - \varphi_n\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Pour toute suite (φ_n) de fonctions en escalier vérifiant cette condition, on a :

$$\int_{[a,b]} \varphi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_{[a,b]} f$$

On peut alors étendre les propriétés de l'intégrale aux fonctions continues par morceaux :

THÉORÈME 15.8 : **Propriétés fondamentales de l'intégrale**

1. **Linéarité :** l'application
$$I : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_m([a,b]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_{[a,b]} f \end{array} \right.$$
est une forme linéaire ;
2. **Positivité :** si $f \in \mathcal{C}_m([a,b])$ est une fonction positive : $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$;
3. **Relation de Chasles :** si $a < c < b$, et si la fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, alors sa restriction aux segments $[a,\ c]$ et $[c,b]$ est continue par morceaux et
$$\int_{[a,c]} f_{|[a,\ c]} + \int_{[c,b]} f_{|[c,b]} = \int_{[a,b]} f$$

15.1.3 Notations définitives et majorations fondamentales d'intégrales.

DÉFINITION 15.6 : **N**otations
Soit une fonction f continue sur $[a,b]$. On note selon la position de a par rapport à b :
- $a < b$, $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{[a,b]} f$;
- $b < a$, $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_{[b,a]} f$;
- $b = a$, $\int_a^a f(t)\ \mathrm{d}t = 0$.

Remarque 169. Pour montrer qu'une intégrale $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est bien définie, il suffit de montrer que la fonction f est continue (par morceaux) sur le segment $[a,b]$. Par exemple, l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - k\sin x}}$ existe lorsque $0 < k < 1$. L'intégrale $\int_0^1 \dfrac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ existe car la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0,1]$ et se prolonge par continuité sur le segment $[0,1]$.

PROPOSITION 15.9 : **Chasles**
Le théorème de Chasles est encore valable avec les nouvelles notations. Si une fonction f est continue par morceaux sur l'intervalle I et si l'on considère trois réels $(a,b,c) \in I^3$, alors
$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

Dans la suite, on supposera que $a < b$, mais il faudra faire attention aux majorations lorsque $b < a$. Le théorème suivant résume les majorations fondamentales d'intégrales (à bien connaître) :

THÉORÈME 15.10 : **Majoration d'intégrales**
Soient deux fonctions f et g continues par morceaux sur le segment $[a,b]$ avec $a < b$. Alors :
1. $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$;
2. $\forall x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq M(b-a)$;
3. $\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$;
4. Si la fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, alors elle est bornée et
$$\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$
5. Si deux fonctions f et g sont continues par morceaux sur le segment $[a,b]$ alors on a l'inégalité de la moyenne :
$$\left|\int_{[a,b]} fg(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \int_{[a,b]} |g(x)|\ \mathrm{d}x$$

Remarque 170. Retenons que pour majorer une intégrale sur $[a,b]$, il suffit de majorer la fonction en *tout* point du segment $[a,b]$.

Exercice 15-1

Etudier les limites des suites définies par les intégrales suivantes :
$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$$

$$J_n = \int_0^1 x^n \arctan(1 - nx)\, \mathrm{d}x$$

Exercice 15-2

Déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{1+t^4}\, \mathrm{d}t$$

$$\lim_{a\to 0} \int_0^1 x^2 \sqrt{1+a^2x^2}\, \mathrm{d}x$$

Exercice 15-3

Soit une fonction $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continue. Étudier la limite de la suite de terme général :

$$I_n = \int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right) \mathrm{d}x$$

Exercice 15-4

Déterminer un équivalent lorsque $x \to 0$ de la fonction définie par :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\, \mathrm{d}t$$

Théorème 15.11 : **Si l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle, la fonction est nulle**

Soit une fonction f vérifiant :

- H1 f est *continue* sur le segment $[a,b]$;
- H2 $\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0$;
- H3 $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = 0$.

Alors $\forall x \in [a,b],\ f(x) = 0$.

Remarque 171. Le théorème précédent est faux si on suppose uniquement que la fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ (faire un dessin d'une fonction nulle partout sauf en un point).

Exercice 15-5

Soit une fonction continue $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$\left|\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x\right| = \int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x$$

Montrer que f garde un signe constant.

Théorème 15.12 : **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soient deux fonctions continues f et g sur le segment $[a,b]$. Alors

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)g(x)\, \mathrm{d}x\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\, \mathrm{d}x}}$$

avec cas d'égalité ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda f$.

Théorème 15.13 : **Inégalité de Minkowski**

Soient deux fonctions continues f et g sur le segment $[a,b]$. En notant $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x}$, on a l'inégalité suivante :

$$\boxed{\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2}$$

Exercice 15-6

Soit une suite de fonctions (f_n) toutes continues sur le segment $[a,b]$. On suppose que

$$\int_a^b f_n^4(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Montrer qu'alors

$$\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

15.2 Le théorème fondamental du calcul

Exercice 15-7

Soit une fonction $f \in \mathcal{C}([a,b])$. Montrer que la fonction définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est lipschitzienne sur le segment $[a,b]$.

Théorème 15.14 : **Le théorème fondamental du calcul**

(H1) Soit un *intervalle* I.

(H2) Soit une fonction f *continue* sur I.

Soit un point $a \in I$. Alors la fonction

$$F : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

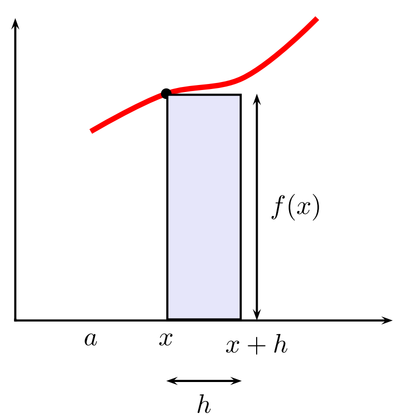


Fig. 15.4 – *Théorème fondamental :* $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \approx f(x)$

Rappelons les notions sur les primitives vues en calcul différentiel.

Définition 15.7 : **Primitives**

Soit un *intervalle* I et une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $F : I \mapsto \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si

1. la fonction F est dérivable sur l'intervalle I ;
2. $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

Proposition 15.15 : Deux primitives de f sur I sont égales à une constante près.

Remarque 172. Le théorème précédent est une conséquence du théorème des accroissements finis.

Théorème 15.16 : Existence de primitives d'une fonction continue
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction *continue* sur un *intervalle* I. La fonction f admet des primitives sur l'intervalle I. En particulier, si l'on considère un point $a \in I$, la fonction

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est l'unique primitive de la fonction f qui s'annule en a.

Corollaire 15.17 : Calcul d'intégrales
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a,b]$, et $G : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ une primitive de f sur le segment $[a,b]$. Alors, on sait calculer l'intégrale de f :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$$

Corollaire 15.18 : Théorème fondamental deuxième forme
Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$. Alors la formule suivante relie f et sa dérivée par une intégrale. Pour tout $x \in [a,b]$:

$$\boxed{f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t}$$

Remarque 173. On se sert de la formule précédente pour montrer des relations entre une fonction et ses dérivées. Par exemple, en utilisant des techniques de majorations d'intégrales, on retrouve l'inégalité des accroissements finis (avec des hypothèses légèrement plus fortes sur f : $f \in \mathcal{C}^1\mathbb{R}$).

Théorème 15.19 : Dérivée d'une fonction définie par une intégrale
H1 Soit une fonction f *continue* sur un *intervalle* I,
H2 Soient $u,v : J \mapsto I$ deux fonctions *dérivables* sur *l'intervalle* J.
Alors la fonction

$$G : \left\{ \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est dérivable sur l'intervalle J et

$$\forall x \in J, \quad \boxed{G'(x) = v'(x) f[v(x)] - u'(x) f[u(x)]}$$

Exercice 15-8
Montrer l'inégalité de Poincaré : il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que des bornes a et b telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([a,b]) \text{ telle que } f(a) = 0, \quad \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \leq C \int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 15-9
Soit la fonction

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_x^{x^2} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2 - 1} \end{array} \right.$$

a) Montrer que g est définie, dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer la fonction dérivée g'. Dresser le tableau de variations de g.

b) Calculer pour $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $g(x)$ et déterminer les limites de la fonction g en 1 et en $+\infty$.

15.3 Changement de variables, intégration par parties.

THÉORÈME 15.20 : **Changement de variables**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I. Soit $\varphi : [\alpha,\beta] \mapsto I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\alpha,\beta]$. Alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$$

En pratique, pour calculer $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$, on pose

$$\boxed{x = \varphi(t) \quad \mathrm{d}x = \varphi'(t)\ \mathrm{d}t}$$

On vérifie (rapidement) que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $[\alpha,\beta]$ vers $[a,b]$, avec $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ et on écrit

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$$

Ne pas oublier de transformer les bornes !

Exercice 15-10
Calculer $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$, $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x$.

On effectue également un changement de variable de la forme suivante. On veut calculer $I = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$. On pose

$$\begin{cases} t = \psi(x) \\ dt = \psi'(x)dx \end{cases}$$

Dans ce cas, il faut vérifier que la fonction $\psi : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et que $\forall x \in [a,b]$, $\psi'(x) \neq 0$. Alors, (puisque ψ' est continue), on a $\psi' > 0$ ou $\psi' < 0$ sur $[a,b]$, et donc la fonction ψ est strictement croissante ou strictement décroissante sur $[a,b]$.
Si par exemple $\psi' > 0$, en notant $\alpha = \psi(a)$ et $\beta = \psi(b)$, la fonction $\psi : [a,b] \mapsto [\alpha,\beta]$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ et on note $\phi : [\alpha,\beta] \mapsto [a,b]$ sa bijection réciproque : $\phi = \psi^{-1}$.
On écrit

$$\begin{cases} t = \psi(x) \\ dt = \psi'(x)\ \mathrm{d}x \Rightarrow\ \mathrm{d}x = \dfrac{dt}{\psi'(x)} = \phi'(t)dt \end{cases}$$

Cela se justifie, car si $x \in [a,b]$, en notant $t = \psi(x)$, on a $x = \phi(t)$ et alors $\phi'(t) = \dfrac{1}{\psi'(x)}$ (dérivée d'une bijection réciproque).

Exercice 15-11
Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\ \mathrm{d}x$.

Exercice 15-12
Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\ \mathrm{d}x$. Calculer ensuite ces intégrales.

Exercice 15-13
Soit $f : [-a,a] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Si la fonction f est paire, montrer que $\int_{-a}^a f(x)\ \mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\ \mathrm{d}x$
2. Si f est impaire, montrer que $\int_{-a}^a f(x)\ \mathrm{d}x = 0$.

Exercice 15-14
Calculer pour $a < b$, l'intégrale $\int_a^b (t-a)^3(b-t)^2\ \mathrm{d}t$.

Remarque 174. Pour calculer une intégrale du type $\int_a^b f(x^n)\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$, effectuer le changement de variables $y = x^n$.

Exercice 15-15

Calculer $\int_1^2 \dfrac{1}{x(1+x^n)}\,\mathrm{d}x$ $(n \geq 1)$.

THÉORÈME 15.21 : **Intégration par parties**
Soient deux fonctions $u,v : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 15-16

Calculer $F(x) = \int_0^x \arctan x\,\mathrm{d}x$ et $I_{p,q} = \int_a^b (x-a)^p(b-x)^q\,\mathrm{d}x$.

Exercice 15-17

Soit $I_n = n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Trouver $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 15-18

Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$.
Montrez que

$$\int_a^b \sin(nt)f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

15.4 Formules de Taylor.

On considère ici une fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ $(n \geq 2)$ sur $[a,b]$. Partons du théorème fondamental

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

et intégrons par parties en posant:

$$u(t) = f'(t), \quad u'(t) = f''(t), \quad v'(t) = 1, \quad v(t) = -(x-t)$$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\,\mathrm{d}t$$

Par intégrations par parties successives, on obtient le :

THÉORÈME 15.22 : **Formule de Taylor avec reste intégral**
Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I, et deux points $a,x \in I$. Alors

$$\boxed{f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}$$

En faisant le changement de variables $u = (t-a)/(x-a)$ dans le reste intégral, on trouve

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(a+(x-a)u)\,\mathrm{d}u$$

Notons

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a), \quad R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(a+(x-a)u)\,\mathrm{d}u$$

$T_n(x)$ est un polynôme de degré n et $R_n(x)$ s'appelle le reste intégral.
En majorant le reste intégral, on trouve le théorème suivant :

Théorème 15.23 : Inégalité de Taylor-Lagrange
Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I et un point $a \in I$. Alors, si $x \in I$, on peut écrire $f(x)$ comme somme du polynôme de Taylor et d'un reste $R_n(x)$:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

avec la majoration suivante du reste :

$$\boxed{|R_n(x)| \le \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}(x)}$$

où $M_{n+1}(x) = \sup_{t \in [a,x]} |f^{(n+1)}(t)|$.

Théorème 15.24 : Formule de Taylor-Young
Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I, et $a \in I$. Alors $\forall x \in I$,

$$\boxed{f(x) = T_n(x) + (x-a)^n \varepsilon(x)}$$

où $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$

Remarque 175. La formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange permettent d'exprimer $f(x)$ en fonction des dérivées de f en a, pour un réel $x \in I$. On les utilise surtout pour des majorations *globales* sur un intervalle.
La formule de Taylor-Young quant à elle, donne une information *locale* sur le comportement de f au voisinage du point a (l'information sur le reste est une limite). On s'en servira pour le calcul de limites, d'équivalents et de développements limités au voisinage du point a.

Exercice 15-19

Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ sur le segment $[-a,a]$.

1. Majorer $\left|\frac{f(h)-f(0)}{h} - f'(0)\right|$ en fonction de h ;
2. Trouver un équivalent de la quantité précédente lorsque $h \to 0$;
3. Majorer $\left|\frac{f(h)-f(-h)}{2h} - f'(0)\right|$ en fonction de h.

Exercice 15-20

Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ sur le segment $[-1,1]$. Pour un réel positif $0 < |h| < 1$, on pose

$$\varphi(h) = \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{h^2}$$

Calculer $l = \lim_{h \to 0} \varphi(h)$, puis majorer en fonction de h la quantité $|\varphi(h) - l|$.

Exercice 15-21

Majorer la quantité $\left|e^x - (1+x+\dfrac{x^2}{2})\right|$ sur le segment $[0,1]$. Majorer ensuite la quantité $\left|\ln(1+x) - (x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3})\right|$ sur le segment $[0,1]$.

Exercice 15-22

Trouver $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

15.5 Méthodes numériques de calcul d'intégrales.

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et l'on note $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$.
On notera $M_0 = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$, $M_1 = \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$ et $M_2 = \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ (qui existent car les fonctions f, f', f'' sont continues sur le segment $[a,b]$ et sont donc bornées). Dans les deux méthodes qui suivent, on fera une subdivision du segment $[a,b]$ de pas constant $h = (b-a)/n$. On pose pour un entier $k \in [\![0,n]\!]$, $x_k = a + k\frac{b-a}{n} = a + kh$.

Théorème 15.25 : Méthode des rectangles
Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$. Posons pour un entier $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

La quantité R_n représente la somme des aires des rectangles de la figure 15.5. On obtient la majoration de l'erreur commise en approximant l'intégrale de la fonction f par R_n :

$$|I - R_n| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M_1$$

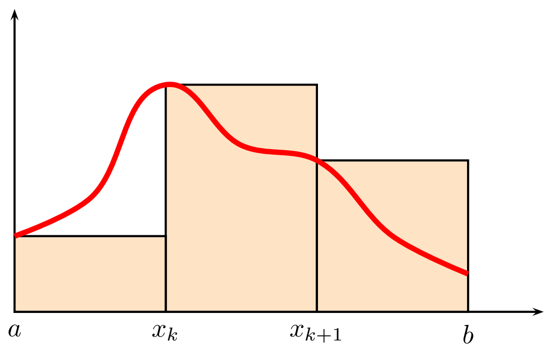


Fig. 15.5 – *Méthode des rectangles*

Théorème 15.26 : Convergence d'une somme de Riemann
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$.
On définit les suites de termes généraux :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Alors

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque 176. Plus généralement, si f est une fonction continue sur le segment $[a,b]$, et si

$$u_n = \frac{(b-a)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)$$

où les points ξ_k sont dans l'intervalle $[a + kh, a + (k+1)h]$, avec $h = \frac{b-a}{n}$, on a

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque 177. Lorsque l'on peut faire apparaître un groupement k/n dans une suite définie par une somme, penser à utiliser les sommes de Riemann.

Exercice 15-23

Etudier les suites de terme général :

1. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k}$;
2. $v_n = \sum_{p=0}^{n-1} \dfrac{\sqrt{n^2+p^2}}{n^2}$;
3. $w_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \dfrac{1}{2k+1}$.

Théorème 15.27 : **Approximation d'une fonction $\mathcal{C}^2$ par une fonction affine**
Soit $[\alpha,\beta]$, une fonction $f \in \mathcal{C}^2([\alpha,\beta])$ et une fonction affine φ telle que $\varphi(\alpha) = f(\alpha)$ et $\varphi(\beta) = f(\beta)$. On montre la majoration suivante de l'erreur commise en approximant la fonction f par la fonction affine φ sur le segment $[\alpha,\beta]$:

$$\forall t \in [\alpha,\beta], \quad |f(t) - \varphi(t)| \leq \frac{(t-\alpha)(\beta-t)}{2} M_2$$

où $M_2 = \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f''(x)|$.

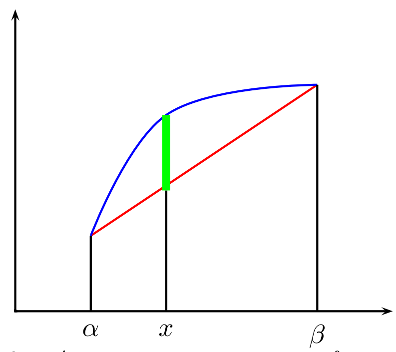


Fig. 15.6 – *Approximation par une fonction affine*

Théorème 15.28 : **Méthode des trapèzes**
On pose pour un entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{2n}[f(x_k) + f(x_{k+1})] \\ &= \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}f(a) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(b)\right] \\ &= R_n + \frac{b-a}{n} \times \frac{f(b)-f(a)}{2} \end{aligned}$$

Cette quantité représente la somme des aires des trapèzes de la figure 15.5. On montre d'abord la majoration de l'erreur commise en approximant l'intégrale de f sur un petit segment $[x_k,x_{k+1}]$ par l'aire d'un trapèze :

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{b-a}{2n}[f(x_k) + f(x_{k+1})] \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^3} \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} |f''(x)|$$

Ensuite l'erreur globale commise en approximant l'intégrale de f sur $[a,b]$ par la somme des aires des trapèzes :

$$|I - T_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$$

15.6 Fonctions à valeurs complexes

Définition 15.8 : **Intégrale d'une fonction complexe**
Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, on définit $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_1(t)dt + i\int_a^b f_2(t)dt$

Remarque 178. Les techniques de changement de variables et d'intégration par parties sont encore valables pour les intégrales de fonctions à valeurs complexes.

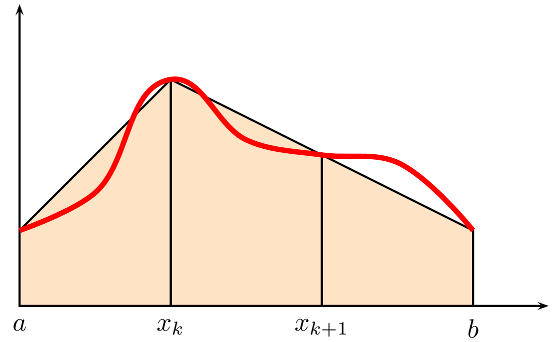


FIG. 15.7 – *Méthode des trapèzes*

THÉORÈME 15.29 : **Majoration du module d'une intégrale complexe**
Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{C}$ continue sur le segment $[a,b]$. On peut majorer le module de l'intégrale par l'intégrale du module :

$$\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$$

avec égalité si et seulement si la fonction f est de la forme $f(t) = h(t)e^{i\theta}$ avec h une fonction réelle positive. En d'autres termes, il y a égalité si et seulement si la fonction complexe f prend ses valeurs dans une demi-droite issue de l'origine.

THÉORÈME 15.30 : **Théorème fondamental**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. Alors la fonction définie sur I par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

THÉORÈME 15.31 : **Inégalité des accroissements finis**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$. Alors

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t$$

et par majoration, on en déduit l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(b) - f(a)| \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

THÉORÈME 15.32 : **Formules de Taylor**
Soit un intervalle I, et une fonction $f : I \mapsto \mathbb{C}$.

1. **Formule de Taylor-intégrale :** si $[a,x] \subset I$ et si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur le segment $[a,x]$, alors
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t) \, \mathrm{d}t$$
2. **Formule de Taylor-Lagrange :** si $x \in I$, et $h \in \mathbb{R}$ tel que $[x,x+h] \subset I$, et si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur le segment $[x,x+h]$, alors
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + R_n(h)$$
avec $|R_n(h)| \leq \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!} h^{n+1}$ où $M_{n+1} = \sup_{t \in [x,x+h]} |f^{(n+1)}(t)|$.
3. **Formule de Taylor-Young :** si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I, et si $a \in I$, alors $\forall x \in I$,
$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n f^{(n)}(a)}{n!} + o\big((x-a)^n\big)$$

Remarque 179. La formule de Taylor-Young permet de trouver les développements limités d'une fonction à valeurs complexes.

Chapitre 16

Espaces vectoriels en dimension finie

16.1 Définitions

Définition 16.1 : **ev de dimension finie**
On dit qu'un espace vectoriel E est de *dimension finie* si et seulement si il existe un système générateur $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_n)$ de E de cardinal fini. Par convention, on dit que $E = \{0\}$ est un espace de dimension finie.

Lemme 16.1 : **Augmentation d'un système libre**
Soit un système de vecteurs $\mathcal{L} = (l_1; \dots; l_n)$ *libre* d'un espace vectoriel E et un vecteur $x \in E$. Si $x \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{L})$, alors le système $\mathcal{L}' = (l_1; \dots; l_n; x)$ est encore libre.

Lemme 16.2 : **Diminution d'un système générateur**
Soit un système formé de $n+1$ vecteurs de l'espace E : $S = (x_1; \dots; x_n; x_{n+1}) \in E^{n+1}$. Si le vecteur x_{n+1} est combinaison linéaire des autres vecteurs : $x_{n+1} \in \mathrm{Vect}(x_1; \dots; x_n)$, alors on peut retirer le vecteur x_{n+1} sans modifier le sous-espace engendré par S :

$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n, x) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$$

Théorème 16.3 : **Théorème de la base incomplète**
Si $\mathcal{L} = (l_1, \dots, l_p)$ est un système *libre* de E et $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_q)$ est un système *générateur* de l'espace E, alors il existe une base de E de la forme

$$\mathcal{B} = (l_1, \dots, l_p, l_{p+1}, \dots, l_n)$$

où $l_{p+1}, \dots, l_n \in \mathcal{G}$. En d'autres termes, on peut compléter un système libre en une base en ajoutant des vecteurs puisés dans un système générateur.

Remarque 180. On dispose d'un algorithme pour construire une base à partir d'un système libre.

Corollaire 16.4 : **Existence de base**
Tout espace vectoriel de dimension finie *non-nul* possède une base.

Corollaire 16.5 : **Complétion d'un système libre en une base**
Si E est un ev de dimension finie n et $\mathcal{L} = (e_1, \dots, e_p)$ un système libre, alors on peut compléter ce système en une base $e = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$.

16.2 Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 16.6 : **Lemme de Steinitz**
Soit $S = (x_1, \dots, x_n)$ un système de vecteurs de E et $A = (a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ un autre système. Si

$$\forall i \in [\![1, n+1]\!],\ a_i \in \mathrm{Vect}(S)$$

alors le système A est lié.

Théorème 16.7 : Le cardinal d'un système libre est plus petit que celui d'un système générateur
Si $\mathcal{L}$ est un système libre et $\mathcal{G}$ un système générateur de E, on a

$$|\mathcal{L}| \leq |\mathcal{G}|$$

Remarque 181. D'après ce théorème, pour montrer qu'un espace vectoriel n'est pas de dimension finie, il suffit d'exhiber une famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de vecteurs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (x_1,\dots,x_n) \text{ est libre}$$

Exercice 16-1

Montrer que $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont de dimension infinie.

Théorème 16.8 : Cardinal d'une base
Si E est de dimension finie, toutes les bases de E ont même cardinal.

Définition 16.2 : dimension d'un ev
Si $E = \{0\}$, on dit que E est de dimension 0 : $\dim E = 0$.
Si E est un espace vectoriel de dimension finie non-nul, on appelle *dimension* de E, le cardinal commun des bases de E et l'on note $n = \dim E$.

Remarque 182. K^n est un K-ev de dimension n.

Remarque 183. La dimension dépend du corps de base. Par exemple, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension 1, mais un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2.

Théorème 16.9 : Caractérisation des bases
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $S = (x_1,\dots,x_p)$ un système de vecteurs de E.

1. S est une base de E ssi S est *libre* et $p = n$;
2. S est une base de E ssi S est *générateur* et $p = n$.

Remarque 184. On vérifie en général que le système S est libre et $|S| = \dim E$, ce qui évite de montrer que S est générateur (fastidieux en général).

Exercice 16-2

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $S = (e_1,\dots,e_n)$ avec $e_1 = (1,0,\dots,0)$, $e_2 = (1,1,0\dots,0)$,..., $e_n = (1,\dots,1)$. Montrer que S est une base de E.

Exercice 16-3

Dans l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$, si $S = (P_0,\dots,P_n)$ est un système de polynômes tels que $\forall i \in [0,n]$, $\deg P_i = i$. Montrer que S est une base de E.

Exercice 16-4

Soit E un K-ev de dimension finie n et un endomorphisme $u \in L(E)$ nilpotent d'indice n : $(u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0)$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $S = (x,u(x),\dots,u^{n-1}(x))$ soit une base de E.

16.3 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Théorème 16.10 : dimension d'un sev
Soit E un ev de dimension finie n et F un sev de E.

1. F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$;
2. $(\dim F = \dim E) \Longleftrightarrow (F = E)$.

Remarque 185. On utilise souvent ce résultat pour montrer que deux sev F et G sont égaux :

$$\boxed{F \subset G \text{ et } \dim F = \dim G \Rightarrow F = G}$$

Théorème 16.11 : Base adaptée à une somme directe
Si E est un ev de dimension finie et E_1,E_2 deux sev supplémentaires : $E = E_1 \oplus E_2$, Si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base de E_1 et $(f_1,\dots,f_k)$ une base de E_2, alors $(e_1,\dots,e_p,f_1,\dots,f_k)$ est une base de E.

Théorème 16.12 : dimension d'une somme directe

$$E = E_1 \oplus E_2 \Rightarrow \dim E = \dim E_1 + \dim E_2$$

Théorème 16.13 : Existence de supplémentaires en dimension finie
Si E est un ev de dimension *finie*, et F un sev de E, alors il existe des supplémentaires de F dans E.

Remarque 186. Ne jamais parler *du* supplémentaire de F, car en général il en existe une infinité. Penser à F qui est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ (voir figure 16.3).

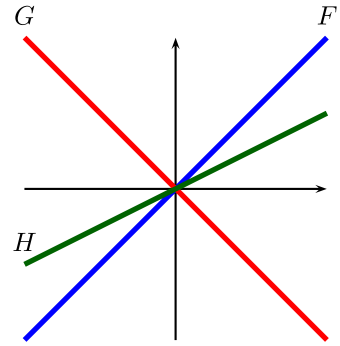


Fig. 16.1 – *Deux supplémentaires d'un s.e.v*

Théorème 16.14 : dimension d'une somme
Soit E de dimension finie et F,G deux sev de E. Alors :

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)}$$

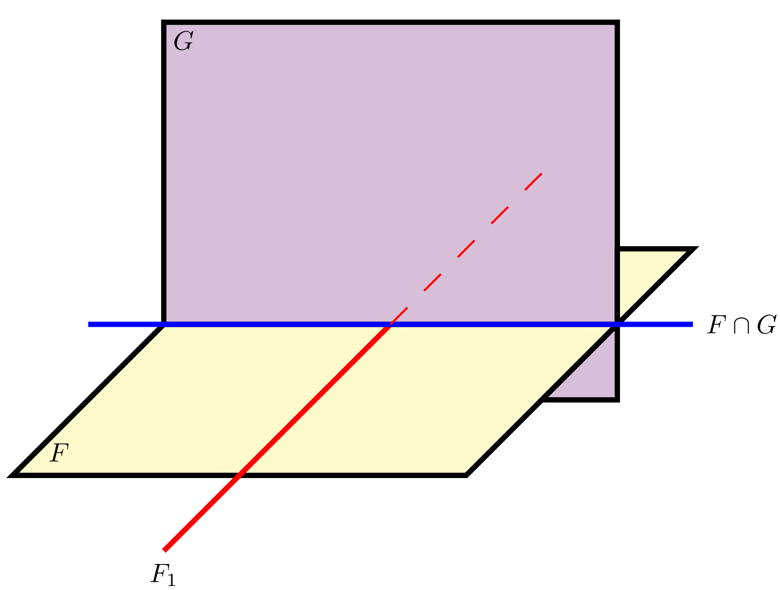


Fig. 16.2 – *Dimension de $F+G$: $F = F_1 \oplus (F \cap G)$ et $F+G = G \oplus F_1$*

THÉORÈME 16.15 : **Caractérisation des supplémentaires**
Soit E un ev de dimension finie n et F,G deux sev de E. Alors

$$\boxed{(E = F \oplus G) \iff (F \cap G = \{0\} \text{ et } \dim F + \dim G = n)}$$

$$(E = F \oplus G) \iff (F + G = E \text{ et } \dim F + \dim G = n)$$

Remarque 187. En pratique, on utilise souvent la première caractérisation, car il est simple de montrer que $F \cap G = \{0\}$.

Exercice 16-5
Soit $E = \mathbb{R}^4$, $F = \text{Vect}((1,2,1,1),(0,1,1,1))$ et $G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x = y\}$. Montrer que $F \oplus G = E$.

Exercice 16-6
Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \text{Vect}((1,0,1,0),(1,2,0,0))$. Trouver un supplémentaire de F dans E

Exercice 16-7
Soit $E = \mathbb{R}^4$ et

$$F = \text{Vect}((1,1,\lambda,3),(0,1,1,2)) \quad G = \{(x,y,z,t) \in E \mid x - y + z = 0, x + 2y - t = 0\}$$

A quelle condition sur $\lambda \in \mathbb{R}$ a-t-on $F = G$?

Exercice 16-8
Soit E un K-ev de dimension finie n et H un hyperplan de E. Déterminer $\dim H$.

THÉORÈME 16.16 : **Dimension d'un espace produit**
Si E et F sont deux ev de dimension finie,

$$\boxed{\dim(E \times F) = \dim E + \dim F}$$

16.4 Applications linéaires en dimension finie — formule du rang

THÉORÈME 16.17 : **Une application linéaire est déterminée par l'image d'une base**
Soit E un ev de dimension finie n, F un ev quelconque , $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $f = (f_1, \dots, f_n)$ un système de n vecteurs de F.

1. Il existe une unique application linéaire $u \in L(E,F)$ telle que
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad u(e_i) = f_i$$
2. (u injective) $\iff$ (f libre) ;
3. (u surjective) $\iff$ (f générateur).

Remarque 188. Le théorème précédent est important : il dit que pour déterminer une application linéaire, il suffit de donner l'image d'une base par cette application.

THÉORÈME 16.18 : **Dimension de** $L(E,F)$
Si E et F sont de dimension finie, alors $L(E,F)$ est également de dimension finie et

$$\boxed{\dim L(E,F) = \dim E \times \dim F}$$

Remarque 189. En particulier, si l'espace E est de dimension finie, son dual $E^\star$ est également de dimension finie et $\dim E^\star = \dim E$.

THÉORÈME 16.19 : **Espaces isomorphes**
Soient deux ev E et F de dimension finie. On dit qu'ils sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $u : E \mapsto F$. On a la caractérisation

$$(E \text{ et } F \text{ isomorphes }) \iff (\dim E = \dim F)$$

DÉFINITION 16.3 : Rang d'un système de vecteurs, d'une application linéaire
Soit un espace vectoriel E de dimension finie et un système de vecteurs $S = (x_1, \dots, x_n)$. On appelle *rang* du système S, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par S :

$$\mathrm{rg}(S) = \dim \mathrm{Vect}(S)$$

Si E et F sont de dimension finie et $u \in L(E,F)$, on appelle *rang* de u, la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}\, u$:

$$\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}\, u)$$

THÉORÈME 16.20 : Le rang d'une application linéaire est le rang du système de vecteurs image d'une base par l'application
Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $u \in L(E,F)$,

$$\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n))$$

THÉORÈME 16.21 : Formule du rang
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un espace vectoriel quelconque et une application linéaire $u \in L(E,F)$. On a la *formule du rang* :

$$\boxed{\dim E = \dim \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{rg}\, u}$$

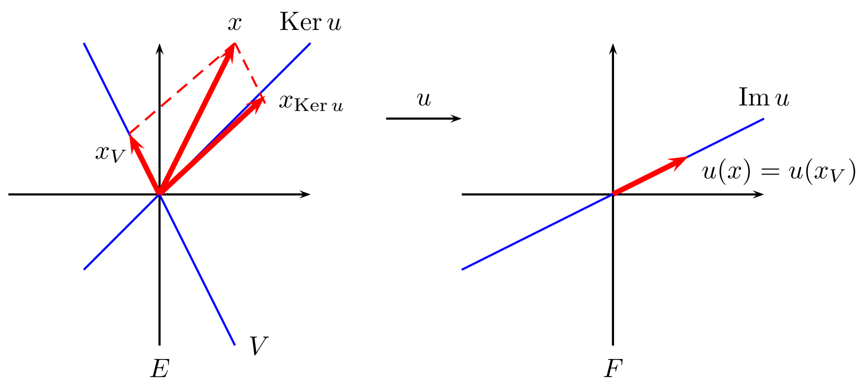


FIG. 16.3 – *Formule du rang :* $E = \mathrm{Ker}\, u \oplus V$ *et* $V \approx \mathrm{Im}\, u$

Remarque 190. On montre dans la démonstration de la formule du rang, que $\mathrm{Im}\, u$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$, mais en général, si u est un endomorphisme, $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ ne sont pas supplémentaires. Trouver un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ pour lequel $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Ker}\, u$!

THÉORÈME 16.22 : Isomorphismes en dimension finie
Soient deux espaces vectoriels (E,n) et (F,n) sur le corps $\mathbb{K}$ de *même dimension finie* n. Soit une application linéaire $u \in L(E,F)$. Alors

$$\big(u \text{ injective }\big) \iff \big(u \text{ surjective }\big) \iff \big(u\text{bijective})\big)$$

Remarque 191. Ce théorème est bien entendu faux si les deux espaces n'ont pas la même dimension.

16.5 Endomorphismes en dimension finie

THÉORÈME 16.23 : Caractérisation des automorphismes
Soit un espace vectoriel E de dimension finie et un endomorphisme $u \in L(E)$. On a :

$$(u \text{ injective}) \iff (u \text{ bijective})$$

$$(u \text{ surjective}) \iff (u \text{ bijective})$$

Remarque 192. Ce théorème est très utile en pratique. On montre qu'un endomorphisme est injectif (le plus facile) et alors en dimension finie il est automatiquement bijectif.

Exercice 16-9

Soit E un K-ev de dimension finie n, F un K-ev de dimension finie p et $u \in L(E,F)$. Montrer que $\mathrm{rg}(u) \leq \min(n,p)$.

Exercice 16-10

Soit E un K-ev de dimension finie n, F un K-ev de dimension finie p et $u,v \in L(E,F)$. Montrer que

$$\left|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)\right| \leq \mathrm{rg}(u+v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$$

Exercice 16-11

Soit E un K-ev de dimension finie n, et $u \in L(E)$. Montrer que

$$(\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u) \Longleftrightarrow (u^2 = 0 \text{ et } n = 2\,\mathrm{rg}(u))$$

Exercice 16-12

On considère $(n+1)$ réels distincts $(x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et l'application

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & \big(P(x_0),\dots,P(x_n)\big) \end{array} \right.$$

a) Montrer que ϕ est un isomorphisme.
b) En déduire que si $(y_0,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i \in [0,n]$, $P(x_i) = y_i$ (polynôme interpolateur de Lagrange). c) Soient deux réels distincts $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et quatre réels $(\alpha,\beta,\delta,\gamma) \in \mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant

$$P(a) = \alpha,\ P'(a) = \beta,\ P(b) = \delta,\ P'(b) = \gamma$$

Théorème 16.24 : **Inverses à gauche et à droite**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et un endomorphisme $u \in L(E)$. On dit que

1. u est inversible à gauche ssi il existe $v \in L(E)$ tel que $v \circ u = \mathrm{id}$;
2. u est inversible à droite ssi il existe $w \in L(E)$ tel que $u \circ w = \mathrm{id}$;
3. u est inversible ssi il existe $u^{-1} \in L(E)$ tel que $u \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u = \mathrm{id}$.

On a la caractérisation :

$$(u \text{ inversible à gauche }) \Longleftrightarrow (u \text{ inversible à droite }) \Longleftrightarrow (u \text{ inversible })$$

Remarque 193. Ce résulat est faux en dimension infinie comme le montre le contre-exemple suivant. Soit $\mathcal{S}$ l'espace des suites réelles. On définit deux endomorphismes (le « shift » à gauche et à droite) :

$$s_g : (a_0,a_1,\dots) \mapsto (a_1,a_2,\dots)$$

$$s_d : (a_0,a_1,\dots) \mapsto (0,a_1,a_2,\dots)$$

Etudier l'injectivité, la surjectivité de s_g, s_d. Calculer $s_g \circ s_d$ et $s_d \circ s_g$.

Exercice 16-13

Soit E un K-ev de dimension finie n et $u,v \in L(E,F)$. Montrer que

$$u^2 \circ v - u \circ v \circ u + \mathrm{id} = 0 \Rightarrow u \in GL(E)$$

Exercice 16-14

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in E$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in E$ vérifiant $P' + P = Q$.

Chapitre 17

Matrices

17.1 Définition d'une matrice

DÉFINITION 17.1 :
Soit un corps commutatif $\mathbb{K}$ et deux entiers $n,p \geq 1$. On appelle *matrice* $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, une application

$$A : \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i,j) & \mapsto & a_{ij} \end{array} \right.$$

que l'on note :

$$A = ((a_{ij})) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

le coefficient a_{ij} se trouve à l'intersection de la ième ligne et de la jième colonne.
On note $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.

Remarque 194. Pour un indice de ligne $i \in [\![1,n]\!]$, on note $L_i = (a_{i1}, \dots, a_{ip}) \in \mathbb{K}^p$ le i$^{\text{e}}$ *vecteur ligne* de A.
Pour un indice de colonne $j \in [\![1,p]\!]$, on note $C_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj}) \in \mathbb{K}^n$ le j$^{\text{e}}$ *vecteur colonne* de A.

On définit les opérations suivantes sur $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (ce sont les opérations usuelles sur les applications). Pour deux matrices $A,B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

- $A = B$ ssi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{ij} = b_{ij}$.
- $A + B = ((c_{ij})) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda.A = ((d_{ij})) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $d_{ij} = \lambda a_{ij}$.
- La matrice nulle est définie par $0_{\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = ((f_{ij}))$ où $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $f_{ij} = 0_{\mathbb{K}}$.

DÉFINITION 17.2 : **Matrices de la base canonique**
Pour deux indices $k \in [\![1,n]\!]$ et $l \in [\![1,p]\!]$, on définit la *matrice élémentaire* $E_{kl} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$E_{kl} = ((\delta_{ik}\delta_{jl})) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Tous les coefficients de la matrice E_{kl} sont nuls sauf celui qui se trouve à l'intersection de la ligne k et de la colonne l qui vaut 1.

THÉORÈME 17.1 : **L'ensemble des matrices est un ev**
Muni des lois précédemment définies, l'ensemble $(\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \times p$. Le système formé des $n \times p$ matrices E_{kl} est une base de cet ev, appelée *base canonique* de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

DÉFINITION 17.3 : Transposée
Soit une matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de taille $n \times p$. On appelle *transposée* de la matrice A, la matrice ${}^tA \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par :

$$ {}^tA = ((\widetilde{a}_{i,j})) \text{ où } \forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!],\ \widetilde{a}_{ij} = a_{ji} $$

L'application

$$ T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array} \right. $$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

17.2 Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases

DÉFINITION 17.4 : Matrice d'un vecteur dans une base
Soit un $\mathbb{K}$-ev $(E,n,\mathbb{K})$ de dimension finie n et une base $e = (e_1, \dots ,e_n)$ de E.
Soit $x \in E$ un vecteur qui se décompose sur la base e en :

$$ x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n $$

On appelle matrice de x dans la base e, la matrice $n \times 1$

$$ Mat_e(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) $$

DÉFINITION 17.5 : Matrice d'un système de vecteurs dans une base
Avec les notations précédentes, soit $S = (x_1, \dots ,x_p)$ un système de p vecteurs de E, qui se décomposent dans la base e sous la forme

$$ x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i $$

On appelle matrice du système S dans la base e, la matrice $n \times p$ définie par :

$$ Mat_e(S) = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) $$

DÉFINITION 17.6 : Matrice d'une application linéaire dans deux bases
Soient $(E,p,\mathbb{K})$ et $(F,n,\mathbb{K})$ deux espaces vectoriels de dimension p,n sur le même corps $\mathbb{K}$. Soit $e = (e_1, \dots ,e_p)$ une base de E et $f = (f_1, \dots ,f_n)$ une base de F. Soit $u \in L(E,F)$ une application linéaire. On appelle matrice de u relativement aux bases e et f, la matrice

$$ Mat_{e,f}(u) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) $$

où

$$ \forall j \in [\![1,n]\!], \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i $$

En d'autres termes, c'est la matrice du système $(u(e_1), \dots ,u(e_p))$ dans la base f.

Théorème 17.2 : **Une application linéaire est entièrement déterminée par sa matrice dans deux bases**
Soit un espace vectoriel $(E,p,\mathbb{K})$ de dimension p, et $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit un espace vectoriel $(F,n,\mathbb{K})$ de dimension n et $f = (f_1, \dots, f_n)$ une base de f. Alors, l'application :

$$\phi_{e,f} : \begin{cases} L(E,F) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto & Mat_{e,f}(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarque 195. On en déduit donc le résultat précédemment admis :

$$\boxed{\dim L(E,F) = \dim E \times \dim F}$$

Définition 17.7 : **Matrice d'une forme linéaire dans une base**
Soit $(E,n,\mathbb{K})$ un espace de dimension n, et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $\phi \in E^\star$ une forme linéaire. La matrice de ϕ dans la base e est de taille $1 \times n$:

$$Mat_e(\phi) = \big(\phi(e_1), \quad \dots \quad ,\phi(e_n)\big) \in \mathfrak{M}_{1,n}(\mathbb{K})$$

17.3 Produit matriciel

Définition 17.8 : **Produit de matrices**
Soit deux matrices $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $B = ((b_{ij})) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On définit la *matrice produit* $AB = ((c_{ij})) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \quad \boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}}$$

Théorème 17.3 : **Matrice d'une composée d'applications linéaires**
On considère trois $\mathbb{K}$-ev et deux applications linéaires :

$$(E,p,\mathbb{K}) \xrightarrow{u} (F,q,\mathbb{K}) \xrightarrow{v} (G,n,\mathbb{K})$$

Si e,f,g sont des bases de E,F,G, alors

$$Mat_{e,g}(v \circ u) = Mat_{f,g}(v) Mat_{e,f}(u)$$

Théorème 17.4 : **Propriétés de la multiplication**
Soient $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathfrak{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.
- **Associativité :** $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot (A \times B) = (\lambda \cdot A) \times B = A \times (\lambda \cdot B)$

Si $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B,C \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a
- **Distributivité :** $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

Théorème 17.5 : **Produit et transposée**
Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors

$$\boxed{{}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA}$$

Théorème 17.6 : **Écriture matricielle d'une application linéaire**
Soit une application linéaire $(E,p,\mathbb{K}) \xrightarrow{u} (F,n,\mathbb{K})$, une base e de l'espace E et une base f de l'espace F. Soit un vecteur $x \in E$, et $X = Mat_e(x)$ sa matrice dans la base e. Notons $y = u(x) \in F$ et $Y = Mat_f(y)$ sa matrice dans la base f. Alors si $A = Mat_{e,f}(u)$ est la matrice de l'application linéaire u dans les deux bases e et f, on a l'égalité :

$$Y = AX$$

THÉORÈME 17.7 :
Soient deux matrices $A,B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = BX$$

alors $A = B$.

Exercice 17-1

Soit deux applications linéaires

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y,\, x+y+z) \end{cases} \qquad v : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y,\, x+2y,\, x-y) \end{cases}$$

On note e la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

a) Ecrire $Mat_{e,f}(u)$ et $Mat_{f,e}(v)$

b) Ecrire $Mat_{e,e}(v \circ u)$ et $Mat_{f,f}(u \circ v)$

c) Donner l'expression analytique de $u \circ v$ et $v \circ u$.

Exercice 17-2

Soit $(E,n,\mathbb{K})$ un espace de dimension n et $u \in L(E)$ un endomorphisme. On suppose que $\forall \phi \in E^\star$, $\phi \circ u = 0_{E^\star}$. Montrer que $u = 0_{L(E)}$.

17.4 L'algèbre des matrices carrées.

DÉFINITION 17.9 : **Matrice carrée**
On appelle *matrice carrée* d'ordre n à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$, une matrice $n \times n$. On note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées.

DÉFINITION 17.10 : **Matrice d'un endomorphisme dans une base**
Soit un $\mathbb{K}$-ev $(E,n,\mathbb{K})$ et un endomorphisme $u \in L(E)$. Soit une base $e = (e_1,\dots,e_n)$ de E. On appelle matrice de l'endomorphisme u dans la base e, la matrice de l'application linéaire u relativement aux bases e et e :

$$Mat_e(u) = Mat_{e,e}(u)$$

DÉFINITION 17.11 : **Matrice identité**
On appelle $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. C'est la matrice de l'endomorphisme id_E dans *n'importe quelle* base de E.

THÉORÈME 17.8 : **L'algèbre $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$**
Muni des lois définies précédemment, l'ensemble des matrices *carrées* $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2 et d'élément neutre I_n pour la multiplication.
Si e est une base de $(E,n,\mathbb{K})$, l'application

$$\phi : \begin{cases} \big(L(E), +, \cdot, \circ\big) & \longrightarrow & \big(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times\big) \\ u & \mapsto & Mat_e(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'algèbres.

THÉORÈME 17.9 : **Produit de matrices canoniques**
Pour deux matrices de la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on a la formule importante suivante qui donne leur produit :

$$\boxed{E_{kl}E_{pq} = \delta_{lp}E_{kq}}$$

Exercice 17-3

Soit une matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et deux indices $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$.

a) Déterminer les matrices AE_{kl} et $E_{kl}A$.

b) Trouver toutes les matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant : $\forall B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad AB = BA$.

DÉFINITION 17.12 : **Trace d'une matrice carrée**
Soit une matrice *carrée* $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *trace* de matrice A, le scalaire

$$\boxed{\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

THÉORÈME 17.10 : **Propriétés de la trace**
L'application

$$Tr : \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ A & \mapsto & \mathrm{Tr}(A) \end{cases}$$

est une *forme linéaire* sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$\forall (A,B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \boxed{\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)}$$

Exercice 17-4

Trouver toutes les formes linéaires ϕ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$\forall (A,B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \phi(AB) = \phi(BA)$$

Calculs dans l'algèbre $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

1. l'anneau $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas *commutatif* : en général

$$AB \neq BA$$

2. l'anneau $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas *intègre* :

$$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Puisque $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, on a les formules suivantes : si $A,B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, si $\boxed{AB = BA}$, et $p \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}} \qquad \text{(binôme)}$$

$$\boxed{A^p - B^p = (A-B)(A^{p-1} + A^{p-2}B + \cdots + AB^{p-2} + B^{p-1})}$$

$$\boxed{(I_n - A^p) = (I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1})}$$

Remarque 196. On utilise souvent la formule du binôme pour calculer les puissances d'une matrice. La dernière formule est intéressante lorsqu'une matrice est *nilpotente* : $A^p = 0$.

Exercice 17-5

Soit A une matrice carrée nilpotente. Montrer que la matrice $(I - A)$ est inversible.

Exercice 17-6

Soit deux scalaires $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17-7

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer les matrices A^2, A^3 et en déduire l'expression de la matrice A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17-8

Matrices de Jordan[1]

a) Soit la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer les matrices J^2 et J^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & & 0 \\ b & a & & & \vdots \\ 0 & b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & b & a & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b & a \end{pmatrix}$

17.5 Matrices remarquables

17.5.1 Matrices scalaires

Ce sont des matrices de la forme

$$M = \lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

Théorème 17.11 : L'ensemble des matrices scalaires est une sous-algèbre de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ isomorphe à l'algèbre $(\mathbb{K}, + , \times , \cdot)$.

17.5.2 Matrices diagonales

Ce sont des matrices de la forme

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(d_1, \dots ,d_n), \quad (d_1, \dots ,d_n) \in \mathbb{K}^n$$

Théorème 17.12 : L'ensemble des matrices diagonales est une sous-algèbre de l'algèbre des matrices carrées $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n, isomorphe à l'algèbre $\mathbb{K}^n$.

Remarque 197. Le produit de deux matrices diagonales s'obtient en faisant le produit des éléments diagonaux :

$$\mathrm{Diag}(d_1, \dots ,d_n) \times \mathrm{Diag}(d'_1 \dots ,d'_n) = \mathrm{Diag}(d_1 d'_1, \dots ,d_n d'_n)$$

1. Camille Jordan, (05/01/1838- 22/01/1922), Français. Ses travaux portent sur la géométrie, (courbes de Jordan), mais également sur l'étude du groupe des permutations, et les séries de Fourier

17.5.3 Matrices triangulaires

Définition 17.13 :
Soit une matrice $L = ((l_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice L est *triangulaire inférieure* si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i < j \Rightarrow l_{ij} = 0$$

Ce sont les matrices de la forme :

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \dots & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition 17.14 :
Soit une matrice $U = ((u_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que cette matrice U est *triangulaire supérieure* ssi

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i > j \Rightarrow u_{ij} = 0$$

Ce sont des matrices de la forme :

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 17.13 :
L'ensemble des matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures) est une sous-algèbre de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Remarque 198. Une matrice à la fois triangulaire inférieure et supérieure est diagonale.

17.5.4 Matrices symétriques, antisymétriques

Définition 17.15 : **Matrices symétriques, antisymétriques**
On dit qu'une matrice carrée A est *symétrique* ssi ${}^tA = A$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques.
On dit qu'une matrice carrée A est *antisymétrique* ssi ${}^tA = -A$. On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Théorème 17.14 :
$\mathcal{S}_n$ est un sous-espace de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$, $\mathcal{A}_n$ est un sous-espace de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$,

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$$

Remarque 199. $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ ne sont pas des sous-algèbres de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

17.6 Le groupe des matrices inversibles.

Définition 17.16 : **Matrices inversibles**
Soit une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On dit qu'elle est *inversible* ssi il existe une matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

On note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles.

Théorème 17.15 : **Elles forment un groupe**
L'ensemble des matrices inversibles $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}),\times)$ est un groupe (non-commutatif) d'élément neutre la matrice identité I_n.

Théorème 17.16 :
Soit $(E,n,\mathbb{K})$ un ev et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. L'application

$$\phi_e : \begin{cases} (\mathcal{GL}(E),\circ) & \longrightarrow & (\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}),\times) \\ u & \mapsto & Mat_e(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes.

Théorème 17.17 : **Caractérisation des matrices inversibles**
Soit une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$;
2. A est inversible à gauche : $\exists B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ tq $BA = I_n$;
3. A est inversible à droite : $\exists B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ tq $AB = I_n$;
4. $\forall X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$, $AX = 0 \Rightarrow X = 0$;
5. $\mathrm{rg}(A) = n$.

Exercice 17-9

Soient deux matrices carrées $A,B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = 0$. Montrer que si A est inversible, alors $B = 0$.

Exercice 17-10

Soit une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Montrer que la matrice ${}^tA$ est inversible et déterminer son inverse $\left({}^tA\right)^{-1}$.

Exercice 17-11

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible en utilisant l'algorithme du rang, puis déterminer son inverse A^{-1} en résolvant un système d'équations.

Exercice 17-12

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. On pose $M = I + A$.

a) Soit une matrice colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer la matrice ${}^tXAX$

b) En déduire que la matrice M est inversible.

Exercice 17-13

On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $A = ((a_{ij}))_{1 \le i,j \le n}$ à *diagonale dominante* :

$$\forall i \in [\![1,n]\!]^2, \quad |a_{ii}| > \sum_{j \ne i} |a_{ij}|$$

Montrer que la matrice A est inversible.

Exercice 17-14

Déterminer l'inverse de la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & a & 1 \end{pmatrix}$

17.7 Changement de bases

17.7.1 Matrices de passage

Définition 17.17 : **matrice de passage**
Soit un ev $(E,n,\mathbb{K})$ et deux bases $e = (e_1, \dots, e_n)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$ de l'espace E. On appelle *matrice de passage* de la base e vers la base f, la matrice

$$\boxed{P_{e \to f} = Mat_e(f_1, \dots, f_n)}$$

Théorème 17.18 : **Inverse d'une matrice de passage**
Si e,f,g sont trois bases de $(E,n,\mathbb{K})$, alors

$$P_{e\to f} = Mat_{f,e}(\mathrm{id})$$

$$P_{e\to f}P_{f\to g} = P_{e\to g}$$

$$P_{e\to f} \text{ est inversible et } \boxed{P_{e\to f}^{-1} = P_{f\to e}}$$

Théorème 17.19 : **Une matrice inversible s'interprète en matrice de passage**
Soit une matrice inversible $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et une base e de l'espace $(E,n,\mathbb{K})$. Alors il existe une base f de E telle que

$$P = P_{e\to f}$$

17.7.2 Changement de coordonnées

Théorème 17.20 : **Pour un vecteur**
Soit un espace vectoriel $(E,n,\mathbb{K})$ et un vecteur $x \in E$. Soient deux bases e et f de l'espace E. On note

$$X = Mat_e(x), \quad X' = Mat_f(x)$$

La relation liant les matrices du même vecteur x dans deux bases différentes s'écrit :

$$\boxed{X = P_{e\to f}X'}$$

$$\underset{f}{E} \xrightarrow{\mathrm{id}_E} \underset{e}{E}$$

Théorème 17.21 : **Pour une application linéaire**
Soit une application linéaire $(E,p,\mathbb{K}) \xrightarrow{u} (F,n,\mathbb{K})$. Soient deux bases e,e' de E et deux bases f,f' de F.

$$A = Mat_{e,f}(u) \quad \text{et} \quad A' = Mat_{e',f'}(u)$$

Alors la relation liant les matrices d'une même application linéaire relativement à quatre bases différentes s'écrit :

$$\boxed{A' = P_{f'\to f}AP_{e\to e'}}$$

$$\begin{tikzcd} \underset{e}{E} \arrow[r, "u"] & \underset{f}{F} \arrow[d, "\mathrm{id}_F"] \\ \underset{e'}{E} \arrow[u, "\mathrm{id}_E"] \arrow[r, "u"] & \underset{f'}{F} \end{tikzcd}$$

Théorème 17.22 : **Pour une forme linéaire**
Soit une forme linéaire $(E,p,\mathbb{K}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{K}$. Soient deux bases e et e' de E. Si l'on note $L = \mathrm{Mat}_e(\varphi) \in \mathfrak{M}_{1n}(\mathbb{K})$ et $L' = \mathrm{Mat}_{e'}(\varphi) \in \mathfrak{M}_{1n}(\mathbb{K})$, alors la relation liant les matrices de la même forme linéaire dans deux bases différentes s'écrit :

$$L' = LP_{e\to e'}$$

$$\begin{tikzcd} \underset{e}{E} \arrow[r, "\varphi"] & \underset{(1_{\mathbb{K}})}{\mathbb{K}} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{K}}"] \\ \underset{e'}{E} \arrow[u, "\mathrm{id}_E"] \arrow[r, "\varphi"] & \underset{(1_{\mathbb{K}})}{\mathbb{K}} \end{tikzcd}$$

THÉORÈME 17.23 : **Pour un endomorphisme**
Soit un endomorphisme$(E,n,\mathbb{K}) \xrightarrow{u} (E,n,\mathbb{K})$. Soient deux bases e,e' de E. Notons $P = P_{e\to e'}$ la matrice de passage entre les deux bases, et

$$A = Mat_e(u), \quad A' = Mat_{e'}(u)$$

Alors, la relation liant les matrices du même endomorphisme dans deux bases différentes s'écrit :

$$Mat_e(u) = P_{e\to e'} Mat_{e'}(u) P_{e'\to e}$$

$$\boxed{A = PA'P^{-1}}$$

$$\begin{array}{ccc} \underset{e}{E} & \xrightarrow{u} & \underset{e}{E} \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_E}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_E} \\ \underset{e'}{E} & \xrightarrow{u} & \underset{e'}{E} \end{array}$$

Exercice 17-15
Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$, et les deux vecteurs $f_1 = (1,2)$, $f_2 = (1,3)$.

a. Montrer que le système $f = (f_1,f_2)$ est une base de E.
b. Soit e la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Ecrire la matrice de passage $P_{e\to f}$.
c. Soit le vecteur $x = (4,1)$. Trouver matriciellement les coordonnées du vecteur x dans la base f.
d. Soit l'endomorphisme $u : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y,x-y) \end{cases}$. Écrire les matrices de cet endomorphisme dans les bases e et f : $Mat_e(u)$ et $Mat_f(u)$.

Exercice 17-16
$E = \mathbb{R}^2$. Déterminer tous les endomorphismes $u \in L(E)$ tels que :

$$\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(1,2), \text{ et } \mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(1,1)$$

17.7.3 Matrices semblables

DÉFINITION 17.18 :
Soient $A,B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices *carrées*. On dit qu'elles sont *semblables* ssi

$$\exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ tq } B = PAP^{-1}$$

Remarque 200. Cela définit une relation d'équivalence sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

THÉORÈME 17.24 : **Deux matrices sont semblables si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes**
Soit un ev $(E,n,\mathbb{K})$ et deux matrices carrées $A,B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Les matrices A et B sont semblables ssi il existe deux bases de E, e,e' et un endomorphisme $u \in L(E)$ tels que

$$A = Mat_e(u), \quad \text{et} \quad B = Mat_{e'}(u)$$

THÉORÈME 17.25 : **Puissances de matrices semblables**
Si deux matrices A et B sont semblables : $A = PBP^{-1}$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{A^k = PB^kP^{-1}}$$

THÉORÈME 17.26 : **Deux matrices semblables ont même trace**
Si deux matrices A et B sont semblables, alors elles ont même trace : $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

Définition 17.19 : Trace d'un endomorphisme
Soit un endomorphisme $u \in L(E)$. Soit une base e quelconque de l'espace E. On appelle trace de l'endomorphisme u, la trace de la matrice $Mat_e(u)$. Ce scalaire ne dépend pas de la base e choisie pour le calculer.

Exercice 17-17

Soient deux matrices semblables $A,B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que les matrices ${}^tA$ et ${}^tB$ sont semblables.

Exercice 17-18

Déterminer l'expression analytique de la projection sur $F = \text{Vect}(1,2)$ parallèlement à $G = \text{Vect}(1,-1)$.

Exercice 17-19

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 17-20

Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 17-21

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = A$. Montrer que $\text{Tr}(A) \in \mathbb{N}$.

Exercice 17-22

Soit un ev $(E,n,\mathbb{R})$ de dimension n et un endomorphisme $u \in L(E)$ nilpotent d'indice n. Montrer que $\text{Tr}(u) = 0$.

Exercice 17-23

On considère l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ et l'endomorphisme $D : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$. Écrire la matrice de D dans la base canonique. Quelle-est la base la mieux adaptée pour représenter D ?

17.8 Rang d'une matrice

Définition 17.20 : rang
Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ rectangulaire et $C_1,\dots,C_p \in \mathbb{K}^n$ ses vecteurs colonnes.
On appelle *rang* de la matrice A, le rang du système de vecteurs $(C_1,\dots,C_p)$ dans l'espace $\mathbb{K}^n$.

Proposition 17.27 : Le rang d'une matrice est le rang de l'application linéaire qu'elle représente
Soit deux espaces vectoriels $(E,p,\mathbb{K})$, $(F,n,\mathbb{K})$ munis de deux bases e et f. Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$. On sait qu'il existe une unique application linéaire $u \in L(E,F)$ telle que $\text{Mat}_{e,f}(u) = A$. Alors
$$\text{rg}(A) = \text{rg}(u) = \dim \text{Im}\, u$$

Définition 17.21 : Matrice $I_r(n,p)$
Soient deux entiers n, p et un entier $r \le \min(n,p)$. On définit la matrice

$$I_r(n,p) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & 0 & \dots 0 \end{pmatrix}$$

On a $\text{rg}\big(I_r(n,p)\big) = r$.

Théorème 17.28 : **Caractérisation du rang**
Soit une matrice rectangulaire $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$. Soit $r \in [\![0, \min(n,p)]\!]$. Alors

$$\underbrace{\big(\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ \exists Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \text{ telles que } A = PI_r(n,p)Q\big)}_{(i)} \Longleftrightarrow \underbrace{\big(\mathrm{rg}(A) = r\big)}_{(ii)}$$

Remarque 201. Étudier la démonstration de $(ii) \Rightarrow (i)$: elle est typique de construction de bases adaptées.

Théorème 17.29 : **Une matrice et sa transposée ont même rang**
Soit une matrice rectangulaire $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$$

Remarque 202. Comme conséquence, on peut utiliser à la fois les lignes et les colonnes dans l'algorithme du rang.
Remarque 203. On définit sur $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ une relation d'équivalence par :

$$\forall (A,B) \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})^2, \quad A\mathcal{R}B \Longleftrightarrow \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ \exists Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \text{ telles que } A = PBQ$$

Si $A\mathcal{R}B$, on dit que les matrices A et B sont *équivalentes*. Cette relation est plus simple que la relation de similitude : deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Exercice 17-24

Montrer que deux matrices semblables ont même trace et même rang.
Trouver deux matrices $A,B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ de même rang et même trace qui ne sont pas semblables.

Exercice 17-25

Endomorphismes de rang 1

a. Soit $(E,n,\mathbb{K})$ et un endomorphisme $f \in L(E)$ de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$.
b. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\underbrace{\big(\mathrm{rg}(A) = 1\big)}_{(i)} \Longleftrightarrow \underbrace{\big(\exists (X,Y) \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})^2\ A = X\,{}^tY\big)}_{(ii)}$.

Chapitre 18

Développements limités

18.1 Définitions

Définition 18.1 : **DL**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et un point $x_0 \in I$. On dit que la fonction f admet un *développement limité* à l'ordre n en x_0 s'il existe un polynôme

$$F(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

de degré $\leq n$ et une fonction $\varepsilon : I \mapsto \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = F(x) + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

On dit alors que $F(x)$ est la *partie régulière* du DL et $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ est le *reste* du DL. On écrit le reste sous la forme $o\big((x - x_0)^n\big)$.

Remarque 204. Par un changement de variables $h = x - x_0$ ou $h = 1/x$, on peut toujours se ramener au cas où $x_0 = 0$. Dorénavant, nous parlerons uniquement de DL en 0.

Théorème 18.1 : **DL de** $\dfrac{1}{1-x}$
La fonction $\dfrac{1}{1-x}$ définie sur $]-\infty,1[$ admet un $DL(0,n)$ quel que soit n, et l'on connaît *explicitement* le reste :

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}}$$

où $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = x^n \dfrac{x}{1-x}$ et $\varepsilon(x) = \dfrac{x}{1-x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

On en déduit d'autres DL :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n})$$

Théorème 18.2 : **Unicité d'un DL et applications**
Soit une fonction f admettant un $DL(0,n)$. Alors :

1. la partie principale est unique ;
2. $\forall k \leq n$, f admet un $DL(0,k)$ obtenu en tronquant la partie principale du $DL(0,n)$ à l'ordre k ;
3. Si f est paire (reps. impaire) sur un voisinage de 0, alors la partie principale du DL est un polynôme pair (resp. impair).

Remarque 205. Si la fonction f est paire, et si elle admet un DL à l'ordre $(2n + 1)$, alors son DL s'écrit :

$$f(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots + a_{2n} x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

Théorème 18.3 : **Combinaison linéaire de DL**
Soient deux fonctions f et g qui admettent des $DL(0,n)$ de partie régulière $F(x)$ et $G(x)$. Soient deux scalaires $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un $DL(0,n)$ de partie régulière $\lambda F(x) + \mu G(x)$.

18.2 Développements limités classiques.

18.2.1 Obtention par Taylor-Young

Théorème 18.4 : Si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un voisinage de 0, alors f possède un $DL(0,n)$ donné par la forule de Taylor-Young :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

On obtient alors les DL suivants :

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}$$

$$\boxed{\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})}$$

$$\boxed{\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})}$$

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})}$$

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})}$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Deux cas particuliers lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$:

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)}$$

Exercice 18-1

Exprimer les coefficients a_k et b_k des $DL(0,n)$ de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ et de $\sqrt{1-x}$ que l'on exprimera à l'aide de coefficients binômiaux.

18.2.2 Obtention de DL par primitivation

Théorème 18.5 : **Primitivation d'un DL**
Soit un intervalle I contenant 0 et une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On suppose que la fonction f' admet un $DL(0,n)$ de la forme

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

Alors f admet un $DL(0,n+1)$ obtenu en primitivant la partie régulière et en ajoutant $f(0)$:

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Remarque 206. Ce théorème est très utile pour trouver des DL de fonctions dont les dérivées sont simples, comme les fonctions trigonométriques inverses.
On obtient les DL suivants par primitivation :

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)}$$

$$\boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})}$$

$$\boxed{\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

$$\boxed{\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$$

Exercice 18-2

Trouver un $DL(0{,}5)$ de la fonction $f(x) = \arctan(\frac{1}{x})$.

Remarque 207. On peut primitiver les développements limités grâce au théorème précédent, mais on n'a pas le droit de les *dériver*.

18.2.3 Produit de DL

Théorème 18.6 : **Produit de DL**
Si deux fonctions f et g admettent des $DL(0,n)$ de parties régulières $F(x)$ et $G(x)$, alors la fonction fg admet un $DL(0,n)$ de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur à n dans le polynôme $F(x)G(x)$.

Remarque 208. Les termes de degré $\geq n$ n'ont aucune signification !

Exercice 18-3

Obtenir le $DL(0{,}2)$ de $(1-x) = \sqrt{1-x}\sqrt{1-x}$ par produit de DL.

Exercice 18-4

Trouver le $DL(0{,}3)$ des fonctions $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1-x}$ et $g(x) = \dfrac{\sin x \operatorname{sh} x}{\sqrt{1-x^2}}$.

18.2.4 Obtention de DL par composition

Théorème 18.7 : **Composée de DL**
Si la fonction f admet un $DL(0,n)$ et la fonction g un $DL(0,n)$, et si $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0}$, alors la fonction $g \circ f$ admet un $DL(0,n)$ de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur à n dans le polynôme $G \circ F(x)$.

Exercice 18-5

Trouver les $DL(0{,}3)$ des fonctions $\sin(\operatorname{sh} x)$ et $\operatorname{ch}(\ln(1+x))$.

Exercice 18-6

Trouver le $DL(0{,}2)$ de $e^{\sqrt{1+x^2}}$ et le $DL(0{,}2)$ de $\ln(1+x+\sqrt{1+x})$.

Exercice 18-7

Trouver le $DL(\frac{\pi}{4},3)$ de $\sin x$.

Exercice 18-8

Trouver le $DL(0{,}2)$ de $f(x) = \arctan\left(\dfrac{2+x}{1+x}\right)$.

Exercice 18-9

Déterminer le $DL(0,5)$ de la fonction tangente, en utilisant :

1. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ et en faisant les produits de DL ;
2. la relation $\forall x \in]-\pi/2,\pi/2[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)}$$

18.3 Applications des développements limités

18.3.1 Recherche de limites et d'équivalents

Pour chercher $\lim_{x\to x_0} f(x)$:

1. La limite est-elle évidente ?
2. On effectue un changement de variables $h = (x - x_0)$ ou $h = \dfrac{1}{x}$ pour se ramener en 0 ;
3. si f est définie comme produit de fonctions, on cherche séparément un équivalent simple de chaque produit ;
4. un développement limité $h(x) = a_k x^k + o(x^k)$ avec $a_k \neq 0$ donne l'équivalent $h(x) \sim a_k x^k$;
5. on peut sommer des DL, c'est leur principal avantage sur les équivalents.

Exercice 18-10

Trouver $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} x^2}$ et $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \operatorname{sh} x}{x^3}$.

Exercice 18-11

Trouver $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x) + \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{2}}{\sin^4 x}$.

Exercice 18-12

Trouver $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ et un équivalent de $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x - e$.

Exercice 18-13

Trouver la limite de la suite de terme général $u_n = \left(\dfrac{\cos\frac{1}{n} + \operatorname{ch}\frac{1}{n}}{2}\right)^{n^4}$.

18.3.2 Prolongement d'une fonction

Théorème 18.8 : DL et prolongement

Soit une fonction f définie sur l'intervalle $]0,a[$ admettant un $DL(0,n)$ en 0 avec $n \geq 1$:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$$

Alors

1. la fonction f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = a_0$;
2. le prolongement de f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.

Exercice 18-14

Etudier le prolongement en 0 de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Exercice 18-15

Montrer que la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque 209. Un développement limité à un ordre supérieur à 2 n'apporte en général pas d'information sur la régularité de la fonction. En effet, considérons l'exemple suivant, avec $n \geq 2$:

$$f(x) = \begin{cases} x^{n+1}\sin\left(\dfrac{1}{x^n}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Cette fonction admet un $DL(0,n)$, avec $n \geq 2$. Elle est donc dérivable en 0, mais sa dérivée

$$\forall x \neq 0, \quad f'(x) = (n+1)x^n \sin(1/x^n) - n\cos\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

n'a pas de limite lorsque $x \to 0$. Par conséquent, f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$, et à fortiori, n'est pas deux fois dérivable au voisinage de 0. En d'autres termes, le coefficient a_2 d'un $DL(0,2)$ n'apporte pas d'informations en général sur $f''(0)$!

THÉORÈME 18.9 : **Position locale par rapport à la tangente**
Si une fonction f admet un DL en x_0 de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_k(x - x_0)^k + o\big((x - x_0)^k\big), \quad a_k \neq 0$$

Alors

1. l'équation de la tangente en x_0 est $Y = a_0 + a_1(X - x_0)$;
2. $f(x) - [a_0 + a_1(x - x_0)] \sim a_k(x - x_0)^k$, et en fonction du signe de a_k et de la parité de k, on en déduit la position locale de la courbe par rapport à sa tangente.

Exercice 18-16

Etude locale en 0 des fonctions définies par $\dfrac{\sin x}{\operatorname{sh} x}$ et $\dfrac{\sin^2 x}{x}$.

Exercice 18-17

Etudier complètement les prolongements en 0 des fonctions définies par $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$ et $g(x) = \dfrac{(e^{\operatorname{sh} x} - \cos x)^2}{\ln \cos x}$.

18.3.3 Branches infinies d'une courbe $y = f(x)$

Pour étudier une branche infinie d'une courbe $y = f(x)$ en $\pm\infty$:

1. on fait le changement de variables $h = \dfrac{1}{x}$.
2. on effectue un « développement généralisé » de $\widetilde{f}(h)$ en 0 avec un terme significatif qui tend vers 0 ;
3. on revient à $f(x)$: on obtient un « développement asymptotique » que l'on interprète pour trouver l'équation d'une asymptote et la position locale de la courbe par rapport à l'asymptote.

Exercice 18-18

Etude complète de la fonction définie par $f(x) = (x + 2)e^{1/x}$.

Exercice 18-19

Etudier les branches infinies de la courbe représentative de $f(x) = x^2 e^{x/(x^2-1)}$.

18.3.4 Étude locale des courbes paramétrées

On considère un arc paramétré $(I, \overrightarrow{F})$ et un point stationnaire $M(t_0)$.

THÉORÈME 18.10 : **Tangente en un point stationnaire**
Si $\overrightarrow{F}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, et s'il existe $p \leq k$ tel que $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, alors la courbe possède une tangente au point $M(t_0)$ dirigée par le premier vecteur $\overrightarrow{F'}(t_0), \ldots, \overrightarrow{F^p}(t_0)$ non-nul.

THÉORÈME 18.11 : Position locale de la courbe par rapport à sa tangente
On suppose que la fonction $\overrightarrow{F}$ est suffisamment régulière, et qu'il existe deux entiers $1 \leq p < q$ tels que :

1. $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$ est le premier vecteur non-nul parmi $\overrightarrow{F'}(t_0),\dots,\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$.
2. q est le premier entier parmi $p+1,\dots,q$ tel que le système de vecteurs $(\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0),\overrightarrow{F^{(q)}}(t_0))$ soit libre (il forme donc une base de $\mathbb{R}^2$).

Alors le vecteur $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$ dirige la tangente à la courbe au point $M(t_0)$, et pour $t \neq t_0$, on peut décomposer dans la base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \left(\dfrac{\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)}{p!},\dfrac{\overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)}{q!}\right)$ le vecteur

$$\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \overrightarrow{F}(t) - \overrightarrow{F}(t_0) = X(t)\overrightarrow{u} + Y(t)\overrightarrow{v}$$

Alors lorsque $t \to t_0$,

$$X(t) \sim (t-t_0)^p, \quad Y(t) \sim (t-t_0)^q$$

On en déduit alors la position locale de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de t_0, en fonction de la parité des entiers p et q.

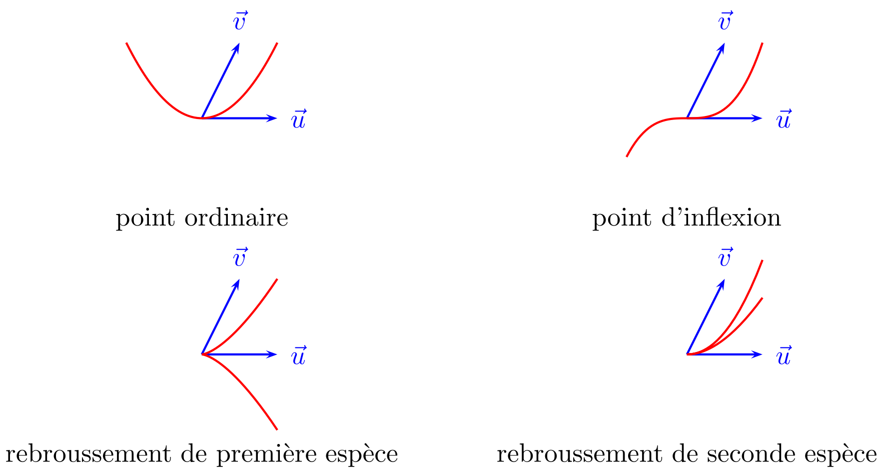


FIG. 18.1 – *Étude locale d'une courbe paramétrée*

Remarque 210. Il est plus simple de faire un développement limité des deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ au voisinage de t_0 (à l'ordre 3 au moins si $M(t_0)$ est un point stationnaire), et d'interpréter vectoriellement ce développement limité.

Exercice 18-20

On considère la courbe paramétrée définie par $x(t) = 3\cos t - 2\sin^3 t$, $y(t) = \cos 4t$ $(t \in [0,\pi])$

a) Déterminer les points stationnaires de cette courbe.

b) Faire l'étude locale en ces points.

18.3.5 Branches infinies des courbes paramétrées

On peut étudier l'existence de courbes asymptotes et préciser la position locale de la courbe par rapport à ces asymptotes. Pour cela, on utilise un développement asymptotique des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ par rapport à t lorsque $t \to t_0$ avec *un terme significatif* qui tend vers 0. On essaie alors de faire une combinaison linéaire des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ pour éliminer les termes tendant vers l'infini. Si on trouve une relation du type

$$y(t) = ax(t) + b + c(t-t_0)^k + o\left((t-t_0)^k\right)$$

alors on en déduit que la droite $y = ax + b$ est asymptote à la courbe et la position locale de la courbe par rapport à son asymptote se déduit du signe de c et de la parité de k.

Exercice 18-21

Étudier la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^2}{(t-2)(t+1)} \\ y(t) &= \dfrac{t^2(t+2)}{t+1} \end{cases}$$

Exercice 18-22

Étudier la branche infinie lorsque $t \to \pm\infty$ de la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^2}{t+1} \\ y(t) &= \dfrac{t^4}{2+t} \end{cases}$$

18.3.6 Équations différentielles non-normalisées

On considère une équation différentielle non-normalisée

$$(E): \quad a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

sur un intervalle $I =]\alpha,\beta[$. On suppose que la fonction a s'annule une seule fois en un point $t_0 \in I$.

1. On résout (E) sur l'intervalle $I_1 =]\alpha,t_0[$. Les solutions de (E) sur I_1 sont les solutions de l'équation normalisée
$$(E_1): \quad y' + \frac{b(t)}{a(t)}y = \frac{c(t)}{a(t)}$$
et sont de la forme :
$$y_1(t) = \lambda y_0^1(t) + \widetilde{y}_1(t)$$
2. On résout de la même façon l'équation différentielle sur l'intervalle $I_2 =]t_0,\beta[$ et on trouve sur I_2 des solutions de la forme
$$y_2(t) = \mu y_0^2(t) + \widetilde{y}_2(t)$$
3. On détermine les constantes λ,μ pour définir une fonction $y(t)$ sur I par :
$$y : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} \lambda y_0^1(t) + \widetilde{y}_2(t) & \text{si } t \in]\alpha,t_0[\\ \theta & \text{si } t = t_0 \\ \mu y_0^2 + \widetilde{y}_2(t) \text{ si } t \in]t_0,\beta[\end{cases} \end{cases}$$
4. On doit vérifier que y est dérivable en t_0 ;
5. On doit vérifier que $b(t_0)y(t_0) = c(t_0)$.

Exercice 18-23

Résoudre l'équation différentielle

$$(E) \ : x(x^2+1)y' + y + x = 0$$

sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ quelconque.

Exercice 18-24

Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : 2t(1+t)y' + (1+t)y = 1$$

sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Exercice 18-25

Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : (x+1)y' = y+1$$

sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Chapitre 19

Déterminants

19.1 Groupe symétrique

> DÉFINITION 19.1 : **Groupe symétrique**
> Soit un ensemble E. On appelle *permutation* de E, une bijection $\sigma : E \mapsto E$. On note $\mathfrak{S}_E$ l'ensemble des permutations de l'ensemble E. Puisque $\mathfrak{S}_E = \mathcal{B}(E)$, on sait que $(\mathfrak{S}_E, \circ)$ est un groupe, appelé *groupe des permutations* de l'ensemble E.

Dans la suite, on considèrera un ensemble fini E de cardinal n, et en particulier $E = [\![1,n]\!]$.

> DÉFINITION 19.2 : **Groupe symétrique**
> Lorsque l'ensemble $E = [\![1,n]\!]$, on note $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de E qui est un groupe fini de cardinal $n!$. Ce groupe s'appelle le *groupe symétrique* d'ordre n. Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se note
> $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

19.1.1 Cycles, transpositions

> DÉFINITION 19.3 : **Orbite d'un élément**
> Soit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_E$ et un élément $x \in E$. On appelle *orbite* de l'élément x selon la permutation σ, l'ensemble $\mathcal{O}(x) = \{\sigma^k(x) \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$.

`Exemple 27.` Si $E = \{1,2,3,4,5,6\}$, et $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(2) = \{1,2\}$ et $\mathcal{O}(3) = \mathcal{O}(4) = \mathcal{O}(5) = \mathcal{O}(6) = \{3,4,5,6\}$.

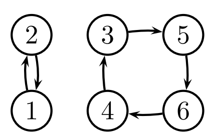


FIG. 19.1 – *Orbites d'une permutation*

Remarque 211. Si $y \in \mathcal{O}(x)$, alors $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$.

> DÉFINITION 19.4 : **Permutation circulaire**
> Soit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_E$. On dit que c'est une *permutation circulaire* s'il existe un élément $x \in E$ tel que $\mathcal{O}(x) = E$.

`Exemple 28.` Si $E = \{1,2,3,4\}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une permutation circulaire :

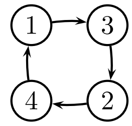


FIG. 19.2 – *Permutation circulaire*

Remarque 212. Il y a $(n-1)!$ permutations circulaires dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

Définition 19.5 : Cycle
Soit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_E$. On dit que σ est un *cycle* s'il y a au plus une orbite qui n'est pas réduite à un élément. Cette orbite s'appelle le *support* du cycle, et le cardinal de cette orbite s'appelle la *longueur* du cycle.

`Exemple 29.` $E = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, est un cycle de support $\{1,2,3\}$ et de longueur 3. On note plus simplement $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ un tel cycle.

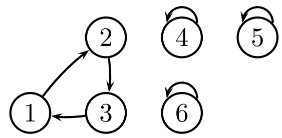


Fig. 19.3 – *Un cycle de longueur* 3

Exercice 19-1
Déterminer le nombre de cycles de longueur p dans $\mathfrak{S}_n$. Quel est l'ordre d'un cycle dans le groupe $\mathfrak{S}_E$?

Lemme 19.1 : Deux cycles de supports disjoints commutent
Soient deux cycles σ_1 et σ_2 de $\mathfrak{S}_E$ de supports disjoints. Alors $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$.

Théorème 19.2 : Décomposition d'une permutation en produit de cycles
Soit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_E$. Elle se décompose en un produit fini de cycles de supports disjoints qui commutent deux à deux.

Exercice 19-2
Décomposer la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 1 & 2 & 4 & 6 & 7 & 5 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ en produit de cycles, puis calculer la permutations σ^{2001}. Déterminer ensuite le cardinal du sous-groupe engendré par σ dans $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 19-3
Déterminer les ordres des éléments du groupe $\mathfrak{S}_4$.

Définition 19.6 : Transpositions
Une *transposition* de $\mathfrak{S}_E$ est un cycle de longueur 2. Une transposition échange deux éléments a, b et laisse les autres invariants. On note τ_{ab} cette transposition.

Exercice 19-4
Quel est le nombre de transpositions dans le groupe $\mathfrak{S}_n$? Quel est l'ordre d'une transpostion ? Dans $\mathfrak{S}_n$, $(n \geq 3)$, calculer $\tau_{12} \circ \tau_{23}$ et $\tau_{23} \circ \tau_{12}$.

Théorème 19.3 : Décomposition d'une permutation en produit de transpositions
Toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ se décompose en un produit fini de transpositions :

$$\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$$

(Il n'y a pas unicité de la décomposition et les transpositions ne commutent pas).

Remarque 213. En d'autres termes, l'ensemble des transpositions engendre le groupe symétrique.

Exercice 19-5
Décomposer la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ en produit de transpositions.

Exercice 19-6
Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, calculer $\tau_{1i} \circ \tau_{1j} \circ \tau_{1i}$ et montrer que les transpositions de la forme τ_{1i} engendrent le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

19.1.2 Signature d'une permutation

Définition 19.7 : **Signature d'une permutation**
Soit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On dit qu'un couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ est un *inversion* de σ lorsque

$$i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)$$

On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversions de la permutation σ, et on définit la *signature* de la permutation σ par

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$$

Remarque 214. On dit qu'une permutation σ est *paire* si $\varepsilon(\sigma) = +1$ et *impaire* lorsque $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Exercice 19-7
Déterminer le nombre d'inversions et la signature de la permutation $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 1 & 4 & 6 \end{smallmatrix}\right)$.

Lemme 19.4 : **Expression algébrique de la signature**
Soit une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On a les expressions suivantes pour sa signature :

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \prod_{\substack{\{i,j\} \subset [\![1,n]\!] \\ i \neq j}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Théorème 19.5 : **La signature est un morphisme de groupe**
L'application

$$\varepsilon : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathfrak{S}_n, \circ) & \longrightarrow & (\{-1,1\}, \times) \\ \sigma & \mapsto & \varepsilon(\sigma) \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes. Le noyau de ce morphisme

$$\mathcal{A}_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \varepsilon(\sigma) = +1\}$$

est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ qui s'appelle le *groupe alterné* d'ordre n.

Lemme 19.6 : **Effet des transpositions sur la signature**
Soit une permuation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et une transposition $\tau \in \mathfrak{S}_n$. Alors :

$$\varepsilon(\tau) = -1, \quad \varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\tau \circ \sigma) = -\varepsilon(\sigma)$$

Proposition 19.7 : Le groupe alterné $\mathcal{A}_n$ est de cardinal $\dfrac{n!}{2}$. Si τ est une transposition quelconque, l'application

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{A}_n & \longrightarrow & \mathfrak{S}_n \setminus \mathcal{A}_n \\ \sigma & \mapsto & \tau \circ \sigma \end{array} \right.$$

est une bijection.

Corollaire 19.8 : **Autre caractérisation de la signature**
Si une permutation σ s'écrit comme produit de p transpositions,

$$\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_p$$

alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$.

Remarque 215. La décomposition d'une permutation en produit de transpositions n'est pas unique, mais la *parité* du nombre de transpositions est la même pour toute décomposition.

Exercice 19-8
Dans les années 1870, Sam Loyd a offert une prime de 1000 dollars à la personne qui trouverait la solution du jeu de taquin suivant : la case 16 est vide, et les pièces peuvent glisser sur cette case vide. Lors du premier coup, on peut faire glisser la case 15 ou la case 12 sur la case vide, et ainsi de suite. Le défi consiste à obtenir la même configuration que la configuration initiale où les cases 14 et 15 sont inversées. Qu'en pensez-vous ?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

FIG. 19.4 – *Position initiale et finale du puzzle* 15

19.2 Formes n-linéaires alternées

DÉFINITION 19.8 : **Applications n-linéaires**
Soient deux $\mathbb{K}$-ev E et F. On dit qu'une application $\phi : E^n \mapsto F$ est une application n-linéaire si et seulement si :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall (x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) \in E^{n-1},\ \forall (x,y) \in E^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,$$
$$\phi(x_1,\dots,x_{i-1},\lambda x+\mu y,x_{i+1},\dots,x_n) = \lambda\phi(x_1,\dots,x_{i-1},x,x_{i+1},\dots,x_n)$$
$$+\mu\phi(x_1,\dots,x_{i-1},y,x_{i+1},\dots,x_n)$$

En d'autres termes, ϕ est linéaire par rapport à chacune des variables, les autres étant fixées. On note $\mathcal{L}^n(E,F)$ l'ensemble des applications n-linéaires sur l'espace vectoriel E à valeurs dans l'espace vectoriel F.

`Exemple 30.` Le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

$$\wedge : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & x \wedge y \end{array} \right.$$

est une application 2-linéaire de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Remarque 216. De la définition, on tire que $\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n$, $\forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

1. $\phi(x_1,\dots,x_{i-1},0_E,x_{i+1},\dots,x_n) = 0_F$.
2. $\phi(\lambda_1 x_1,\dots,\lambda_n x_n) = (\lambda_1 \cdots \lambda_n)\phi(x_1,\dots,x_n)$.

DÉFINITION 19.9 : **Forme n-linéaire**
Une application n-linéaire d'un espace E à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$ est appelée une *forme n-linéaire* sur E. On note $\mathcal{L}^n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires.

`Exemple 31.` Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$

$$(.\mid.) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{array} \right.$$

est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$.

DÉFINITION 19.10 : **Opération de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathcal{L}^n(E)$**
Soit une forme n-linéaire $\phi \in \mathcal{L}^n(E)$ et une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On définit l'application

$$\sigma \star \phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1,\dots,x_n) & \mapsto & \phi\big(x_{\sigma(1)},\dots x_{\sigma(n)}\big) \end{array} \right.$$

On vérifie que $\sigma \star \phi$ est également une forme n-linéaire.

DÉFINITION 19.11 : **Forme n-linéaire symétrique, antisymétrique**
Soit une forme n-linéaire $\phi \in \mathcal{L}^n(E)$. On dit que

1. ϕ est *symétrique* si et seulement si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma \star \phi = \phi$;
2. ϕ est *antisymétrique* si et seulement si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sigma \star \phi = \varepsilon(\sigma)\phi$ où $\varepsilon(\sigma) \in \{-1,1\}$ est la signature de la permutation σ.

Remarque 217. Les formes n-linéaires antisymétriques sont caractérisées par la propriété suivante : « lorsqu'on échange deux vecteurs, la valeur de la forme n-linéaire est changée en son opposé ». En effet, toute permutation est un produit de transpositions et une transposition est une permutation impaire.

DÉFINITION 19.12 : **Formes n-linéaires alternées**
Une forme n-linéaire ϕ est *alternée* si et seulement si

$$\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n, \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$$
$$i \neq j \text{ et } x_i = x_j \Rightarrow \phi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) = 0_{\mathbb{K}}$$

On note $\mathcal{A}^n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E. C'est un $\mathbb{K}$-ev.

THÉORÈME 19.9 : **Équivalence entre antisymétrique et alternée**
Si le corps $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, pour toute forme n-linéaire $\phi \in \mathcal{L}^n(E)$,

$$\underset{(i)}{\big(\phi \text{ alternée }\big)} \iff \underset{(ii)}{\big(\phi \text{ antisymétrique }\big)}$$

THÉORÈME 19.10 : **Une forme n-linéaire alternée détecte les systèmes liés**
Soit une forme n-linéaire alternée $\phi \in \mathcal{A}^n(E)$ d'un espace de dimension finie quelconque p, et un système $S = (x_1,\dots,x_n)$ formé de n vecteurs de E. Alors

$$S \text{ lié } \Rightarrow \phi(x_1,\dots,x_n) = 0$$

Remarque 218. On en déduit que si E est un espace de dimension n, et si $p > n$, alors $\mathcal{A}^p(E) = \{0\}$.

19.3 Déterminant d'un système de vecteurs dans une base

Exercice 19-9

On considère un espace vectoriel E_2 de dimension 2, et (e_1,e_2) une base de cet espace. Déterminer l'ensemble des formes 2-linéaires alternées $\mathcal{A}^2(E_2)$.

On considère désormais un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie n.

THÉORÈME 19.11 : **L'ensemble des formes n-linéaires alternées d'un espace de dimension n est une droite vectorielle**
Soit $e = (e_1,\dots,e_n)$ une base de l'espace vectoriel E. Alors :

1. l'ensemble des formes n-linéaires alternées $\mathcal{A}^n(E)$ est une droite vectorielle.
2. Considérons l'application

$$\det_e : \begin{cases} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (X_1,\dots,X_n) & \mapsto & \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \dots x_{\sigma(n)n} \end{cases}$$

   où les scalaires x_{ij} sont les coordonnées des vecteurs $(X_1,\dots,X_n)$ dans la base e : $\operatorname{Mat}_e(X_1,\dots,X_n) = ((x_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$. L'application $\det_e$ est l'unique forme n-linéaire alternée vérifiant $\det_e(e_1,\dots,e_n) = 1$.
3. On a $\mathcal{A}^n(E) = \operatorname{Vect}(\det_e)$.

Remarque 219. En généralisant le calcul précédent, on montre que la dimension de $\mathcal{A}^p(E_n)$ vaut 0 lorsque $p > n$, et $\binom{n}{p}$ lorsque $1 \leq p \leq n$.

DÉFINITION 19.13 : **Déterminant d'un système de vecteurs dans une base**
Soit un espace vectoriel E de dimension n et une base $e = (e_1,\dots,e_n)$ de cet espace. Soit un système de n vecteurs $S = (X_1,\dots,X_n)$. On note (x_{ij}) les coordonnées des vecteurs de S dans la base e. On appelle *déterminant* du système S dans la base e, le scalaire :

$$\det_e(S) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \dots x_{\sigma(n)n}$$

on note ce scalaire

$$\det_e(S) = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

THÉORÈME 19.12 : **Formule de changement de base**
Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. Pour tout système $S = (X_1, \dots, X_n)$ de n vecteurs de E, on a :

$$\det_{e'}(X_1, \dots, X_n) = \det_{e'}(e_1, \dots, e_n) \times \det_e(X_1, \dots, X_n)$$

L'intérêt du déterminant réside dans la propriété suivante :

THÉORÈME 19.13 : **Le déterminant dans une base caractérise les systèmes liés**
Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, e une base de E et un système $S = (X_1, \dots, X_n)$ de n vecteurs de E. Alors :

$$\underset{(i)}{\big(S \text{ est lié}\big)} \iff \underset{(ii)}{\big(\det_e(X_1, \dots, X_n) = 0_{\mathbb{K}}\big)}$$

19.4 Déterminant d'un endomorphisme

DÉFINITION 19.14 : **Déterminant d'un endomorphisme**
Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et un endomorphisme $u \in L(E)$. Soit une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Le scalaire

$$\det_e\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big)$$

est indépendant de la base e : il ne dépend que de l'endomorphisme u et on le note $\det(u)$.

THÉORÈME 19.14 : **Propriétés du déterminant d'endomorphismes**
Soient deux endomorphismes $(u,v) \in L(E)^2$. Alors :

1. $\det(\mathrm{id}_E) = 1_{\mathbb{K}}$, $\det(0_E) = 0_{\mathbb{K}}$, $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$;
2. $\boxed{\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v)}$;
3. $(u \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})) \iff (\det(u) \neq 0)$;
4. Si $u \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$, alors $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

Remarque 220.
1. L'application $\det : L(E) \mapsto \mathbb{K}$ n'est pas linéaire. En général, on n'a pas $\det(u + v) = \det(u) + \det(v)$.
2. Le déterminant est un morphisme de groupes :

$$\det : \begin{cases} (\mathrm{GL}(\mathbb{E}),\circ) & \longrightarrow & (\mathbb{K}^\star,\times) \\ u & \mapsto & \det(u) \end{cases}$$

19.5 Calcul de déterminants

DÉFINITION 19.15 : **Déterminant d'une matrice carrée**
Soit une matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

On appelle déterminant de cette matrice A, le scalaire

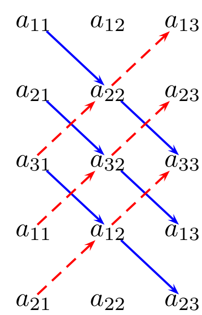
$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

`Exemple 32.`
1. En dimension 2,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

2. En dimension 3, on dispose de la règle de Sarrus pour calculer un déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$



THÉORÈME 19.15 : **Propriétés du déterminant d'une matrice**
Soit deux matrices carrées $A,B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et e une base de l'espace E. On a les propriétés suivantes :

1. $\exists! u \in L(E)$ tq $A = \mathrm{Mat}_e(u)$. Alors $\det(A) = \det(u)$.
2. (A inversible) $\iff (\det(A) \neq 0)$.
3. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
4. Si A est inversible, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
5. Deux matrices semblables ont même déterminant.
6. $\det(C_1,\dots,C_i - \sum_{k\neq i} \lambda_k C_k,\dots,C_n) = \Delta$.
7. $\det(C_1,\dots,\lambda C_i,\dots,C_n) = \lambda \det(C_1,\dots,C_i,\dots,C_n)$.
8. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
9. On change le signe du déterminant en inversant deux colonnes. Plus généralement, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\det\big(C_{\sigma(1)},\dots,C_{\sigma(n)}\big) = \varepsilon(\sigma)\det(C_1,\dots,C_n)$.
10. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux :
$$\begin{vmatrix} d_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ D & & d_n \end{vmatrix} = d_1 \dots d_n$$
11. $\det(A) = \det({}^tA)$. Grâce à cette remarque, les propriétés citées sur les colonnes de la matrices sont encore vraies sur les lignes.
12. Si A est une matrice $p \times p$, C une matrice carrée $(n-p)\times(n-p)$ et B une matrice rectangulaire $p \times (n-p)$, on a la formule suivante pour le calcul d'un déterminant par blocs :
$$\begin{vmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{vmatrix} = \det(A)\det(C)$$

DÉFINITION 19.16 : **Cofacteurs**
Soit un déterminant d'une matrice $n \times n$.
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1. On note m_{ij} le déterminant $(n-1)\times(n-1)$ obtenu en barrant la ième ligne et la jième colonne de Δ. m_{ij} s'appelle le *mineur* relatif à a_{ij}
2. On appelle *cofacteur* de Δ relatif à a_{ij}, le scalaire $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$

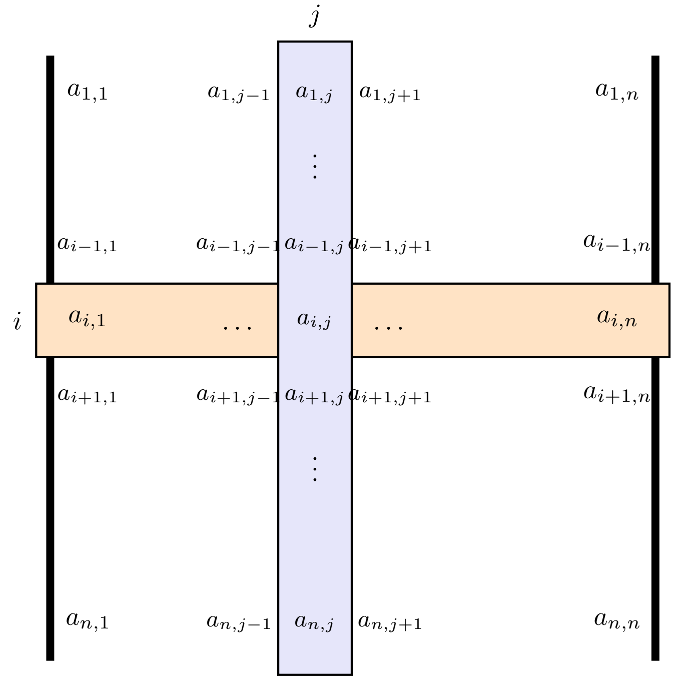


FIG. 19.5 – *mineur m_{ij} d'un déterminant*

THÉORÈME 19.16 : **Développement d'un déterminant par rapport à une ligne-colonne**
Soit un déterminant $n \times n$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1. Développement par rapport à la jième colonne :

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \Delta_{ij}$$

2. Développement par rapport à la ième ligne :

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta_{ij}$$

Pour calculer un déterminant $n \times n$, $(n \geq 3)$, on dispose de la stratégie générale suivante :

1. À une colonne (ligne), retrancher un multiple d'une autre colonne (opération élémentaire sur les colonnes codée $C_i \leftarrow C_i - \lambda C_j$ ou bien $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$). La valeur du déterminant est inchangée ;
2. Répéter l'étape 1 de telle façon à faire apparaître un maximum de zéros dans une ligne (ou une colonne) ;
3. Développer le déterminant par rapport à cette ligne (colonne) ;
4. Recommencer avec le déterminant $(n-1) \times (n-1)$ obtenu, jusqu'à aboutir à un déterminant 2×2 que l'on sait calculer.

Il existe plusieurs autres techniques de calcul d'un déterminant que l'on verra dans les exercices.

Exercice 19-10

Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice 19-11

Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

Exercice 19-12

Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & & \mathbf{0} & & \\ & -a_2 & a_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & \dots & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 19-13

Calculer le déterminant « tridiagonal » Δ_n en trouvant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & c & & & \mathbf{0} \\ b & a & c & & \\ & b & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c \\ \mathbf{0} & & & b & a \end{vmatrix}$$

Application : Calculer le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & \mathbf{0} \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Définition 19.17 : Comatrice

Soit une matrice carrée $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *comatrice* de la matrice A, la matrice dont les coefficients sont les cofacteurs de A :

$$\widetilde{A} = ((\Delta_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$$

Théorème 19.17 : Relation entre matrice et comatrice

1. Pour toute matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on a la relation

$$\boxed{A\,{}^t\widetilde{A} = \det(A) I_n}$$

2. Si la matrice A est inversible, alors

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t\widetilde{A}}$$

Remarque 221. Pour une matrice A d'ordre 2×2, la formule précédente donne l'inverse de A :

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Lorsque la taille de la matrice dépasse 3, cette formule n'a qu'un intérêt théorique. En effet, pour calculer l'inverse d'une matrice $n \times n$ à l'aide de cette formule, il faut calculer $n^2 + 1$ déterminants $n \times n$!

Exercice 19-14

Déterminer le déterminant de la comatrice $\widetilde{A}$ en fonction de $\det(A)$.

DÉFINITION 19.18 : **Déterminant de Vandermonde** [a]

Soient n scalaires $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{K}^n$. On appelle déterminant de Vandermonde, le déterminant $n \times n$:

$$V(a_1,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

[a] Alexandre Théophile Vandermonde (28/02/1735-01/01/1796), Français. Musicien de formation, il s'intéresse aux mathématiques à l'age de 35 ans. Ses travaux portent sur la théorie des déterminants

THÉORÈME 19.18 : **Calcul d'un déterminant de Vandermonde**

$$V(a_1,\dots,a_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

En particulier, la matrice de Vandermonde est inversible si et seulement si tous les scalaires $(a_1,\dots,a_n)$ sont distincts.

Exercice 19-15

On considère n réels distincts $(a_1,\dots,a_n)$ et n scalaires $(b_1,\dots,b_n)$. Écrire le polynôme d'interpolation de Lagrange L relativement à ces n points de coordonnées (a_i,b_i). Comment trouver les coefficients de ce polynôme L dans la base canonique?

Chapitre 20

Systèmes d'équations linéaires

20.1 Interprétations d'un système

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$.
On considère le système de n équations à p inconnues :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p & = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p & = b_n \end{cases}$$

- *Résoudre* le système consiste à trouver l'ensemble $\mathbb{S}$ de tous les p-uplets $(x_1, \dots ,x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant (S).
- Le vecteur $b = (b_1, \dots ,b_n) \in \mathbb{K}^n$ s'appelle le *vecteur second membre* du système.
- On appelle *système homogène* associé, le système obtenu lorsque $b = 0$. On note $\mathbb{S}_0$ l'ensemble des solutions du système homogène.
- La matrice A s'appelle *matrice* du système.
- $\mathrm{rg}(A)$ s'appelle le *rang* du système.
- On dit que le système est *compatible* si l'ensemble des solutions est non-vide.

20.1.1 Interprétation vectorielle

Soit $E = \mathbb{K}^n$, $C_1 = (a_{11}, \dots ,a_{n1})$, $\dots C_p = (a_{1p}, \dots ,a_{np}) \in \mathbb{K}^n$ les vecteurs colonnes de la matrice A et $b = (b_1, \dots ,b_n) \in \mathbb{K}^n$ le vecteur second membre.
Alors

$$\boxed{\big((x_1, \dots ,x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de (S) }\big) \iff (x_1C_1 + \dots + x_pC_p = b)}$$

Le système est compatible ssi $b \in \mathrm{Vect}(C_1, \dots ,C_p)$.
Le rang du système est le rang du système de vecteurs $(C_1, \dots ,C_p)$ dans $\mathbb{K}^n$.

20.1.2 Interprétation matricielle

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\big((x_1, \dots ,x_p) \text{ est solution de (S) }\big) \iff (AX = B)}$$

20.1.3 Interprétation linéaire

Soit $E = \mathbb{K}^p$ et $F = \mathbb{K}^n$, munis des bases canoniques $e = (e_1, \dots ,e_p)$ et $f = (f_1, \dots ,f_n)$. Soit $b = (b_1, \dots ,b_n) \in F$. Il existe une unique application linéaire $u \in L(E,F)$ telle que $Mat_{e,f}(u) = A$. Soit $x \in E$ l'unique vecteur tel que $Mat_e(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$. Alors

$$\boxed{((x_1,\dots,x_p) \text{ est solution de (S) }) \iff (u(x)=b)}$$

Le système est compatible ssi $b \in \operatorname{Im} u$.

20.1.4 Interprétation duale

Considérons les n formes linéaires de $\mathbb{K}^{p\star}$:

$$f_i : \begin{cases} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1,\dots,x_p) & \mapsto & a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p \end{cases}$$

Alors

$$\boxed{(x=(x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de (S) }) \iff (f_1(x)=b_1,\dots,f_n(x)=b_n)}$$

L'ensemble des solutions du système homogène est alors $\mathbb{S}_0 = \operatorname{Ker} f_1 \cap \dots \cap \operatorname{Ker} f_n$.

20.1.5 Structures de l'ensemble des solutions

Théorème 20.1 : **Structure de l'ensemble des solutions du système homogène**
$\mathbb{S}_0$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $\boxed{p - \operatorname{rg}(S)}$

Théorème 20.2 : **Structure de l'ensemble des solutions de** (S)

1. Si le système est incompatible, $\mathbb{S} = \emptyset$;
2. Si le système est compatible, alors il existe une solution particulière x_0. Dans ce cas,

$$\boxed{\mathbb{S} = \{x_0 + x ; x \in \mathbb{S}_0\}}$$

et $\mathbb{S}$ est un espace affine de dimension $p - \operatorname{rg}(S)$.

20.2 Systèmes de Cramer

Définition 20.1 : **Système de Cramer**
Un système de Cramer est un système de n équations à n inconnues de rang n.

Matriciellement, un système de Cramer s'écrit

$$AX = B$$

avec $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée inversible et $B \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Théorème 20.3 : **Résolution matricielle d'un système de Cramer**
Un système de Cramer possède une unique solution $\boxed{X = A^{-1}B}$.

Théorème 20.4 : **Formules de Cramer**
Soient $(C_1,\dots,C_n)$ les n vecteurs colonnes de la matrice A d'un système de Cramer, $b = (b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{K}^n$ le vecteur second membre et $(x_1,\dots,x_n)$ l'unique solution de (S). Alors, $\forall j \in [\![1,n]\!]$,

$$\boxed{x_j = \frac{\det(C_1,\dots,C_{j-1},B,C_{j+1},\dots,C_n)}{\det A}}$$

Exercice 20-1

Résoudre le système

$$\begin{cases} x + ay + a^2z &= \alpha \\ x + by + b^2z &= \beta \\ x + cy + c^2z &= \gamma \end{cases}$$

où a,b,c sont trois réels distincts.

Exercice 20-2

Déterminer le nombre de multiplications, divisions nécessaire pour résoudre un système de Cramer, en utilisant les formules de Cramer, sachant qu'il faut $n!$ opérations élémentaires pour calculer un déterminant $n \times n$.

Remarque 222. L'intérêt des formules de Cramer est donc purement théorique. Pour programmer la résolution d'un système d'équations linéaires, on a recours à des algorithmes plus efficaces (par exemple l'algorithme du pivot de Gauss pour un système quelconque).

20.3 Opérations élémentaires

DÉFINITION 20.2 : **Matrices élémentaires**
On définit les matrices suivantes :

1. Matrices de dilatation ($\lambda \neq 0$, $i \in [\![1,n]\!]$) :

$$D_\lambda(i) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$$

2. Matrices de permutation ($i \neq j$) :

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$$

3. Matrices de transvection ($\lambda \neq 0$, $i \neq j$):

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & \lambda & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = I_n + \lambda E_{ij}$$

Théorème 20.5 : **Propriétés des matrices élémentaires**

1. Les matrices élémentaires sont inversibles et on calcule facilement leur déterminant et leur inverse :
   (a) $\det(D_\lambda(i)) = \lambda$, $D_\lambda(i)^{-1} = D_{1/\lambda}(i)$
   (b) $\det(P_{ij}) = -1$, $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$
   (c) $\det(T_{ij}(\lambda)) = 1$, $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$.
2. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice quelconque : Multiplier à gauche la matrice A par une matrice élémentaire correspond à une opération élémentaire sur les lignes de la matrice A :
   (a) $D_\lambda(i) \times A$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$
   (b) $P_{ij} \times A$: $L_i \leftrightarrow L_j$
   (c) $T_{ij}(\lambda) \times A$: $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$
3. Multiplier à droite la matrice A par une matrice élémentaire correspond à une opération élémentaire sur les colonnes de la matrice A :
   (a) $A \times D_\lambda(i)$: $C_i \leftarrow \lambda C_i$
   (b) $A \times P_{ij}$: $C_i \leftrightarrow C_j$
   (c) $A \times T_{ij}(\lambda)$: $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$

Proposition 20.6 : **Algorithme du rang**
En effectuant un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice, on ne modifie pas son rang.

Remarque 223. On justifie ainsi l'algorithme du rang vu en td.

20.4 Méthode du pivot de Gauss

Théorème 20.7 : **Résolution d'un système triangulaire**
On considère une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) T inversible et le système $TX = B$. On dispose d'un algorithme qui résout ce système en $\mathcal{O}(n^2)$ multiplications scalaires.

Théorème 20.8 : **Transformation en système triangulaire**
Soit une matrice inversible $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et le système de Cramer associé $AX = B$. On peut transformer à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes ce système en un système équivalent triangulaire supérieur en $\mathcal{O}(n^3)$ multiplications scalaires.

Théorème 20.9 : **Algorithme du pivot de Gauss**
On sait résoudre un système de cramer $n \times n$ en $\mathcal{O}(n^3)$ multiplications scalaires.

Corollaire 20.10 : **Calcul d'un déterminant**
On sait calculer le déterminant d'une matrice $n \times n$ en $\mathcal{O}(n^3)$ multiplications scalaires.

Chapitre 21

Calcul de primitives

21.1 Calcul pratique de primitives

On note $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ une primitive de la fonction f sur l'intervalle I. Cette notation désigne une *fonction*, à ne pas confondre avec une intégrale définie $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ qui est un *réel*.

Théorème 21.1 : Changement de variables
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : J \mapsto I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de l'intervalle J vers l'intervalle I. Si F est une primitive de f sur I, alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi) \times \varphi'$ sur l'intervalle J.

En pratique pour calculer une primitive $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$, on pose $x = \varphi(t)$, $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, où φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de l'intervalle J vers l'intervalle I et l'on calcule une primitive $G(t) = F\big(\varphi(t)\big) = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sur l'intervalle J. Ensuite il suffit de remplacer t par $\varphi^{-1}(x)$: $F(x) = G\big(\varphi^{-1}(t)\big)$.

Exercice 21-1

Calculer les primitives suivantes :

1. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ sur $I =]0,\pi[$;
2. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh} x}$ sur $I =]0, +\infty[$;
3. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x}$ sur $I = \mathbb{R}$;
4. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2}$ sur $I = \mathbb{R}$ $(a > 0)$;
5. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ sur $I =]-a,a[$.

Théorème 21.2 : Intégration par parties

(H1) Soient $u,v : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I.

Alors
$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + C$$

Exercice 21-2

Calculer les primitives suivantes :

1. $\int x \ln(x^2 + 1)\,\mathrm{d}x$;
2. $\int (x^2 - x + 3)e^{2x}\,\mathrm{d}x$;
3. $\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x$;
4. $\int \arctan\Big(\dfrac{x-1}{x-2}\Big)\,\mathrm{d}x$.

21.1.1 Primitives usuelles à connaître par coeur

Les classiques

$$\int (x-a)^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1), \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} = \ln|x-a|$$

$$\int e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$\int \sin(ax)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos x}{a} \qquad \int \cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin x}{a} \qquad \int \mathrm{sh}(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{ch}\,x}{a} \qquad \int \mathrm{ch}(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{sh}\,x}{a} \quad (a \neq 0)$$

Celles à connaître absolument

Soit un réel $a > 0$. On obtient les primitives suivantes en factorisant a^2 et en faisant le changement de variables $u = x/a$.

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}}$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|}$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}}$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \mathrm{argsh}\,\frac{x}{a}}$$

où argsh est la bijection réciproque de la fonction sh définie sur $\mathbb{R}$, et sa forme logarithmique (bonne à connaître par coeur) s'écrit :

$$\boxed{\mathrm{argsh}(x) = \ln\big(x + \sqrt{x^2+1}\big)}$$

$$\begin{array}{l||l}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x & \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2\,x} = \mathrm{th}\,x \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\,\mathrm{cotan}\,x & \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2\,x} = -\coth x \\
\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| & \int \mathrm{th}\,x\,\mathrm{d}x = \ln|\mathrm{ch}\,x|
\end{array}$$

Primitives obtenues par changement de variables $t = \tan\frac{x}{2}$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| \quad \Bigg\| \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}\,x} = \ln\left|\mathrm{th}\,\frac{x}{2}\right|$$

Elle s'obtiennent grâce au changement de variables :

$$\boxed{\begin{array}{lcl||lcl}
t & = & \tan\frac{x}{2} & t & = & \mathrm{th}\,\frac{x}{2} \\
\mathrm{d}t & = & \frac{1}{2}(1+t^2)\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}t & = & \frac{1}{2}(1-t^2)\,\mathrm{d}x \\
\sin x & = & \frac{2t}{1+t^2} & \mathrm{sh}\,x & = & \frac{2t}{1-t^2} \\
\cos x & = & \frac{1-t^2}{1+t^2} & \mathrm{ch}\,x & = & \frac{1+t^2}{1-t^2} \\
\tan x & = & \frac{2t}{1-t^2} & \mathrm{th}\,x & = & \frac{2t}{1+t^2}
\end{array}}$$

On obtient la primitive suivante en remplaçant x par $x + \frac{\pi}{2}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

$$\int \frac{1}{\mathrm{ch}\,x} = 2\arctan e^x$$

21.2 Fractions rationnelles

DÉFINITION 21.1 : **Fractions rationnelles**
Une fraction rationnelle est un « quotient » de deux polynômes $P,Q \in \mathbb{K}[X]$. On la note $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$. On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles. On peut définir la somme et le produit de deux fractions rationnelles par les formules suivantes :

$$F_1(X) = \frac{P_1(X)}{Q_1(X)}, \quad F_2(X) = \frac{P_2(X)}{Q_2(X)}$$

$$F_1 + F_2 = \frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2} \quad F_1F_2 = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2}$$

Muni de ces lois, $\big(\mathbb{K}(X), +, \times\big)$ est un corps commutatif.

Remarque 224. Si $\delta = P \wedge Q$, alors $P = P_1\delta$ et $Q = Q_1\delta$ avec $P_1 \wedge Q_1 = 1$ et alors $\frac{P}{Q} = \frac{P_1\delta}{Q_1\delta} = \frac{P_1}{Q_1}$. On peut également diviser au numérateur et au dénominateur par le coefficient dominant du polynôme Q_1. Dans la suite, on considérera donc uniquement des fractions rationnelles de la forme $F = \frac{P}{Q}$ avec $P \wedge Q = 1$ et Q un polynôme unitaire.

DÉFINITION 21.2 : **Degré d'une fraction rationnelle**
Soit une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On appelle degré de F :

$$\deg F = \deg P - \deg Q \in \mathbb{Z}$$

On a les mêmes propriétés que pour le degré des polynômes :

$$\deg(F_1 + F_2) \leq \max(\deg F_1, \deg F_2), \quad \deg(F_1F_2) = \deg F_1 + \deg F_2$$

Lorsque $F \neq 0$, le degré de F est un entier relatif. Lorsque $F = 0$, $\deg F = -\infty$.

DÉFINITION 21.3 : **Zéros, pôles d'une fraction rationnelle, fonctions rationnelles**
Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. Les racines de P s'appellent les *zéros* de F et les racines de Q les *pôles* de F. Si $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des pôles de F, on peut définir la *fonction rationnelle* associée à F :

$$\widetilde{F} : \begin{cases} \mathbb{K} \setminus \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \dfrac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)} \end{cases}$$

Remarque 225. Un pôle $a \in \mathbb{K}$ de la fraction $F = \frac{P}{Q}$, est dit de multiplicité $k \in \mathbb{N}$, lorsque le scalaire a est un zéro de multiplicité k du polynôme Q.

DÉFINITION 21.4 : **Dérivée d'une fraction rationnelle**
Soit une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On définit *formellement* la dérivée de cette fraction rationnelle par la formule

$$F' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$$

Remarque 226. On associe la *fonction rationnelle* dérivée associée $\widetilde{F'} : \mathbb{K} \setminus \mathcal{P} \mapsto \mathbb{K}$. Cette fonction dérivée coïncide avec la dérivée usuelle de la fonction $\widetilde{F}$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

21.2.1 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

PROPOSITION 21.3 : **Partie entière d'une fraction rationnelle**
Soit une fraction rationnelle $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple $(E,\widehat{F}) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que

$$\begin{cases} F = E + \widehat{F} \\ \deg \widehat{F} < 0 \end{cases}$$

Le polynôme E est appelé la *partie entière* de la fraction F.

Remarque 227. Pour trouver la partie entière de F, on effectue la division euclidienne du polynôme A par le polynôme B : $A = BE + R$ avec $\deg R < \deg B$ et alors $F = E + \dfrac{R}{B}$.

PROPOSITION 21.4 : **Partie polaire d'une fraction rationnelle**
Soit une fraction rationnelle $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ et un pôle $a \in \mathbb{K}$ de multiplicité k :

$$B = (X-a)^k \widehat{B} \text{ avec } \widehat{B}(a) \neq 0$$

Il existe un unique couple $(A_1,A_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ de polynômes tels que

$$F = \frac{A_1}{\widehat{B}} + \frac{A_2}{(X-a)^k} \text{ et } \deg(A_2) < k$$

La fraction rationnelle $\dfrac{A_2}{(X-a)^k}$ est appelée *partie polaire* de la fraction F relative au pôle a.

PROPOSITION 21.5 : **Coefficient associé à un pôle simple**
Si une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q}$ est de degré < 0 avec $Q(X) = (X-a)V(X)$, où $V(a) \neq 0$, la partie polaire de la fraction F relativement au pôle simple a est de la forme $\frac{\lambda}{X-a}$:

$$F = \frac{\lambda}{X-a} + \frac{U}{V} \tag{21.1}$$

Pour trouver le scalaire λ, on peut :
- Multiplier (21.1) par $(X-a)$, puis faire $x = a$ dans la fonction rationnelle associée. On trouve que : $\boxed{\lambda = \dfrac{P(a)}{V(a)}}$.
- Utiliser la formule de Taylor pour Q, et obtenir $\boxed{\lambda = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}}$. Cette formule est très utile lorsqu'il est difficile de trouver le quotient V du polynôme Q par $(X-a)$.

21.2.2 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

THÉORÈME 21.6 : **Décomposition dans** $\mathbb{C}(X)$
Soit une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$, avec la décomposition du polynôme Q en éléments irréductibles qui s'écrit :

$$Q = (X-a_1)^{\alpha_1} \dots (X-a_n)^{\alpha_n}$$

Alors la fraction F s'écrit de façon *unique* sous la forme

$$\begin{aligned} F = E + &\left(\frac{\lambda_{11}}{X-a_1} + \frac{\lambda_{12}}{(X-a_1)^2} + \dots + \frac{\lambda_{1\alpha_1}}{(X-a_1)^{\alpha_1}}\right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{\lambda_{n1}}{X-a_n} + \frac{\lambda_{n2}}{(X-a_n)^2} + \dots + \frac{\lambda_{n\alpha_n}}{(X-a_n)^{\alpha_n}}\right) \end{aligned}$$

où la partie entière $E \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme nul, ou de degré $\deg(P) - \deg(Q)$ et où les coefficient $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$ sont complexes.

Exercice 21-3

Décomposer les fractions rationnelles $F(X) = \dfrac{X-4}{(X-1)(X+1)X}$ et $G(X) = \dfrac{1}{X^n - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$.

Recherche des coefficients associés aux pôles multiples

On suppose que $F(X) = \dfrac{P}{Q}$ avec $\deg F < 0$ et $Q(X) = (X-a)^n V(X)$ avec $(V(a) \neq 0)$. La décomposition de F s'écrit alors

$$F = \frac{\lambda_1}{(X-a)} + \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \dots + \frac{\lambda_n}{(X-a)^n} + \frac{U(X)}{V(X)} \tag{21.2}$$

- En multipliant (21.2) par $(X-a)^n$ et en faisant $x = a$, on trouve λ_n ;
- Si n est petit, $(n \leq 2)$, on retranche $\dfrac{\lambda_n}{(X-a)^n}$ à F, et on recommence pour trouver λ_{n-1} etc ;
- Si $n \geq 3$, on fait le changement de variables $Y = X - a$, $F(Y) = \dfrac{P_1(Y)}{Y^n V_1(Y)}$, et on effectue une division selon les puissances croissantes (ou un $DL(0,n-1)$) à l'ordre $n-1$:

  $$P_1 = V_1(a_0 + a_1 Y + \dots + a_{n-1}Y^{n-1}) + R \ \text{ avec } \operatorname{val}(R) \geq n$$

  On a alors :

  $$F(Y) = \frac{a_0}{Y^n} + \frac{a_1}{Y^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{Y} + \dots$$

  et on trouve les coefficients $\lambda_1 = a_{n-1}$, $\lambda_2 = a_{n-2}, \dots$.

Exercice 21-4

Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $G(X) = \dfrac{X+1}{(X-1)^4 X}$.

Remarque 228. Trois astuces à retenir pour obtenir des relations entre coefficients :
- multiplier par x^p et faire $x \to +\infty$ (ou prendre la partie entière des fractions résultantes) ;
- Utiliser la parité éventuelle de la fraction ;
- Donner une valeur particulière à x $(x = 0)$.

Exercice 21-5

Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $G(X) = \dfrac{X}{(X^2-1)^2}$.

21.2.3 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

THÉORÈME 21.7 : **Décomposition dans** $\mathbb{R}(X)$

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$, où la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ du dénominateur s'écrit :

$$Q = (X-a_1)^{\alpha_1} \dots (X-a_n)^{\alpha_n} (X^2 + b_1 X + c_1)^{\beta_1} \dots (X^2 + b_p X + c_p)^{\alpha_p}$$

Alors la fraction F s'écrit de façon unique :

$$\begin{aligned} F = E + \Bigg[& \left(\frac{\lambda_{11}}{X-a_1} + \frac{\lambda_{12}}{(X-a_1)^2} + \dots + \frac{\lambda_{1\alpha_1}}{(X-a_1)^{\alpha_1}} \right) + \dots + \\ & + \left(\frac{\lambda_{n1}}{X-a_n} + \frac{\lambda_{n2}}{(X-a_n)^2} + \dots + \frac{\lambda_{n\alpha_n}}{(X-a_n)^{\alpha_n}} \right) \Bigg] + \\ + \Bigg[& \left(\frac{\mu_{11}X + \delta_{11}}{X^2 + b_1 X + c_1} + \frac{\mu_{12}X + \delta_{12}}{(X^2 + b_1 X + c_1)^2} + \dots + \frac{\mu_{1\beta_1}X + \delta_{1\beta_1}}{(X^2 + b_1 X + c_1)^{\beta_1}} \right) + \dots + \\ & + \left(\frac{\mu_{p1}X + \delta_{p1}}{X^2 + b_p X + c_p} + \frac{\mu_{p2}X + \delta_{p2}}{(X^2 + b_p X + c_p)^2} + \dots + \frac{\mu_{p\beta_p}X + \delta_{p\beta_p}}{(X^2 + b_p X + c_p)^{\beta_p}} \right) \Bigg] \end{aligned}$$

où la partie entière $E \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme nul ou de degré $\deg P - \deg Q$, et tous les λ_{ij}, μ_{ij}, δ_{ij} sont des réels.
Le premier groupe est formé *d'éléments simples de première espèce* et le second groupe d'*éléments simples de seconde espèce.*

- La recherche de la partie entière et des coefficients des éléments simples de première espèce se fait comme précédemment ;
- On peut utiliser une décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ et regrouper les éléments simples correspondant aux pôles conjugués pour obtenir les éléments simples de seconde espèce ;

- Si $X^2+pX+q=(X-a)(X-\overline{a})$, on peut multiplier la décomposition par $(X^2+pX+q)^k$ et faire $x=a$, puis $x=\overline{a}$;
- Utiliser les remarques précédentes pour trouver des relations entre coefficients.

Exercice 21-6

Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles $F(X)=\dfrac{1}{X^{2n}-1}$, $G(X)=\dfrac{1}{(X^2+X+1)^2}$ et $H(X)=\dfrac{X}{(X^2+1)^2(X-1)^2}$.

Exercice 21-7

Utiliser la décomposition de la fraction $F(X)=\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$ pour trouver la limite de la suite de terme général

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Exercice 21-8

Soit f la fonction arctan. Décomposer $f'(x)$ dans $\mathbb{C}(X)$, puis utiliser cette décomposition pour calculer explicitement $f^{(n)}(x)$. En déduire les zéros de $f^{(n)}$.

Exercice 21-9

Soit un polynôme P de degré n à coefficients réels n'admettant que des racines simples.

a. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F=\dfrac{P'}{P}$.

b. En déduire que $\forall x\in\mathbb{R}$, $P''(x)P(x)\leq P'(x)^2$.

21.2.4 Primitives de fractions rationnelles.

Pour calculer une primitive d'une fraction rationnelle, on la décompose en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$. La partie entière et les éléments simples de première espèce se primitivent immédiatement. Pour primitiver un élément simple de deuxième espèce: $\int\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x$,

- Faire apparaître en haut la dérivée de x^2+px+q, et la partie en x se primitive en ln ou en une fraction ;
- On se ramène à primitiver $\int\dfrac{1}{(x^2+px+q)^n}$. Pour cela, on réduit le trinôme sous forme canonique et on effectue les changements de variables appropriés ;
- Pour calculer $I_n=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$, on intègre $\boxed{I_{n-1}}$ par parties. On obtient une relation entre I_n et I_{n-1}.

  Par exemple, pour calculer $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$, on intègre par parties $\arctan x=\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$.

Exercice 21-10

Calculer $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$

Exercice 21-11

Calculer $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^3(x^2+1)}$

Exercice 21-12

Calculer $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$

Exercice 21-13

Calculer $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x^6-1)}$

21.2.5 Primitives rationnelles en $\sin$, $\cos$

On s'intéresse aux primitives de la forme $\boxed{\int F(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x}$ où F est une fraction rationnelle dans les deux arguments.

1. $\int P(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$, où P est un polynôme dans les deux variables.
   On se ramène au calcul de $\int \sin^p x \cos^q x\,\mathrm{d}x$.
   - Si p est impair : $\int \sin^{2k} x \cos^q x \sin x\,\mathrm{d}x$, faire le changement de variables $y = \cos x$;
   - Si q est impair : faire le changement de variables $y = \sin x$;
   - Si p et q sont pairs, on linéarise (cf règles de Bioche).

   Exercice 21-14
   Calculer $\int \sin^2 x \cos^3 x\,\mathrm{d}x$.

2. Règles de Bioche pour calculer $\int F(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$:

   On étudie l'élément différentiel $\omega(x) = F(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$.
   - Si $\omega(x)$ est invariant par la transformation $x \mapsto -x$, on pose $t = \cos x$;
   - Si $\omega(x)$ est invariant par la transformation $x \mapsto \pi - x$, on pose $t = \sin x$;
   - Si $\omega(x)$ est invariant par la transformation $x \mapsto \pi + x$, on pose $t = \tan x$;
   - Si aucune transformation de marche, on pose $t = \tan \frac{x}{2}$.

Exercice 21-15
Calculer $\int \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$, $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}$, $\int \dfrac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}\,\mathrm{d}x$, $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$.

21.2.6 Primitives rationnelles en sh, ch

On veut calculer des primitives de la forme $\boxed{\int F(\mathrm{sh}\, x, \mathrm{ch}\, x)\,\mathrm{d}x}$ où F est une fraction rationnelle dans les deux variables. On a l'analogie des règles de Bioche :
On étudie l'élément différentiel $\omega(x) = F(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ (en remplaçant les fonctions hyperboliques par les fonctions trigonométriques associées).

- Si $\omega(x)$ est invariant par la transformation $x \mapsto -x$, on pose $t = \mathrm{ch}\, x$:
- Si $\omega(x)$ est invariant par la transformation $x \mapsto \pi - x$, on pose $t = \mathrm{sh}\, x$;
- Si $\omega(x)$ est invariant par la transformation $x \mapsto \pi + x$, on pose $t = \mathrm{th}\, x$;
- Si aucune transformation ne marche, on pose $t = \mathrm{th}\, \frac{x}{2}$ ou alors $t = e^x$.

Exercice 21-16
Calculer $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x\, \mathrm{sh}^2 x}$, $\int \dfrac{\mathrm{sh}^3 x}{\mathrm{ch}\, x(2+\mathrm{sh}^2 x)}\,\mathrm{d}x$, $\int \mathrm{th}^3 x\,\mathrm{d}x$, $\int_0^{\ln 2} \dfrac{\mathrm{d}x}{5\,\mathrm{sh}\, x - 4\,\mathrm{ch}\, x}$

21.2.7 Primitives avec des racines.

Il y en a de deux sortes qu'on sait traiter ($F(\lambda,\mu)$ est une fraction rationnelle dans les deux arguments).

- $\boxed{\int F\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)}$ Poser $y = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.
- $\boxed{\int F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})}$: réduire le trinôme et poser y un sin, un ch ou un sh pour faire disparaître la racine.

Exercice 21-17
Calculer $\int \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\,\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

Exercice 21-18

Calculer $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

Exercice 21-19

Calculer $\int \frac{2+x}{1+x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 21-20

Calculer $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 21-21

Calculer $\int \sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x$

Remarque 229. Une astuce qui simplifie considérablement les calculs : pour calculer une primitive de

$$\int \sqrt{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$$

commencer par réduire le trinôme pour se ramener à calculer

$$F = \int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$$

L'idée consiste à faire passer la racine au dénominateur en intégrant par parties, car la primitive suivante est connue :

$$G = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{argsh}(x/a)$$

Exercice 21-22

Calculer $\int \sqrt{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$.

Chapitre 22

Produit scalaire

22.1 Définitions et règles de calcul

DÉFINITION 22.1 : **produit scalaire**
Soit E un $\mathbb{R}$-ev. On appelle *produit scalaire* sur E, une application

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x \mid y) \end{array} \right.$$

vérifiant :
1. ϕ est une *forme bilinéaire* : $\forall (x,y,z) \in E^3, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\phi(\lambda x + \mu y,z) = \lambda\phi(x,z) + \mu\phi(y,z)$$
$$\phi(x,\lambda y + \mu z) = \lambda\phi(x,y) + \mu\phi(y,z)$$

2. ϕ est *symétrique* :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \phi(x,y) = \phi(y,x)$$

3. ϕ est *définie* :

$$\forall x \in E, \quad (\phi(x,x) = 0) \Longleftrightarrow (x = 0)$$

4. ϕ est *positive* :

$$\forall x \in E, \quad \phi(x,x) \geq 0$$

On dit alors que E muni d'un produit scalaire est un *espace préhilbertien réel*. Si E est de dimension finie, on dit que E est un *espace euclidien*.
On note $(x \mid y) = \phi(x,y)$ le produit scalaire. En géométrie, on utilise également la notation $\overrightarrow{x}.\overrightarrow{y}$.
On définit la *norme* associée à un produit scalaire : Si $x \in E$,

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}}$$

– Produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$: Si $X = (x_1,\dots,x_n), Y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$(X \mid Y) = x_1y_1 + \dots x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

– Sur l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$, $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $f,g \in E$

$$(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}$$

– Sur l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues et 2π-périodiques, $E = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$, $f,g \in E$

$$(f \mid g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

$$\|f\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2(t)dt}$$

Théorème 22.1 : **Règles de calcul**
Pour deux vecteurs $(x,y) \in E^2$, et un réel $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $\|\lambda.x\| = |\lambda|\|x\|$;
- $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2$;
- $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x \mid y) + \|y\|^2$;
- $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (égalité du parallélogramme) ;
- $(x \mid y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ (identité de polarisation).

Pour des vecteurs $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n \in E$ et des scalaires $\lambda_1,\dots,\lambda_n,\mu_1,\dots,\mu_n \in \mathbb{R}$,

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \sum_{j=1}^n \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j (x_i \mid y_j)$$

$$\left\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \lambda_i \lambda_j (x_i \mid x_j)$$

Théorème 22.2 : **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
Soient x,y deux vecteurs,

$$\boxed{|(x \mid y)| \le \|x\|\|y\|}$$

Avec égalité ssi les deux vecteurs sont proportionnels : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $y = \lambda x$ (ou $x = \lambda y$).

Théorème 22.3 : **Inégalité de Minkowski**
Soient x,y deux vecteurs.

$$\boxed{\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \le \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|}$$

avec égalité dans la majoration de droite si et seulement si les deux vecteurs se trouvent sur une même demi-droite issue de l'origine : $\exists \lambda \ge 0$ tq $y = \lambda x$

22.2 Orthogonalité

On considère un espace préhilbertien réel $(E, (. \mid .))$.

Définition 22.2 : **Vecteurs orthogonaux**
Deux vecteurs x et y sont dits *orthogonaux* lorsque $(x \mid y) = 0$.

Théorème 22.4 : **Identité de Pythagore**
Soient deux vecteurs de E. Alors

$$(x \mid y) = 0 \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Théorème 22.5 : **Des vecteurs orthogonaux 2 à 2 forment un système libre**
Soit $S = (x_1,\dots,x_n)$ un système de vecteurs non-nuls deux à deux orthogonaux :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \ne j \Rightarrow (x_i \mid x_j) = 0$$

Alors le système S est libre.

Définition 22.3 : **Sous-espaces orthogonaux**
Soient F et G deux sev de E. On dit qu'ils sont orthogonaux ssi

$$\forall x \in F, \forall y \in G, \quad (x \mid y) = 0$$

Définition 22.4 : orthogonal d'une partie
Soit $A \subset E$ une partie de E. On définit l'orthogonal de A par :

$$A^{\perp} = \{x \in E \text{ tq } \forall a \in A, (x \mid a) = 0\}$$

Théorème 22.6 : Propriétés de l'orthogonal
Soient $A,B \subset E$ deux parties de E.
a) $A^{\perp}$ est un sev de E.
b) $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$
c) $A^{\perp} = [\mathrm{Vect}(A)]^{\perp}$
d) $A \subset [A^{\perp}]^{\perp}$

22.3 Espaces euclidiens

Définition 22.5 : Espaces euclidiens
Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire

On considère désormais des espaces de dimension finie.

Définition 22.6 : bases orthogonales, orthonormales
Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On dit que e est une base
1. *orthogonale* si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow (e_i \mid e_j) = 0$;
2. *orthonormale* si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(e_i \mid e_j) = \delta_{ij}$.

Remarque 230. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale pour le produit scalaire usuel.

Théorème 22.7 : Calculs dans une bon
Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une bon de E.
1. Les coordonnées d'un vecteur dans une bon sont des produits scalaires :

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)\, e_i$$

2. Si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ et $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$, alors

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

3. Si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

Théorème 22.8 : Théorème de Schmidt [a]
Soit (E,n) euclidien et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base quelconque de E. Alors il existe une base *orthonormale* $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ de E vérifiant :
1. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\epsilon_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$;
2. $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(e_i \mid \epsilon_i) > 0$.

[a] Erhard Schmidt, (13/01/1876-06/12/1959), Allemand. Un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle

Remarque 231. L'algorithme de construction de la bon est aussi important que l'énoncé du théorème.
Remarque 232. La matrice de passage de e vers ϵ est triangulaire supérieure.

Exercice 22-1
Soit l'espace $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soient les vecteurs $e_1 = (2,0,0)$, $e_2 = (1,1,1)$ et $e_3 = (0,1,2)$. Construire une bon à partir de $e = (e_1,e_2,e_3)$.

Exercice 22-2
Soit l'espace $E = \mathbb{R}_1[X]$ muni du produit scalaire

$$(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

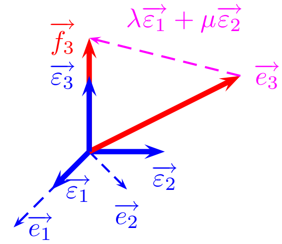


FIG. 22.1 – *Algorithme de Schmidt : redressement de* e_3

a) Montrer que $(. \mid .)$ définit un produit scalaire sur E

b) Trouver une bon ε de E

c) Trouver les coordonnées du vecteur $P = X + 1$ dans ε.

COROLLAIRE 22.9 : **Existence d'une bon**
Tout espace euclidien $E \neq \{0_E\}$ possède une bon.

THÉORÈME 22.10 : **Propriétés de l'orthogonal en dimension finie**
Soit F un sev de E de dimension p. Alors

1. $\dim F^{\perp} = n - p$
2. $E = F \oplus F^{\perp}$
3. $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$

THÉORÈME 22.11 : **Théorème de Riesz**
Soit $f \in E^{\star}$ une forme linéaire. Alors il existe un unique vecteur $z_f \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \quad f(x) = (z_f \mid x)$$

Remarque 233. Dans $\mathbb{R}^n$ euclidien usuel, si l'on considère un hyperplan (H) d'équation :

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

C'est l'hyperplan orthogonal au vecteur $n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$: $H = \{n\}^{\perp}$.

22.4 Matrice de produit scalaire

DÉFINITION 22.7 : **Matrice d'un produit scalaire**
Soit $(. \mid .)$ un produit scalaire, et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On appelle *matrice du produit scalaire dans la base* e, la matrice

$$Mat_e((. \mid .)) = (((e_i \mid e_j)))_{1 \leq i \leq n 1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} \|e_1\|^2 & \dots & (e_1 \mid e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (e_n \mid e_1) & \dots & \|e_n\|^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 22-3

Dans l'espace $E = \mathbb{R}_1[X]$, muni du produit scalaire $(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$, déterminer la matrice du produit scalaire dans la base canonique.

Remarque 234. La matrice d'un produit scalaire dans une base quelconque est toujours symétrique. Si e est une base orthogonale, la matrice est diagonale. Si e est une base orthonormale, alors la matrice est I_n.

THÉORÈME 22.12 : **Expression matricielle du produit scalaire**
Soit e une base de E, et $x,y \in E$. Notons $A = Mat_e((. \mid .))$ et $X = Mat_e(x), Y = Mat_e(y)$. Alors

$$\boxed{(x \mid y) = {}^tXAY}$$

THÉORÈME 22.13 : **Propriétés d'une matrice de produit scalaire**
Soit A la matrice d'un produit scalaire dans une base quelconque. Elle vérifie :

1. A est une matrice symétrique : ${}^tA = A$;
2. A est une matrice *positive* : $\forall X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geq 0$;
3. A est une matrice *définie* : $\forall X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = 0 \Longleftrightarrow X = 0$;
4. A est une matrice inversible : $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Remarque 235. La matrice d'un produit scalaire dans une base quelconque est toujours inversible. En effet, si $AX = 0$, alors à fortiori ${}^tXAX = 0$, c'est à dire $\|x\|^2 = 0$, et donc $X = 0$.

LEMME 22.14 : **Un lemme utile de calcul matriciel**
Soient $A,B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices vérifiant

$$\forall X,Y \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAY = {}^tXBY$$

Alors $A = B$.

THÉORÈME 22.15 : **Formule de changement de base**
Soient e et f deux bases de E. Notons $P = P_{e\to f}$ la matrice de passage. Alors

$$\boxed{Mat_f((.\mid .)) = {}^tPMat_e((.\mid .))P}$$

Si $A = \mathrm{Mat}_e((|))$, $B = \mathrm{Mat}_e((|))$, $P = P_{e\mapsto f}$, alors $\boxed{B = {}^tPAP}$.

Remarque 236. Ne pas confondre avec le changement de bases pour les matrices d'endomorphismes : $Mat_e(u) = PMat_f(u)P^{-1}$.

Exercice 22-4
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive :

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \geq 0 \text{ et } {}^tXAX = 0 \Rightarrow X = 0$$

Montrer qu'il existe une matrice triangulaire P inversible à éléments diagonaux strictement positifs telle que $A = {}^tPP$.

22.5 Endomorphismes orthogonaux, matrices orthogonales

On considère un espace euclidien $(E, (.\mid .))$ de dimension n.

DÉFINITION 22.8 : **Endomorphismes orthogonaux**
Soit $u \in L(E)$. On dit que u est un endomorphisme orthogonal (ou isométrie) si

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|$$

On note $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

THÉORÈME 22.16 : **Un endomorphisme orthogonal conserve les produits scalaires**
Si $u \in \mathrm{O}(E)$, alors

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$$

Remarque 237. C'est une application typique de l'identité de polarisation.

THÉORÈME 22.17 : **Groupe orthogonal**
$(\mathrm{O}(E),\circ)$ est un sous-groupe du groupe linéaire $(\mathcal{GL}(E),\circ)$. On l'appelle le *groupe orthogonal* de E.

DÉFINITION 22.9 : **Matrices orthogonales**
On dit qu'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si et seulement si :

$${}^tAA = I_n$$

On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

Remarque 238. Une matrice orthogonale est inversible et

$$A^{-1} = {}^tA$$

Ce qui montre qu'elle vérifie également

$$A\,{}^tA = I_n$$

Théorème 22.18 : **Caractérisation pratique des matrices orthogonales**
Soit $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est une matrice orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes $(C_1,\dots,C_n)$ forment une base orthonormale pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire :

$$\forall (p,q) \in [\![1,n]\!]^2, \quad p \neq q \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ip}a_{iq} = 0$$

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$$

Exercice 22-5
Montrer que

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale et calculer A^{-1}.

Théorème 22.19 : **La matrice d'une isométrie dans une bon est orthogonale**
On considère une *base orthonormale* ε d'un espace euclidien E, et un endomorphisme $u \in L(E)$. Notons $A = \mathrm{Mat}_\varepsilon(u)$. Alors

$$\underbrace{\big(u \text{ est une isométrie vectorielle }\big)}_{(i)} \iff \underbrace{\big(A \text{ est une matrice orthogonale }\big)}_{(ii)}$$

Remarque 239. Le résultat précédent est faux si la base ε n'est pas orthonormale. Si e est une base quelconque, en notant $T = \mathrm{Mat}_e((|))$ la matrice du produit scalaire dans cette base, et $A = \mathrm{Mat}_e(u)$ la matrice de l'endomorphisme u dans cette base, u est un endomorphisme orthogonal si et seulement si :

$${}^tATA = T$$

Lorsque la base est orthonormale, $T = I_n$ et la relation devient ${}^tAA = I_n$.

Théorème 22.20 : **Caractérisation des matrices de passage entre bon**
Soit e une base orthonormale de E et f une base. Soit $P = P_{e\to f}$ la matrice de passage entre ces deux bases. Alors

$$\underbrace{\big(f \text{ est une base orthonormale}\big)}_{(i)} \iff \underbrace{\big(P \text{ est une matrice orthogonale }\big)}_{(ii)}$$

Exercice 22-6
Soit $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$$

22.6 Projecteurs et symétries orthogonaux

Définition 22.10 : **Projecteur orthogonal**
Soit $p \in L(E)$ un projecteur ($p \circ p = p$). On dit que p est un projecteur orthogonal ssi $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$ sont deux sous-espaces orthogonaux de E :

$$\forall x \in \mathrm{Ker}\, p, \forall y \in \mathrm{Im}\, p, \quad (x \mid y) = 0$$

THÉORÈME 22.21 : **Caractérisation des projecteurs orthogonaux**
Soit p un projecteur. Alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme *symétrique*, c'est à dire :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad (p(x) \mid y) = (x \mid p(y))$$

THÉORÈME 22.22 : **Matrice d'un endomorphisme symétrique dans une bon**
Soit un endomorphisme u d'un espace euclidien. Alors, si $P = \mathrm{Mat}_\varepsilon(u)$ est la matrice de u dans une bon ε,

$$(u \text{ est symétrique }) \iff ({}^tP = P)$$

Remarque 240. Soit E un espace euclidien et e une *bon* de E. Soit $p \in L(E)$ et $P = mat_e(p)$. Alors p est un projecteur orthogonal si et seulement si :

1. $P^2 = P$
2. ${}^tP = P$.

THÉORÈME 22.23 : **Caractérisation de $p(x)$: conditions d'orthogonalité**
Soit p un projecteur orthogonal sur $F = \mathrm{Im}\, p$. Soit $x \in E$. Alors $p(x)$ est l'unique vecteur de F vérifiant $\boxed{x - p(x) \in F^\perp}$.

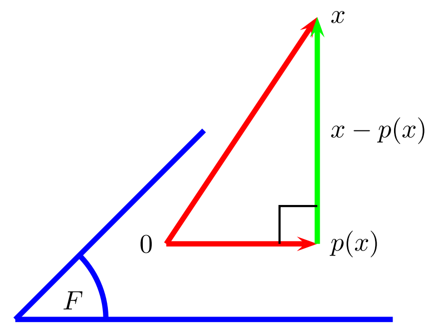


FIG. 22.2 – *Projecteur orthogonal*

THÉORÈME 22.24 : **Calcul du projeté orthogonal**
Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $x \in E$. Si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ est une base orthonormale de F, alors le projeté orthogonal $p(x)$ du vecteur x sur le sous-espace F vaut :

$$\boxed{p(x) = \sum_{i=1}^{p} (x \mid \varepsilon_i) .\varepsilon_i}$$

Remarque 241. On peut également utiliser une base de F qui n'est pas orthonormale :

1. On détermine une base quelconque de F, $(f_1, \dots, f_p)$;
2. On décompose $p(x)$ sur cette base : $p(x) = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p$;
3. On écrit les p conditions d'orthogonalité : $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $(x - p(x) \mid f_i) = 0$;
4. On résout alors le système de p équations $\sum_{j=1}^{p} \lambda_j (f_j \mid f_i) = (x \mid f_i)$, $i \in [\![1,p]\!]$;
5. Si la base $(f_1, \dots, f_p)$ est orthonormale, alors la matrice du système est I_p et le système est déjà résolu.

Remarque 242. Pour déterminer le projeté orthogonal sur un hyperplan H, il y a une méthode plus simple :

1. Déterminer un vecteur n orthogonal à l'hyperplan :
$$E = H \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Vect}(n)$$
2. Décomposer $x = x_H + \lambda.n$. Alors $p(x) = x_H$;
3. Il suffit de connaître *le* scalaire λ. Pour cela, écrire que $(x - \lambda.n \mid n) = 0$ ce qui donne $\lambda = \dfrac{(x \mid n)}{\|n\|^2}$;
4. On obtient finalement
$$p(x) = x - \frac{(x \mid n)}{\|n\|^2}.n$$

Théorème 22.25 : Le projeté $p(x)$ réalise la meilleure approximation de x par des vecteurs de F
Pour $x \in E$, et F un sev de E, on définit

$$d(x,F) = \inf_{f \in F} \|x - f\|$$

Alors :
1. $d(x,F)$ est bien défini ;
2. $d(x,F) = \|x - p(x)\|$ où $p(x)$ est la projection orthogonale de x sur F ;
3. Si $f \in F$, $\|x - f\| \geq \|x - p(x)\|$ avec égalité si et seulement si $f = p(x)$.

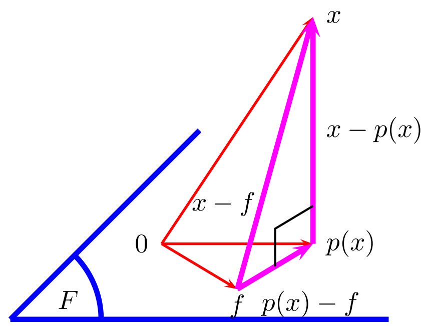


Fig. 22.3 – *Meilleure approximation*

Remarque 243. C'est une conséquence du théorème de Pythagore (voir le triangle rectangle de la figure 22.3) :

$$\forall f \in F,\ \|x - f\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - f\|^2$$

Exercice 22-7
Dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on considère le vecteur $n = (1,1,1)$ et le sous-espace $F = \{n\}^\perp$. Ecrire la matrice du projecteur orthogonal sur F dans la base canonique. Si $x = (3,2,1)$, déterminer $d(x,F)$.

Exercice 22-8
Soit $E = \mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$. Trouver $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que la quantité

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^t - (a + b\sin t + c\cos t)\right)^2 dt$$

soit minimale.

Définition 22.11 : Symétrie orthogonale
Soit $s \in L(E)$ une symétrie vectorielle ($s \circ s = \mathrm{id}$). On dit que s est une symétrie orthogonale ssi les deux sev $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id})$ sont orthogonaux On dit de plus que s est une *réflexion* si l'ensemble des vecteurs invariants, $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id})$ est un hyperplan.

Théorème 22.26 : Caractérisation des symétries orthogonales
Une symétrie s est orthogonale si et seulement si s est un endomorphisme symétrique, c'est à dire :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad (s(x) \mid y) = (x \mid s(y))$$

Remarque 244. Si ε est une *bon* et $S = Mat_\varepsilon(s)$ où $s \in L(E)$, alors s est une symétrie orthogonale si et seulement si :
1. $S^2 = I_n$;
2. ${}^tS = S$.

Exercice 22-9
Soit $u \in \mathbb{R}^n$ euclidien usuel et s la réflexion par rapport à $\{u\}^\perp$. Déterminer la matrice de s dans la base canonique.

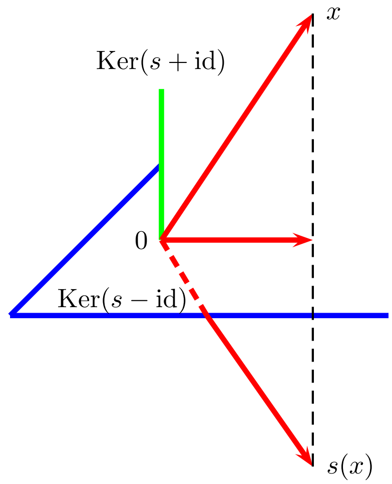


FIG. 22.4 – *Symétrie vectorielle orthogonale*

22.7 Espaces euclidiens orientés. Produit mixte

On considère un espace euclidien E muni d'un produit scalaire noté $(.\mid.)$ et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

DÉFINITION 22.12 : **Orientation**
Soient e et f deux bases de E et la matrice de passage $P = P_{e\mapsto f}$ entre ces deux bases. On dit que les deux bases e et f définissent la même orientation si et seulement si $\det(P) > 0$.
Orienter l'espace consiste à choisir une base e. Les bases de même orientation que e sont dites *directes* et les autres *indirectes*.

Remarque 245. Si $e = (e_1,e_2,e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et si l'on choisit l'orientation définie par cette base, alors la base $f = (e_2,e_3,e_1)$ est directe alors que la base $g = (e_1,e_3,e_2)$ est indirecte.

PROPOSITION 22.27 : **Matrice de passage entre deux bon de même orientation**
Soient $e = (e_1,\dots,e_n)$ et $f = (f_1,\dots,f_n)$ deux bases orthonormales d'un espace euclidien E. Notons $P = P_{e\mapsto f}$ la matrice de passage entre les bases e et f. Alors :

1. $\det(P) = \pm 1$;
2. Si les deux bases orthonormales ont même orientation, alors $\det(P) = +1$.

DÉFINITION 22.13 : **Produit mixte**
Soit E un espace euclidien orienté de dimension n et ε une *bon directe*. Soient $(x_1,\dots,x_n)$ n vecteurs de E. On appelle produit mixte de ces n vecteurs, le scalaire

$$\mathrm{Det}(x_1,\dots,x_n) = \det_\varepsilon(x_1,\dots,x_n)$$

Il est indépendant de la bon directe choisie.

Remarque 246. Dans $\mathbb{R}^2$, le produit mixte de deux vecteurs $\mathrm{Det}(x,y)$ représente l'aire algébrique du parallélogramme défini par ces deux vecteurs.
Dans $\mathbb{R}^3$, le produit mixte de trois vecteurs $\mathrm{Det}(x,y,z)$ représente le volume algébrique du parallélépipède qui s'appuie sur ces trois vecteurs.

THÉORÈME 22.28 : **Inégalité de Gram** [a]

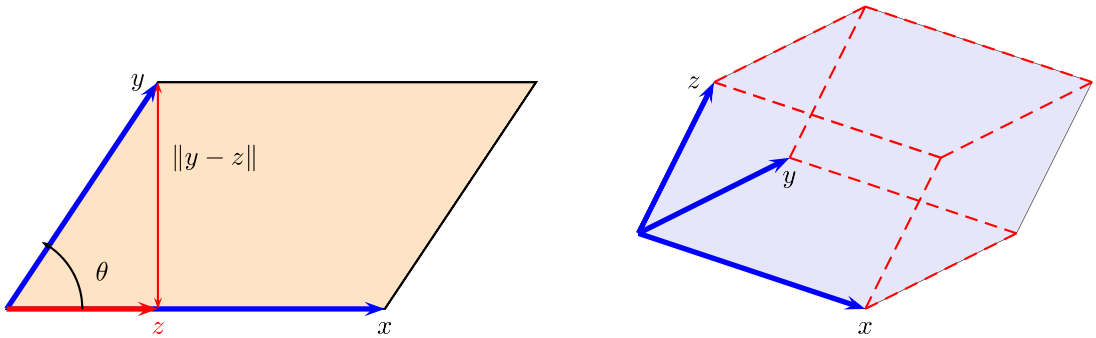
$$\left|\mathrm{Det}(x_1,\dots,x_n)\right| \leq \|x_1\|\dots\|x_n\|$$

Avec égalité ssi les vecteurs $x_1,\dots,x_n$ sont deux à deux orthogonaux.

[a] Jorgen Pedersen Gram, (27/06/1850-29/04/1916), Danois. Célèbre pour l'inégalité de Gram-Schmidt (même si Cauchy l'avait déjà utilisée en 1836)

22.8 Produit vectoriel

On considère dans cette section, un espace euclidien orienté de dimension 3 : $(E,3,(.\mid.))$.



(a) Aire du parallélogramme : $\|x\| \times \|y\| \sin\theta = \left|\mathrm{Det}(x,y)\right|$

(b) Produit mixte de trois vecteurs dans E_3

FIG. 22.5 – *Interprétation du produit mixte*

DÉFINITION 22.14 : **Produit vectoriel**
Soient $(x,y) \in E^2$. L'application

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \mathrm{Det}(x,y,z) \end{array} \right.$$

est une forme linéaire. D'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur noté $x \wedge y$ tel que

$$\forall z \in E, \quad \mathrm{Det}(x,y,z) = (x \wedge y \mid z)$$

On appelle $x \wedge y$ le *produit vectoriel* de x avec y.

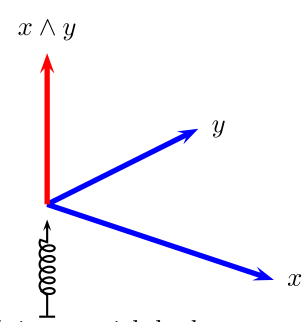


FIG. 22.6 – *Produit vectoriel de deux vecteurs dans E_3*

THÉORÈME 22.29 : **Propriétés du produit vectoriel**

1. L'application
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x \wedge y \end{array} \right.$$
est linéaire par rapport à chaque variable.
2. Si x et y sont colinéaires, leur produit vectoriel est nul.
3. $y \wedge x = -x \wedge y$.
4. Si (x,y) est un système libre, alors
   (a) $x \wedge y \neq 0$
   (b) $\mathrm{Vect}(x,y)^\perp = \mathrm{Vect}(x \wedge y)$.
   (c) $(x,y,x \wedge y)$ est une base directe de E.

THÉORÈME 22.30 : **Coordonnées du produit vectoriel de deux vecteurs**
Soit ε une *bon directe* de E. Soient deux vecteurs $(x,y) \in E$, de matrices X,Y dans la base ε :

$$X = \mathrm{Mat}_\varepsilon(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, Y = \mathrm{Mat}_\varepsilon(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Notons T la matrice du vecteur $x \wedge y$ dans la base ε : $T = \mathrm{Mat}_\varepsilon(x \wedge y)$. Alors :

$$T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -(x_1y_3 - x_3y_1) \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

THÉORÈME 22.31 : **Identité de Lagrange et formule du double produit vectoriel**
Si $(x,y,z) \in E^3$,

1. $\|x\|^2\|y\|^2 = \|x \wedge y\|^2 + (x \mid y)^2$ (Lagrange) ;
2. $x \wedge (y \wedge z) = (x \mid z)\,.y - (x \mid y)\,.z$ (double produit vectoriel).

Exercice 22-10

Le produit vectoriel définit une lci dans E. Cette loi est-elle commutative ? Associative ? Possède-t-elle un élément neutre ?

Exercice 22-11

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté, on se donne deux vecteurs $a,b \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$. Résoudre l'équation

$$a \wedge x = b$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 22-12

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté, ε une bon directe et $a \in \mathbb{R}^3$, on considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & a \wedge x \end{array} \right.$$

a) Montrer que f est linéaire et écrire la matrice de f dans ε.

b) Montrer que f est un endomorphisme antisymétrique :

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^3, \quad (f(x) \mid y) = -(x \mid f(y))$$

22.9 Etude du groupe orthogonal

DÉFINITION 22.15 : $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$
Soit une matrice orthogonale $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(A) = \pm 1$. On définit les sous-ensembles de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ suivants :

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = +1\} \quad \mathrm{O}_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = -1\}$$

Les matrices de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ sont appelées *spéciales orthogonales*. L'ensemble $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe orthogonal $(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\times)$.

PROPOSITION 22.32 : **Critère pour reconnaître les matrices de** $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$
Soit une matrice orthogonale $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Soit un coefficient $a_{ij} \neq 0$ de la matrice A et Δ_{ij} le cofacteur associé.

1. Si $A \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, alors $a_{ij} = \Delta_{ij}$;
2. si $A \in \mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$, alors $a_{ij} = -\Delta_{ij}$.

Remarque 247. En pratique, pour vérifier qu'une matrice $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est spéciale orthogonale, on calcule le déterminant $\Delta_{11} = m_{11}$ et on compare son signe avec celui du coefficient a_{11}.

DÉFINITION 22.16 : **Isométries directes et indirectes**
Soit une isométrie $u \in \mathrm{O}(E)$ d'un espace euclidien orienté E. Alors $\det(u) = \pm 1$. On dit que u est une *isométrie directe* de E lorsque $\det(u) = +1$, et une isométrie indirecte lorsque $\det(u) = -1$. On note $\mathrm{SO}(E)$ l'ensemble des isométries directes, et $\mathrm{O}^-(E)$ l'ensemble des isométries indirectes de E. L'ensemble $\mathrm{SO}(E)$ est un sous-groupe du groupe orthogonal $(\mathrm{O}(E),\circ)$.

Remarque 248. Si ε est une base orthonormale de E, et si U est la matrice de l'isométrie u dans la base ε, alors

$$\underset{(i)}{\big(u \text{ isométrie directe }\big)} \Longleftrightarrow \underset{(ii)}{\big(U \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})\big)}$$

22.9.1 Etude du groupe orthogonal en dimension 2.

THÉORÈME 22.33 : **Etude de $SO_2(\mathbb{R})$**

1. Les matrices de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sont de la forme

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

2. $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$
3. $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$
4. L'application

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),\times) \\ \theta & \longmapsto & R_\theta \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

THÉORÈME 22.34 : **Rotations vectorielles**
Soit E un espace euclidien de dimension 2 orienté et $u \in \mathrm{SO}(E)$ une isométrie directe. Alors il existe un unique $\theta \in [0,2\pi[$ tel que pour *toute bon directe* ε de E,

$$Mat_\varepsilon(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

On dit que u est la rotation vectorielle d'angle θ et on note $u = r_\theta$.

THÉORÈME 22.35 : **Angle de deux vecteurs**
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2 et $(U,V) \in E^2$ deux vecteurs non-nuls. On définit

$$u = \frac{U}{\|U\|}, \quad v = \frac{V}{\|V\|}$$

Alors il existe une unique rotation $r \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ telle que $v = r(u)$. Si θ est l'angle de la rotation $\theta \in [0,2\pi[$, on note

$$\widehat{(U,V)} = \theta$$

l'angle orienté des vecteurs (U,V). On a alors

1. $\mathrm{Det}(U,V) = \|U\|\|V\| \sin\theta$
2. $(U \mid V) = \|U\|\|V\| \cos\theta$

Remarque 249. On utilise ces formules pour déterminer l'angle entre deux vecteurs. Par exemple dans $\mathbb{R}^2$ euclidien orienté usuel, quel est l'angle entre les vecteurs $U = (1,1)$ et $V = (0,1)$?

THÉORÈME 22.36 : **Etude de $O_2^-(\mathbb{R})$**
Considérons la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$. L'application

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & AP \end{array} \right.$$

est une bijection. Toute matrice de $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Théorème 22.37 : **Isométries indirectes**
Une isométrie indirecte d'un espace euclidien orienté de dimension 2 est une symétrie orthogonale par rapport à une droite (réflexion).

Théorème 22.38 : **Décomposition des rotations**
Toute rotation d'un espace euclidien orienté de dimension 2 s'écrit comme composée de deux réflexions.

Remarque 250. Les réflexions engendrent le groupe orthogonal $O(E_2)$. Toute isométrie de E_2 s'écrit comme un produit de 1 ou 2 réflexions.

22.9.2 Etude du groupe orthogonal en dimension 3

On considère un espace euclidien orienté E_3 de dimension 3.

Théorème 22.39 : **Isométries directes en dimension 3 : rotations vectorielles**
Soit une isométrie directe $u \in \mathrm{SO}(E_3)$. On note $E(1) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ le sous espace vectoriel formé des vecteurs invariants par u. On montre que :

1. Si $u \neq \mathrm{id}_E$, $E(1)$ est une droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}(\varepsilon_3)$ où ε_3 est un vecteur de norme 1 ;
2. Pour toute base orthonormée directe $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ (le troisième vecteur ε_3 dirigeant l'axe et fixé), la matrice de u dans la base ε s'écrit :

$$Mat_e(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   On dit que u est la *rotation* d'axe $\mathrm{Vect}(e_3)$ et d'angle θ.

Remarque 251. L'angle de la rotation dépend du choix du vecteur d. Si l'on choisit $d' = -d$ pour diriger l'axe, l'angle θ est transformé en son opposé.

Remarque 252. Ne pas confondre l'angle θ de la rotation avec l'angle entre les vecteurs x et $r(x)$!

Proposition 22.40 : **Détermination de l'angle d'une rotation**
Soit E_3 euclidien orienté, r une rotation et d un vecteur unitaire qui dirige l'axe de cette rotation. Ce vecteur d défnit une orientation du plan $\mathrm{Vect}\, d^\perp$ et donc l'angle θ de r. Soit $\varepsilon \in \mathrm{Vect}(d)^\perp$.

$$r(\varepsilon) = \cos\theta.\varepsilon + \sin\theta.d \wedge \varepsilon$$

Remarque 253. Cette proposition donne un moyen pratique de déterminer les éléments caractéristiques d'une rotation :

1. Déterminer l'axe D de la rotation : c'est l'ensemble des vecteurs invariants.
2. Chercher un vecteur $d \in D$ unitaire. Il définit une orientation sur le plan $P = \mathrm{Vect}(d)^\perp$.
3. Déterminer un vecteur $\varepsilon_1 \in P$, vérifiant $(d \mid \varepsilon_1) = 0$.
4. Poser $\varepsilon_2 = d \wedge \varepsilon_1$. Alors $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, d)$ est une bon directe de l'espace.
5. Calculer $r(\varepsilon_1)$ et le décomposer sur ε_1 et ε_2 :

$$r(\varepsilon_1) = \cos\theta\varepsilon_1 + \sin\theta\varepsilon_2$$

   On en tire $\cos\theta$ et $\sin\theta$ et donc l'angle de la rotation.

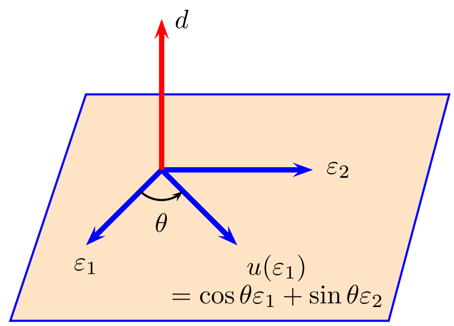


Fig. 22.7 – *Détermination de l'angle θ d'une rotation*

Remarque 254. On peut également utiliser les remarques suivantes pour étudier une rotation u donnée par sa matrice A dans une base quelconque :

1. On vérifie que $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ en montrant que la matrice A est orthogonale et en montrant que $\det(A) = +1$ (il suffit de comparer a_{11} et Δ_{11}).
2. On sait que dans toute base orthogonale directe de la forme $\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,d)$,

$$Mat_\varepsilon(u) = U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Alors les matrices A et U sont semblables et par conséquent, $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(U)$ d'où l'on tire

$$\boxed{2\cos\theta + 1 = \mathrm{Tr}(A)}$$

3. On détermine l'axe de la rotation en cherchant les vecteurs invariants : $\mathrm{Vect}(d)$ où d est un vecteur unitaire. Cela revient à résoudre un système homogène 3×3.
4. On détermine un vecteur ε_1 unitaire orthogonal à d et on calcule

$$\mathrm{Det}\big(\varepsilon_1,u(\varepsilon_1),d\big)$$

   Comme ce produit mixte est indépendant de la bon directe choisie pour le calculer, en introduisant (sans le calculer) ε_2 tel que $\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,d)$ soit une bon directe,

$$\mathrm{Det}\big(\varepsilon_1,u(\varepsilon_1),d\big) = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin\theta$$

5. On obtient donc :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\mathrm{Tr}(A)-1}{2}}, \quad \boxed{\sin\theta = \mathrm{Det}\big(\varepsilon_1,u(\varepsilon_1),d\big)}$$

   et l'on en tire l'angle θ de la rotation.

Exercice 22-13

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté euclidien usuel, on considère l'endomorphisme de matrice

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 & \sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

dans la base canonique. Reconnaître cet endomorphisme et préciser ses éléments caractéristiques.

THÉORÈME 22.41 : **Classification des isométries en dimension 3**
Soit un endomorphisme orthogonal $u \in \mathrm{O}(E)$. On note $E(1) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ le sous-espace formé des vecteurs invariants. Selon la dimension de $E(1)$, on a la classification suivante :

$\dim E(1)$	$\det(u)$	$u \in$	Nature de u
3	1	$\mathrm{SO}(E)$	id
2	-1	$\mathrm{O}^-(E)$	Réflexion s_H
1	1	$\mathrm{SO}(E)$	Rotation autour d'un axe r (dont les demi-tours)
0	-1	$\mathrm{O}^-(E)$	Composée d'une rotation et d'une réflexion

Dans le dernier cas, $u = r \circ s_H$, où le plan H invariant par la réflexion est orthogonal à l'axe de la rotation r.

Remarque 255. Si $A \in \mathrm{O}_3^-(\mathbb{R})$, alors $\det(-A) = -\det(A) = 1$. Donc la matrice $-A$ est spéciale orthogonale. On se ramène à l'étude précédente. On peut également résumer la classification des isométries de E_3 de la façon suivante :

- Isométries directes : ce sont des rotations d'axe une droite vectorielle. (Les symétries orthogonales par rapport à une droite sont des rotations d'angle π, et on convient que id_E est une rotation d'angle 0) ;
- Isométries indirectes : elles sont de la forme $-r_{D,\theta}$ où $r_{D,\theta}$ est une rotation par rapport à une droite vectorielle D (avec l'identité). On a alors $u = -r_{D,\theta} = r_{D,\theta+\pi} \circ s_{D^\perp}$.

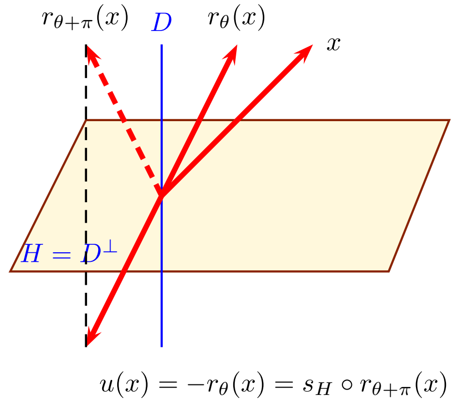


FIG. 22.8 – *Isométrie indirecte avec* $E(1) = \{0_E\}$

Remarque 256. On montre qu'une rotation vectorielle $r_{D,\theta}$ s'écrit comme produit de deux réflexions s_H et $s_{H'}$ avec $H \cap H' = D$. Alors toute isométrie de E_3 se décompose comme un produit de réflexions. Par conséquent, les réflexions engendrent le groupe orthogonal $\mathrm{O}(E_3)$.

Exercice 22-14

Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Reconnaître l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 22-15

Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Reconnaître l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 22-16

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel, on considère la rotation d'axe dirigé par le vecteur $n = (1,1,1)$ d'angle $\frac{\pi}{6}$. Écrire la matrice de cette rotation dans la base canonique.

DÉFINITION 22.17 : **Angle de deux vecteurs dans E_3**

Si $a,b \in E_3$ sont deux vecteurs non-nuls, d'après l'identité de Lagrange,

$$(a \mid b)^2 + \|a \wedge b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 \Rightarrow \left(\frac{(a \mid b)}{\|a\|\|b\|}\right)^2 + \left(\frac{\|a \wedge b\|}{\|a\|\|b\|}\right)^2 = 1$$

Donc $\exists! \theta \in [0,\pi[$ tel que

$$\boxed{\cos\theta = \frac{(a \mid b)}{\|a\|\|b\|}, \quad \sin\theta = \frac{\|a \wedge b\|}{\|a\|\|b\|}}$$

On dit que θ est l'angle entre les vecteurs a et b.

Chapitre 23

Fonctions de deux variables

23.1 Continuité d'une fonction de deux variables

On munit dans ce chapitre l'espace $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne usuelle : $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

DÉFINITION 23.1 : **Boule ouverte**
Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. On appelle *boule ouverte* de centre a et de rayon r,

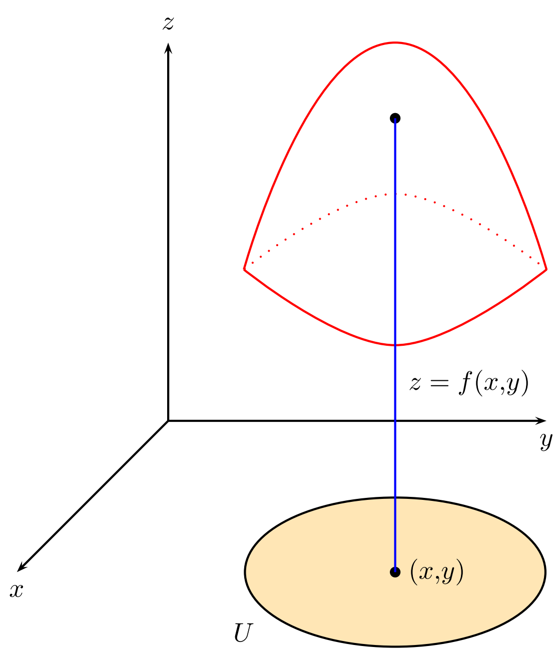
$$B(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| < r\}$$

DÉFINITION 23.2 : **Parties ouvertes**
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$. On dit que U est une partie *ouverte* si $\forall a \in U$, il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre a et de rayon r soit incluse dans U.

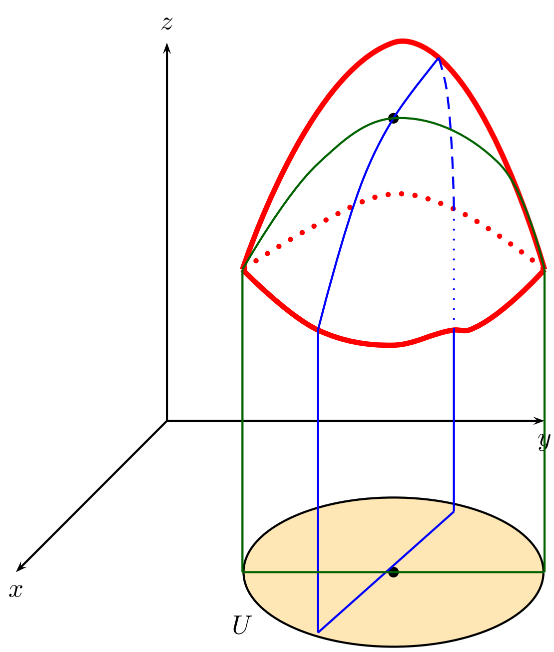
On considère maintenant une partie $U \subset \mathbb{R}^2$ ouverte et une fonction de deux variables :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \right.$$

Remarque 257. Soit un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. L'ensemble $(\mathcal{F}(U,\mathbb{R}),+,.,\times)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.



(a) Fonction de deux variables



(b) Applications partielles

FIG. 23.1 – *Fonction de deux variables*

DÉFINITION 23.3 : **Continuité**

- Soit un point $a = (a_1,a_2) \in U$ et un réel $l \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers la limite l lorsque $x = (x_1,x_2)$ tend vers $a = (a_1,a_2)$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in U, \|x - a\| \le \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \le \varepsilon$$

- On dit que la fonction f est continue au point $a \in U$ si et seulement si $lim_{x \to a} f(x) = f(a)$;
- On dit que la fonction f est continue sur l'ouvert U si et seulement si elle est continue en tout point de U.

THÉORÈME 23.1 : **Théorème de majoration**
On suppose qu'il existe une fonction $\theta : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}^2$, on aît pour $l \in \mathbb{R}$:

H1 $|f(x) - l| \le \theta\left(\|X - a\|\right)$;

H2 $\theta(\rho) \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$;

Alors $f(X) \xrightarrow[X \to a]{} l$.

Exercice 23-1

Soit la fonction de deux variables définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$$

Étudier la continuité de la fonction f au point $(0,0)$.

Remarque 258. Soient deux fonctions $f,g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ continues au point a. Montrer que les fonctions $f + g$ et fg sont continues au point a. On montre ainsi que l'ensemble des fonctions continues sur un ouvert U est une algèbre.

Remarque 259. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Soit $a \in U$. On suppose que f est continue en a et que g est continue en $f(a)$. Montrer que $g \circ f$ est continue en a.

DÉFINITION 23.4 : **Applications partielles**
Soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a = (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$. On définit les deux fonctions d'une variable (applications partielles au point a) par :

$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t,a_2) \end{array} \right.$$

$$f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(a_1,t) \end{array} \right.$$

THÉORÈME 23.2 : **Continuité des applications partielles**
Si la fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ est continue au point $a = (a_1,a_2)$, alors la première fonction partielle f_1 est continue au point a_1 et la deuxième fonction partielle f_2 est continue au point a_2. La réciproque est fausse en général.

Exercice 23-2

Etudier la continuité en $(0,0)$ et la continuité des applications partielles de la fonction définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$$

DÉFINITION 23.5 : **Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$**
Soit une fonction $f : \begin{cases} U \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big) \end{cases}$.

1. Soit un point $a = (a_1,a_2) \in U$ et un point $l = (l_1,l_2) \in \mathbb{R}^2$. On dit que f tend vers l lorsque x tend vers a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in U, \quad \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - l\| \leq \varepsilon$$

2. On dit que la fonction f est continue au point a lorsque $lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

THÉORÈME 23.3 : **Limite d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$**
Avec les notations précédentes,

$$\underset{(i)}{\big(f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l\big)} \iff \underset{(ii)}{\big(f_1(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1 \text{ et } f_2(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_2\big)}$$

THÉORÈME 23.4 : **Continuité d'une composée**
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$. Si f est continue au point $a \in U$ et g est continue au point $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

23.2 Dérivées partielles

On considère une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$.

DÉFINITION 23.6 : **Dérivée selon un vecteur**
Soit un point $a \in U$ et un vecteur $\overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^2$ non nul. On dit que la fonction f admet une dérivée selon le vecteur $\overrightarrow{h}$ si et seulement si :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\overrightarrow{h}) - f(a)}{t} \text{ existe}$$

On note alors cette limite $D_{\overrightarrow{h}} f(a)$.

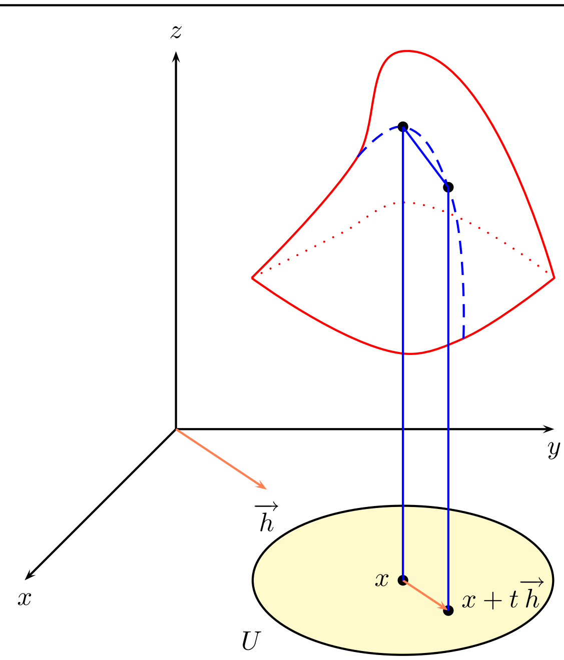


FIG. 23.2 – *Dérivée selon un vecteur*

Remarque 260. On considère dans cette définition la restriction de f à la droite passant par a dirigée par le vecteur $\overrightarrow{h}$: $\phi(t) = f(a + t\overrightarrow{h})$ et la dérivée selon le vecteur $\overrightarrow{h}$ est la dérivée en $t = 0$ de la fonction d'une variable $\phi(t)$.

Exercice 23-3

On considère la fonction de deux variables définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Soit un vecteur $\overrightarrow{h} = (a,b)$. Etudier la dérivée de f selon le vecteur $\overrightarrow{h}$ au point $(0,0)$.

DÉFINITION 23.7 : Dérivées partielles

On appelle dérivées partielles de f au point a lorsqu'elles existent, les dérivées de f selon les vecteur $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. On note alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1+t,a_2) - f(a_1,a_2)}{t}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1,a_2+t) - f(a_1,a_2)}{t}$$

Remarque 261. La recherche de dérivées partielles revient à étudier la dérivabilité des fonctions partielles de f. Pour le calcul pratique, on dérive par rapport à une variable en fixant l'autre constante.

Exercice 23-4

Calculer les dérivées partielles de $f(x,y) = x\cos(xy^2) + ye^x$.

DÉFINITION 23.8 : Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ existent en tout point $(x_0,y_0) \in U$;
2. les deux fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur U.

Exercice 23-5

Soit la fonction de deux variables définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

THÉORÈME 23.5 : Développement limité à l'ordre 1

Soit une fonction $f : U \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. Alors Il existe une fonction $\varepsilon : V_0 \mapsto \mathbb{R}$ définie sur un voisinage de $(0,0)$ telle que :

1. $\forall a \in U$, $\forall h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a + h \in U$,
$$f(a+h) = f(a) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2\right) + \|h\|\varepsilon(h)$$
2. $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

On dit que la fonction f admet un *développement limité à l'ordre* 1 au point a.

THÉORÈME 23.6 : Classe $\mathcal{C}^1$ implique continuité

Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U, alors elle est continue sur U.

DÉFINITION 23.9 : Différentielle

Si une fonction $f : U \mapsto \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U, pour un point $a \in U$, on note

$$df_a : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h = (h_1,h_2) & \longmapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 \end{cases}$$

df_a est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ qui s'appelle la *différentielle* de f au point $a \in U$.

DÉFINITION 23.10 : **Gradient**
Si $f : U \mapsto \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$ sur U et $a \in U$, alors puisque df_a est une forme linéaire, d'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur $\nabla f(a) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, \boxed{df_a(h) = (\nabla f(a) \mid h)}$$

Ce vecteur s'appelle le *gradient* de f au point a. Si l'on utilise le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$, le théorème précédent donne :

$$\boxed{\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)}$$

THÉORÈME 23.7 : **Différentielle et dérivée selon un vecteur**
Si la fonction $f : U \mapsto \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U, alors pour tout point $a \in U$ et tout vecteur $h = (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$, la fonction f admet une dérivée selon le vecteur h au point a et

$$\boxed{D_h f(a) = df_a(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 = (\nabla f(a) \mid h)}$$

Exercice 23-6
Soit $f(x,y) = x^2 e^y + \sin(xy)$, e la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $a = (0,1)$ calculer df_a, $Mat_e(df_a)$, $\nabla f(a)$ et $D_h f(a)$ où $h = (1,2)$.

THÉORÈME 23.8 : **Théorèmes généraux**
Soient $f,g : U \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Alors
- pour $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ;
- la fonction $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ;
- l'ensemble $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U est une algèbre.

THÉORÈME 23.9 : **Dérivée d'une composée**
Soit une fonction de deux variables $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et deux fonctions d'une variable $u,v : I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I telles que $\forall t \in I$, $\phi(t) = \big(u(t),v(t)\big) \in U$. On peut alors définir la fonction d'une variable :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f\big(u(t),v(t)\big) \end{array} \right.$$

Cette fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I et

$$\forall t \in I, \quad \boxed{g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(u(t),v(t)\big) \times u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(u(t),v(t)\big) \times v'(t)}$$
$$= \big(\nabla f\big(\phi(t)\big) \mid \phi'(t)\big) = df_{\phi(t)}\big(\phi'(t)\big)$$

Exercice 23-7
Soit $f(x,y) = x^2 + xy + e^{x-y}$ et $g(t) = f(e^t,t^2)$. Calculer $g'(0)$.

Remarque 262. La formule précédente est très utile. Elle permet à partir d'une fonction de deux variables d'étudier une fonction partielle d'une seule variable $g(t) = f(a + th)$ et d'utiliser les résultats connus pour les fonctions d'une variable réelle.

Exercice 23-8
Soit $f : U \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et un segment $[a,b]$ inclus dans l'ouvert U. On considère la restriction de la fonction f à ce segment :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(a + t(b-a)) \end{array} \right.$$

a) Montrer la formule de Taylor intégrale à l'ordre 1 :

$$f(b) = f(a) + (b_1 - a_1)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(a + t(b-a))dt + (b_2 - a_2)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(a + t(b-a))dt$$

b) En déduire l'inégalité des accroissements finis : Si $M = \sup_{x\in[a,b]} \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right|, \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x)\right|\right)$,

$$\big|f(b) - f(a)\big| \leq M\|b - a\|_1$$

Exercice 23-9

Soit $F : I \mapsto \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que la courbe paramétrée est une *courbe de niveau* de f : $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in I$, $f\big(F(t)\big) = c$.

a) On considère la fonction d'une variable $g(t) = f\big(F(t)\big)$. Calculer pour $t \in I$, $g'(t)$.

b) En déduire qu'en un point a d'une courbe de niveau C_c de f, le vecteur gradient au point $\nabla f(a)$ est orthogonal à la courbe de niveau.

c) Une application importante : soit $\mathcal{C}$ une courbe de $\mathbb{R}^2$ définie par une équation $f(x,y) = 0$ où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'équation de la tangente en un point (x_0,y_0) de cette courbe est

$$\boxed{(X - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (Y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0}$$

d) Déterminer l'équation de la tangente en un point (x_0,y_0) d'une ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

23.3 Extrémas d'une fonction de deux variables

DÉFINITION 23.11 : **Extremum**

Soit $f : U \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in U$. On dit que a est :

- un *maximum local* (strict) de f si et seulement si $\exists r > 0$, tel que $\forall x \in B(a,r) \cap U$,

$$f(x) \leq f(a) \quad \big(f(x) < f(a)\big)$$

- un *minimum local* (strict) de f si et seulement si $\exists r > 0$ tel que $\forall x \in B(a,r) \cap U$,

$$f(x) \geq f(a) \quad \big(f(x) > f(a)\big)$$

- un *extremum local* de f si et seulement si a est un maximum local ou un minimum local ;
- un *maximum global* si et seulement si $\forall x \in U$, $f(x) \leq f(a)$;
- un *minimum global* si et seulement si $\forall x \in U$, $f(x) \geq f(a)$).

THÉORÈME 23.10 : **La différentielle s'annule en un extremum local**

Soit une fonction $f : U \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U. Les points $a \in U$ tels que $df_a = 0$ s'appellent des *points critiques* de f.

Si $a \in U$ est un extremum local de f, alors a est un point critique :

$$df_a = 0 \Longleftrightarrow \nabla f(a) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$$

Remarque 263. Les extrémas de f sont à chercher parmi les points critiques de f, mais un point critique ne correspond pas toujours à un extremum : une fois qu'on a déterminé tous les points critiques, il faut faire une étude plus précise.

Exercice 23-10

Etudier les extrémas locaux de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Exercice 23-11

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x + y)^2 + x^4 + y^4$. Déterminer les extrémas locaux et globaux de f.

Exercice 23-12

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = x^2y + \ln(1+y^2)$. Etudier les extrémas de g.

23.4 Dérivées partielles d'ordre supérieur

DÉFINITION 23.12 : **Dérivées partielles secondes**
Soit $f : U \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U. On définit les deux fonctions :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : U \mapsto \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} : U \mapsto \mathbb{R}$$

qui sont continues sur U.

1. Si $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(a)$ existe, on note ce réel $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$;
2. Si $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(a)$ existe, on note ce réel $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$;
3. Si $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(a)$ existe, on note ce réel $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$;
4. Si $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(a)$ existe, on note ce réel $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$.

Exercice 23-13

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Etudier l'existence de dérivées partielles secondes de f en $(0,0)$.

THÉORÈME 23.11 : **Théorème de Schwarz**
Soit $f : U \mapsto \mathbb{R}$ et $a \in U$. On suppose que :

1. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ;
2. les fonctions $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ et $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ existent sur un voisinage de a ;
3. ces deux fonctions sont continues au point a.

Alors

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a)$$

On note alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$ cette valeur commune.

DÉFINITION 23.13 : On définit par récurrence les dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$ d'une fonction $f : U \mapsto \mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U si et seulement si

1. f est de classe $k-1$;
2. Toutes les dérivées partielles $\dfrac{\partial k}{\partial x^p \partial y^q}(a)$ $(p+q=k)$ existent $\forall a \in U$ et sont des fonctions continues sur U.

D'après le théorème de Schwarz, toutes les dérivées partielles croisées sont égales.

Exercice 23-14

Soit $[a,b] \subset U$ un segment et $f : U \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. En écrivant la formule de Taylor intégrale pour la restriction de f à ce segment, en déduire la formule de Taylor intégrale pour f :

$$f(b) = f(a) + (\nabla f(a) \mid b-a)$$
$$+(b_1-a_1)^2 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+t(b-a))\,\mathrm{d}t + 2(b_1-a_1)(b_2-a_2)\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+t(b-a))\,\mathrm{d}t$$
$$+(b_2-a_2)^2 \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+t(b-a))\,\mathrm{d}t$$

Exercice 23-15

Soit $U = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 | 0 < t < x\}$. Trouver une fonction $u : U \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ de la forme $u(x,t) = f(x/t)$ vérifiant l'équation des ondes :

$$\forall (x,t) \in U, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

Exercice 23-16

Une application $\overrightarrow{F} : U \mapsto \mathbb{R}^2$ s'appelle un *champ de vecteurs*. On dit que le champ de vecteurs dérive d'un potentiel scalaire lorsqu'il existe une application $V : U \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in U, \quad \overrightarrow{F}(x,y) = \nabla V(x,y) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial V}{\partial y}(x,y) \end{array} \right.$$

a. On suppose $\overrightarrow{F}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que si $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel, on doit avoir

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = 0$$

23.5 Intégrales doubles

Si une fonction f est constante et vaut α sur un petit pavé $[a,b] \times [c,d]$, on définit son intégrale double comme étant le *volume* de l'espace de base le rectangle $[a,b] \times [c,d]$ et de hauteur α. Ce volume vaut $V = \alpha \times (b-a) \times (d-c)$. On vérifie que

$$V = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\, \mathrm{d}y \Big)\, \mathrm{d}x = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\, \mathrm{d}x \Big)\, \mathrm{d}y$$

Pour définir l'intégrale double d'une fonction bornée $f : [a,b] \times [c,d] \mapsto \mathbb{R}$, on commence par subdiviser le rectangle $[a,b] \times [c,d]$ en $n \times p$ petits rectangles, et on définit l'intégrale d'une fonction en escalier (constante sur chacun des rectangles) comme la somme des volumes des parallépipèdes. On définit ensuite l'intégrale supérieure

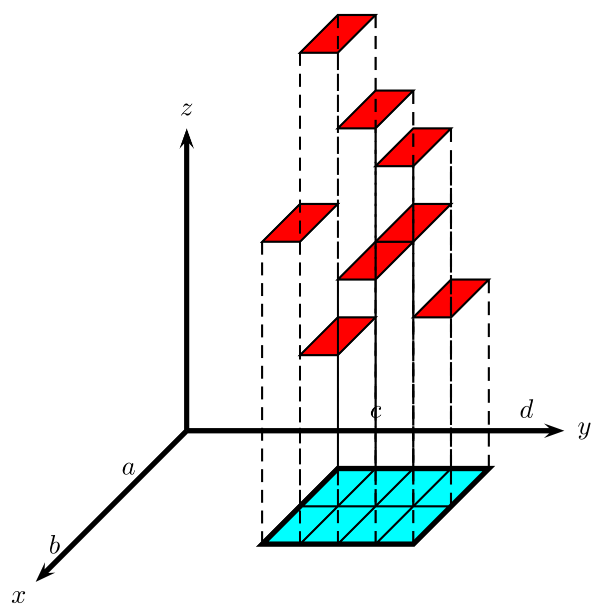


Fig. 23.3 – *Fonction en escalier*

de la fonction f comme étant la borne inférieure des intégrales des fonctions en escalier majorant f, et l'intégrale inférieure de la fonction f comme étant la borne supérieure des intégrales de fonctions en escalier minorant f. Lorsque l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure sont égales, on dit que la fonction f est intégrable, et on note

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

son intégrale. On montre que toute fonction $f : [a,b] \times [c,d] \mapsto \mathbb{R}$ continue est intégrable.
La construction devient beaucoup plus compliquée si l'on considère des domaines $U \subset \mathbb{R}^2$ qui ne sont plus des rectangles. Comment « subdiviser » un tel domaine U ? Quelle régularité imposer à U ? Ce procédé de construction est inadapté, et on utilise une autre définition de l'intégrale : l'intégrale de Lebesgue. Heureusement, les calculs avec l'intégrale de Lebesgue ressemblent aux calculs habituels avec l'intégrale de Riemann. Nous admettrons les résultats qui suivent.
On considère une fonction $f : U \mapsto \mathbb{R}$ continue sur une partie $U \subset \mathbb{R}^2$ « admissible » définie à l'aide de deux fonctions d'une variable :

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b \text{ et } \phi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

ou alors

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d \text{ et } \alpha(y) \le x \le \beta(y)\}$$

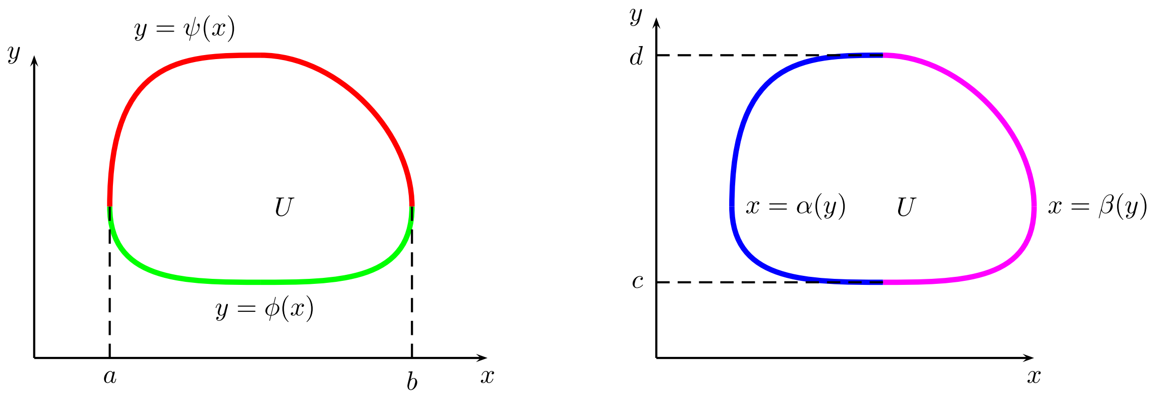


FIG. 23.4 – *un domaine U délimité par le graphe de deux fonctions*

Le théorème suivant permet de calculer une intégrale double sur un tel domaine.

THÉORÈME 23.12 : **Théorème de Fubini**
Si f est une fonction continue sur un domaine $U \subset \mathbb{R}^2$ admissible, alors on peut calculer l'intégrale double de f sur U en calculant deux intégrales simples :

$$\iint_U f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

Exercice 23-17
Calculer $\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x\}$.

THÉORÈME 23.13 : **Propriétés de l'intégrale double**

1. **Linéarité** :

$$\iint_D (\lambda f + \mu g)(x,y)\,dx\,dy = \lambda \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \mu \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

2. **Additivité** : si $D = D_1 \cup D_2$ avec $D_1 \cap D_2 = \emptyset$,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

3. **Positivité** : si $f \ge 0$ sur D, alors

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \ge 0$$

23.6 Changement de variables

THÉORÈME 23.14 : **Changement de variables**
Soit un domaine « admissible » $\Delta, D \subset \mathbb{R}^2$ et une application bijective de classe $\mathcal{C}^1$

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \Delta & \longrightarrow & D \\ (u,v) & \mapsto & (x(u,v),y(u,v)) \end{array} \right.$$

On appelle *Jacobien* de ϕ, au point (u,v), le déterminant

$$J\phi(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Alors

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\,\big|J\phi(u,v)\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}$$

Deux cas importants de changement de variable sont à connaître :

- Changement de coordonnées affine :

$$\begin{cases} x = au + bv + \alpha \\ y = cu + dv + \beta \end{cases}$$

  alors $\boxed{J\phi = (ad - bc)}$

- Changement en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

  alors $\boxed{J\phi = \rho}$.

Exercice 23-18

Calculer $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ où

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}$$

Exercice 23-19

Calculer $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ où le domaine d'intégration D est le demi-disque de rayon 1 de centre $(0,1)$ avec $x \ge 0$.

Exercice 23-20

On définit :

$$F(x) = \int_0^x e^{-x^2}\,dx$$

$$I(R) = \int_{[0,R]\times[0,R]} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le R^2\}$$

a) Montrer que $I(R) = F(R)^2$.

b) Montrer que

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \le I(R) \le \iint_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

c) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} F(R) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

23.7 Aire d'un domaine plan

Définition 23.14 : **Aire d'un domaine plan**
Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine, on appelle *aire* de D,

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D 1 \, dx \, dy$$

Remarque 264. L'aire du domaine plan D est donc le volume de base D et de hauteur 1.

Exercice 23-21

Calculer l'aire délimitée par une ellipse d'équation cartésienne

$$D: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

Théorème 23.15 : **Aire d'un secteur délimité par une courbe polaire**
Soit une courbe polaire d'équation $\rho = \rho(\theta)$ et le domaine Ω délimité par les deux demi-droites d'équation polaire θ_1, θ_2 et par la courbe polaire (voir figure 23.5). Alors l'aire de ce domaine se calcule par la formule :

$$\mathcal{A}(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2(\theta) \, \mathrm{d}\theta$$

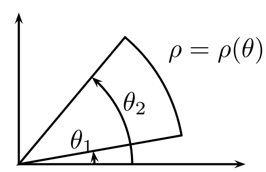


Fig. 23.5 – *Aire délimitée par une courbe polaire*

Exercice 23-22

Calculer l'aire délimitée par une cardioïde d'équation polaire

$$\rho = a(1 + \cos\theta) \quad (a > 0)$$

Exercice 23-23

On considère le limaçon de Pascal d'équation polaire

$$\rho = 2\cos\theta - 1$$

a) Tracer cette courbe.
b) Calculer l'aire entre les deux boucles.

Chapitre 24

Propriétés métriques des courbes planes

24.1 Rectification des courbes planes.

Dans ce chapitre, on considère un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$, $(I,\overrightarrow{F})$ où $I = [a,b]$ et $\overrightarrow{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \overrightarrow{F}(t) \end{array} \right.$ *sans point stationnaire* :

$$\forall t \in I, \quad \overrightarrow{F}'(t) \neq 0$$

DÉFINITION 24.1 : **$\mathcal{C}^1$ difféomorphisme**
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ t & \mapsto & s = \phi(t) \end{array} \right.$$

On dit que ϕ est un *difféomorphisme* de I vers J lorsque :

1. ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
2. ϕ est bijective ;
3. ϕ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.

DÉFINITION 24.2 : **Paramétrages admissibles**
Soit une fonction $\overrightarrow{F} : I \mapsto \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\phi : J \mapsto I$. On lui associe la fonction

$$\overrightarrow{G} : \left\{ \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ s & \mapsto & \overrightarrow{F}\big(\phi(s)\big) \end{array} \right.$$

Alors le support des arcs paramétrés $(I,\overrightarrow{F})$ et $(J,\overrightarrow{G})$ sont égaux. On dit que ϕ définit un changement de paramétrage admissible.

Remarque 265. Un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme est une application $\phi \in \mathcal{C}^1(I,J)$ strictement croissante ou strictement décroissante. Selon les variations de ϕ, cela permet de définir l'orientation sur l'arc γ.

Remarque 266. Cette définition permet de conserver les propriétés géométriques de la courbe, en particulier, si $M(t) = 0 + \overrightarrow{F}(t)$ est un point stationnaire de $\gamma = (I,\overrightarrow{F})$, le point correspondant $M(s) = O + \overrightarrow{G}(s)$ est un point stationnaire de l'arc $\gamma' = (J,\overrightarrow{G})$. En effet,

$$\overrightarrow{G}'(s) = \underbrace{\phi'(s)}_{\neq 0} \overrightarrow{F}\big(\phi(s)\big)$$

24.1.1 Notations différentielles

Soit alors $t \in I$, et $s = \phi(t) \in J$. On note

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \phi'(t) \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = (\phi^{-1})'(s)$$

En utilisant la dérivée d'une fonction réciproque :

$$(\phi^{-1})'(s) = \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(s))} = \frac{1}{\phi'(t)} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}}$$

Soit maintenant deux fonctions vectorielles définissant deux arcs paramétrés $\mathcal{C}^k$ équivalents ($k \geq 2$) :

$$\overrightarrow{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & F(t) \end{array} \right. \qquad G : \left\{ \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ s & \mapsto & F(\phi^{-1}(s)) \end{array} \right.$$

On notera $M(s) = O + \overrightarrow{G}(s) = O + \overrightarrow{F}(t) = M(t)$ si $\phi(t) = s$ et

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F'}(t) \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s} = \overrightarrow{G'}(s)$$

Alors par le calcul de la dérivée d'une fonction composée,

$$\overrightarrow{G}(s) = \overrightarrow{F}(\phi^{-1}(s)) \Rightarrow \overrightarrow{G'}(s) = (\phi^{-1})'(s)\overrightarrow{F'}(\phi^{-1}(s)) = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}\overrightarrow{F'}(t)$$

et avec les notations différentielles, on a donc :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}$$

24.1.2 Abscisse curviligne, longueur

Définition 24.3 : **Repère de Frenet** [a]
Soit $M = O + \overrightarrow{F}(t)$ un point régulier d'un arc paramétré $(I,\overrightarrow{F})$. On définit le *vecteur tangente unitaire* au point M par $\overrightarrow{T} = \dfrac{\overrightarrow{F'}(t)}{\|\overrightarrow{F'}(t)\|}$ et on définit le *vecteur normale unitaire* comme étant le vecteur unitaire $\overrightarrow{N}$ faisant un angle orienté de $+\dfrac{\pi}{2}$ avec le vecteur $\overrightarrow{T}$. On appelle *repère de Frenet* au point M, le repère $(M,\overrightarrow{T},\overrightarrow{N})$.

[a] Jean Frenet : (07/02/1816-12/06/1900), Français. Célèbre pour les formules de Frénet, démontrées dans sa thèse. Il fut professeur à Toulouse

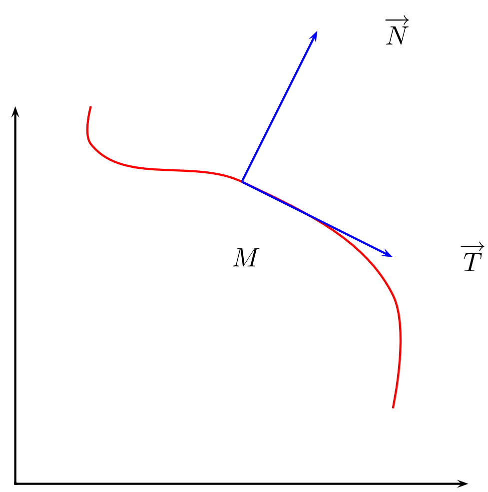


Fig. 24.1 – *Repère de Frenet*

Définition 24.4 : Abscisse curviligne

On appelle abscisse curviligne sur un arc paramétré $(I,\overrightarrow{F})$, toute fonction $s : \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ t & \mapsto & s(t)\end{array}\right.$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall t \in I$,

$$\boxed{\frac{ds}{dt} = \|\overrightarrow{F'}(t)\|}$$

Pour un paramètre $t_0 \in I$, on appelle abscisse curviligne d'origine $M(t_0)$, la fonction définie par

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\overrightarrow{F'}(t)\|\ \mathrm{d}t.$$

Remarque 267. Si l'on suppose qu'entre les instants t_0 et t, la vitesse de parcours du mobile est constante et vaut $v > 0$, alors $s(t) = (t - t_0)v$ et donc $s(t)$ représente la longueur parcourue sur la courbe par le mobile entre les instants t_0 et t.

Remarque 268. Pour une courbe polaire $\rho = \rho(\theta)$, $f'(\theta) = \rho'(\theta)\overrightarrow{u} + \rho(\theta)\overrightarrow{v}$ d'où $s'(\theta) = \sqrt{\rho^2(\theta) + {\rho'}^2(\theta)}$ (car la base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est orthonormale.

Remarque 269. Pour une courbe $y = f(x)$, on peut la paramétrer en posant $x(t) = t$, $y(t) = f(t)$ et alors

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$$

Remarque 270. Comme la courbe est sans point stationnaire, $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|\overrightarrow{F'(t)}\| \neq 0$ et donc s réalise une bijection de I vers un intervalle J et c'est un difféomorphisme. Alors si l'on note $s = s(t)$, et $M = M(t) = M(s)$ un point de la courbe, on a :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s}\| = \frac{\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}\|}{|\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}|} = 1$$

Donc l'intérêt de choisir l'abscisse curviligne comme paramétrage de la courbe est que la courbe est parcourue à vitesse constante 1 et que s à une signification géométrique : la longueur de l'arc parcourue entre $M(s_0)$ et $M(s)$ vaut $s - s_0$. De plus, le vecteur tangente unitaire au point $M(s)$ vaut

$$\boxed{\overrightarrow{T} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s}}$$

Remarque 271. *Rectifier* la courbe, c'est déterminer une abscisse curviligne.

Définition 24.5 : Longueur d'un arc paramétré

On appelle longueur de l'arc paramétré $\Gamma = ([a,b],\overrightarrow{F})$, le réel

$$\boxed{L(\Gamma) = \int_a^b \|\overrightarrow{F'(t)}\| dt}$$

Théorème 24.1 : La définition de longueur d'un arc est indépendante du paramétrage

Si $\phi : \left\{\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & [\alpha,\beta] \\ t & \mapsto & u = \phi(t)\end{array}\right.$ est un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme $(k \geq 1)$, et si $\overrightarrow{G}$: $\left\{\begin{array}{ccc} [\alpha,\beta] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u & \mapsto & \overrightarrow{F}(\phi(u))\end{array}\right.$ est un autre paramétrage admissible de la courbe, alors

$$L(\Gamma) = \int_\alpha^\beta \|\overrightarrow{G'}(u)\|\ \mathrm{d}u$$

Remarque 272. Si $s(t)$ est une abscisse curviligne sur Γ, alors $L(\gamma) = s(b) - s(a)$.

Exercice 24-1

Calculer la longeur de l'astroïde :

$$x(t) = a\cos^3 t \quad y(t) = a\sin^3 t \quad t \in [0,2\pi]$$

Exercice 24-2
Calculer la longueur d'un arc de parabole
$$y = ax^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Exercice 24-3
Calculer la longueur de la cardioïde
$$\rho = a(1+\cos\theta), \theta \in [0,2\pi]$$

Exercice 24-4
Calculer la longueur d'une ellipse
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
On tombe sur une *intégrale elliptique* que l'on ne sait pas calculer. Que vaut cette intégrale si $a = b$?

24.1.3 Courbure

Théorème 24.2 : **Théorème de relèvement**

1. Soit $g : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \\ t & \longmapsto & g(t) \end{array} \right.$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle I. Il existe une fonction $\theta : I \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $\forall t \in I$, $g(t) = e^{i\theta(t)}$.
2. Si $\overrightarrow{F}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et si $k \geq 2$ alors, il existe une fonction α de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I telle que, pour tout t de I,
$$\overrightarrow{T}(t) = \cos\alpha(t)\overrightarrow{e_1} + \sin\alpha(t)\overrightarrow{e_2}.$$
On a alors les relations $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\alpha$.

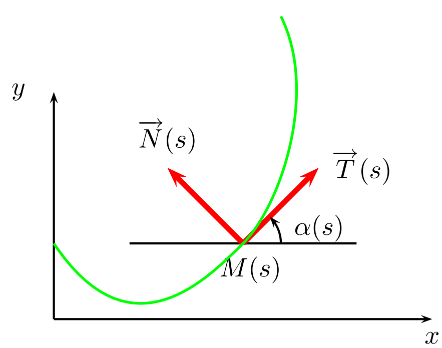


Fig. 24.2 – *L'angle α*

Définition 24.6 : **Courbure**
On définit la courbure d'un arc $(I,\overrightarrow{F})$ au point $M(s)$ par
$$\boxed{c(s) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}}$$
où s est une abscisse curviligne. Si $c \neq 0$, l'inverse de la courbure au point $M(s)$, $r = \dfrac{1}{c}$ est appelé rayon de courbure de l'arc au point $M(s)$.

Théorème 24.3 : **Formules de Frenet**
Pour un arc paramétré $\gamma = (I, \overrightarrow{F})$ de classe $\mathcal{C}^2$,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = c\overrightarrow{N},\ \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s} = -c\overrightarrow{T}}$$

24.1.4 Calcul pratique de la courbure

1. Pour un arc paramétré $\gamma = (I, \overrightarrow{F})$, avec $\overrightarrow{F}(t)\left|\begin{array}{l} x(t) \\ y(t)\end{array}\right.$:

   (a) Rectification :
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|\overrightarrow{F'}(t)\|$$

   (b)
$$c = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}$$

   (c)
$$\tan\alpha = \frac{y'}{x'}$$

   que l'on essaie de mettre sous la forme $\tan f(t)$;

   (d) sinon on dérive :
$$(1+\tan^2\alpha)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{y''x' - y'x''}{x'^2}$$

   (e) Expression finale de la courbure (ne pas l'apprendre par coeur) :
$$c(t) = \frac{\left[\overrightarrow{F'}(t), \overrightarrow{F''}(t)\right]}{\|\overrightarrow{F'}(t)\|^3} = \frac{\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t)\end{vmatrix}}{\left(x'^2(t) + y'^2(t)\right)^{3/2}}$$

2. Pour une courbe polaire $\rho = \rho(\theta)$:

   (a) Rectification :
$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}$$

   (b) L'angle α :
   Si V désigne l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{u}(\theta)$ et le vecteur tangente unitaire $\overrightarrow{T(\theta)}$,
$$\alpha = \theta + V$$

   De la relation

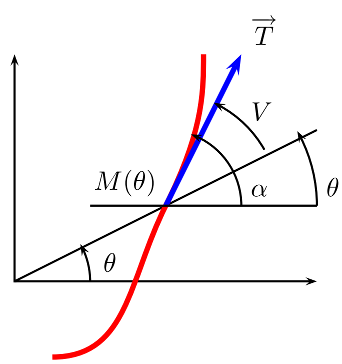


Fig. 24.3 – $\alpha = \theta + V$

$$\tan V(\theta) = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$$

que l'on essaie de mettre sous la forme $\tan g(\theta)$. Sinon, en dérivant on trouve $\dfrac{dV}{d\theta}$, et alors

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta}$$

(c) Courbure :

$$c(\theta) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{d\theta} \times \frac{1}{\frac{ds}{d\theta}}$$

(d) Expression finale de la courbure au point $M(\theta)$ (ne pas l'apprendre par coeur) :

$$c(\theta) = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}$$

3. Pour une courbe $y = f(x)$:
   (a) Rectification :

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'^2(x)}$$

   (b) L'angle α :

$$\tan \alpha(x) = y'(x)$$

   (c) Courbure :

$$c(x) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dx} \times \frac{dx}{ds}$$

   (d) Expression finale de la courbure au point $M(x)$ (ne pas l'apprendre par coeur) :

$$c(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'^2(x))^{3/2}}$$

Exercice 24-5

Calculer la courbure en un point régulier de l'astroïde

$$x(t) = a\cos^3 t, \quad y(t) = a\sin^3 t$$

Exercice 24-6

Calculer la courbure en un point de la cardioïde

$$\rho = a(1 + \cos\theta)$$

et de la spirale logarithmique

$$\rho = ae^{m\theta}$$

Exercice 24-7

a) On considère la chaînette d'équation $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$. Déterminer la longueur d'un arc de la chaînette entre (0,1) et $(l, a \operatorname{ch} l)$.
b) Déterminer le rayon de courbure en un point de la chaînette. Où est-il minimal ?

THÉORÈME 24.4 : **Calcul des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet**
On pose $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ on a alors

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t} = v\overrightarrow{T}, \quad \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{N}}$$

24.2 Centre de courbure

DÉFINITION 24.7 : **Centre de courbure** On appelle *centre de courbure* en un point M d'un arc paramétré Γ, le point I défini par

$$\boxed{I = M + r.\overrightarrow{N}}$$

où r est le rayon de courbure au point M et $\overrightarrow{N}$ le vecteur tangente unitaire au point M. On appelle *cercle de courbure*, le cercle de centre I et de rayon r. On montre que c'est le cercle qui « colle » le mieux à la courbe au point M.

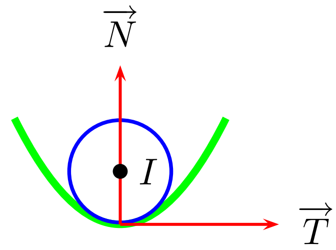


FIG. 24.4 – *Centre de courbure*

Pour calculer en pratique le centre de courbure, on commence par exprimer le vecteur tangente unitaire au point M :

$$\overrightarrow{T} = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}s} = \left| \begin{matrix} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \end{matrix} \right. = \left| \begin{matrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{matrix} \right.$$

d'où l'on déduit l'expression du vecteur normale unitaire au point M :

$$\overrightarrow{N} = \left| \begin{matrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{matrix} \right. = \left| \begin{matrix} -\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \end{matrix} \right.$$

Par conséquent, en notant $I\left| \begin{matrix} x_I \\ y_I \end{matrix} \right.$ et puisque $r = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha}$, on tire :

$$\begin{cases} x_I = x_M - \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha} \times \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = x_M - \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha} \times \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ y_I = y_M + \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha} \times \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = y_M + \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha} \times \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

Il suffit donc d'exprimer $\tan\alpha = \dfrac{dx/dt}{dy/dt}$ et de dériver pour trouver $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$ et de reporter dans les formules précédentes pour obtenir les coordonnées du point I.

Exercice 24-8

On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation

$$(\mathcal{P}) : y^2 = 2px \quad (p > 0)$$

Soit $M\left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$ un point de cette parabole. On note N l'intersection de la normale en M à la parabole avec l'axe (Ox). Soit $\mathcal{D}$ la parallèle à la tangente à la parabole au point M passant par le point N. On note Q l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ avec la parallèle à (Ox) passant par M. Montrer que le centre de courbure I au point M et le point Q ont même abscisse.

Chapitre 25

Applications affines

25.1 Points-vecteurs

Dans ce chapitre, on considère les espaces vectoriels $E = \mathbb{R}^2$ ou $E = \mathbb{R}^3$. Les éléments de E seront appelés indifféremment points *ou* vecteurs.

- A deux points $A,B \in E$, on fait correspondre un vecteur noté $\overrightarrow{AB} = B - A$.
- A un point A et un vecteur $\overrightarrow{x}$, on fait correspondre le point noté $A + \overrightarrow{x}$.

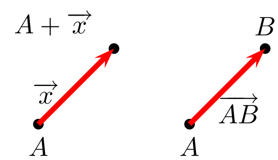


FIG. 25.1 – *Points-vecteurs*

On a alors les propriétés suivantes :

1. $\forall M \in E, \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E, M + (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = (M + \overrightarrow{x}) + \overrightarrow{y}$;
2. $\forall (M,P) \in E^2, \exists! \overrightarrow{x} \in E$, tq $P = M + \overrightarrow{x}$, $(\overrightarrow{x} = P - M)$;
3. $\forall (M,P) \in E^2, \forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2, M + \overrightarrow{x} = M + \overrightarrow{y} \Rightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$ $M + \overrightarrow{x} = P + \overrightarrow{x} \Rightarrow M = P$;
4. Relation de Chasles : $\forall (A,B,C) \in E^3$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

25.2 Sous espaces affines

DÉFINITION 25.1 : **Sous-espace affine**
On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de E est un *sous-espace affine* de E si il existe un point M_F de E et un sous-espace vectoriel F de E tel que

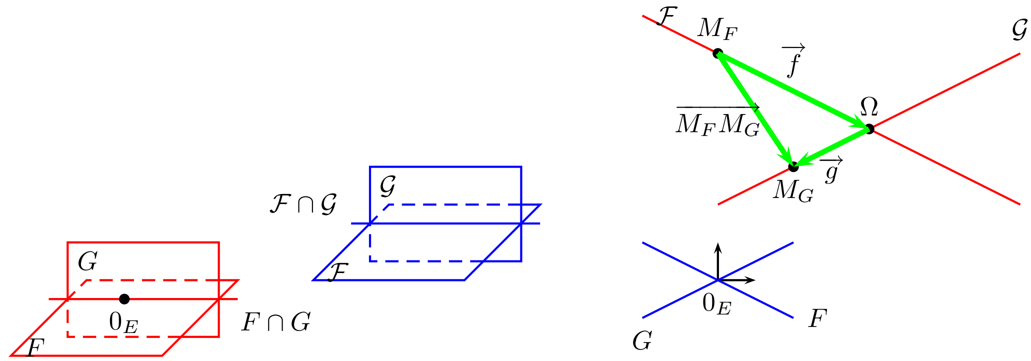
$$\mathcal{F} = \{M_F + \overrightarrow{f} \mid \overrightarrow{f} \in F\}$$

On note alors $\mathcal{F} = M_F + F$. On dit que :

- le sev F est la *direction* du sous-espace affine $\mathcal{F}$;
- la dimension de F est la *dimension* du sous-espace affine $\mathcal{F}$;
- une base de F sera appelée ensemble de vecteurs directeurs de $\mathcal{F}$.

LEMME 25.1 :
Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de direction F, alors pour tout point $M \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = M + F$.

DÉFINITION 25.2 : **Sous-espaces affines parallèles**
On dit que le sous-espace affine $\mathcal{G}$ de direction G est *parallèle* au sous-espace affine $\mathcal{F}$ de direction F lorsque $G \subset F$.



(a) Sous-espaces affines parallèles

(b) Sous-espaces affines supplémentaires dans le plan

FIG. 25.2 – *Intersection de sous-espaces affines*

Remarque 273. Dans $\mathbb{R}^3$, une droite peut être parallèle à un plan, mais il est incorrect de dire qu'un plan est parallèle à une droite.

THÉORÈME 25.2 : **Intersection de sous-espaces affines**
Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de directions F et G. Si l'intersection $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ n'est pas vide, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction le sous-espace vectoriel $F \cap G$.

PROPOSITION 25.3 : **Intersection de deux sous-espaces affines de directions supplémentaires**
Soient deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de directions F et G, avec

$$E = F \oplus G$$

Alors leur intersection est un singleton : $\exists \Omega \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ tel que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{\Omega\}$.

25.3 Barycentres

THÉORÈME 25.4 : **Fonction de Leibniz**
On considère un système de points de E $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$, et n réels $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$. On forme le *système de points pondérés* :

$$S = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

On appelle *poids du système pondéré*, le réel $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. On considère alors la fonction vectorielle :

$$\overrightarrow{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ G & \mapsto & \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} \end{array} \right.$$

– Si $\alpha = 0$, la fonction $\overrightarrow{F}$ est constante ;
– Si $\alpha \neq 0$, il existe un unique point $G \in E$ tel que $\overrightarrow{F}(G) = 0$. Cet unique point s'appelle le *barycentre* du système pondéré de points S. Pour un point $\Omega \in E$ quelconque, on a

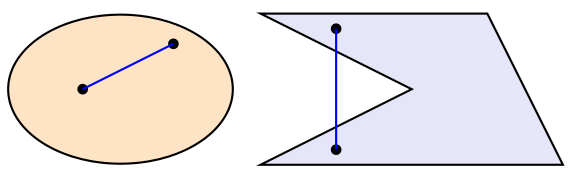
$$G = \Omega + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{\Omega A_i}$$

Théorème 25.5 : Associativité des barycentres
Soit
$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_p & A_{p+1} & \dots & A_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_p & \alpha_{p+1} & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$
un système pondéré de points de barycentre G. On suppose que
$$\beta_1 = \alpha_1 + \dots + \alpha_p \neq 0 \text{ et } \beta_2 = \alpha_{p+1} + \dots + \alpha_n \neq 0$$
Si G_1 est le barycentre de $\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_p \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_p \end{pmatrix}$ et si G_2 est le barycentre de $\begin{pmatrix} A_{p+1} & \dots & A_n \\ \alpha_{p+1} & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$, alors G est le barycentre de $\begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$.

Remarque 274. On appelle *isobarycentre* des points $(A_1,\dots,A_n)$, le barycentre du système pondéré
$$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}$$

Définition 25.3 : Segment
On note $[A,B]$ (segment AB) l'ensemble des barycentres :
$$[A,B] = \{\text{Bar}\begin{pmatrix} A & B \\ t & (1-t) \end{pmatrix} \ ; \ t \in [0,1]\}$$
On définit le *milieu* d'un segment $[A,B]$ comme étant l'isobarycentre $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 1/2 & 1/2 \end{smallmatrix}\right)$ des points A et B.

Définition 25.4 : Partie convexe
Soit une partie $\mathcal{C}$ de l'espace E. On dit que cette partie est *convexe* si et seulement si $\forall (A,B) \in \mathcal{C}^2$, $[A,B] \subset \mathcal{C}$.



(a) Partie convexe

(b) Partie non convexe

Fig. 25.3 – *Parties convexes*

25.4 Applications affines

On considère une application $f : E \mapsto E$, et on veut qu'elle conserve le parallélisme ainsi que les barycentres, c'est à dire que :

1. Si (A,C,A',C') sont quatre points tels que les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles, on veut que les droites $\big(f(A)f(C)\big)$ et $\big(f(A')f(C')\big)$ soient parallèles ;
2. Pour tout système pondéré $\begin{pmatrix} A & C \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$, de barycentre B, on veut que le barycentre du système $\begin{pmatrix} f(A) & f(C) \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$ soit le point $f(B)$.

On montre qu'une telle application doit être de la forme suivante :

Définition 25.5 : Application affine
Si E et E' sont deux espaces vectoriels, $f : E \to E'$ est une application affine si et seulement si $\exists L_f \in \mathcal{L}(E,E')$ telle que
$$\forall (A,\overrightarrow{x}) \in E^2, \quad f(A+\overrightarrow{x}) = f(A) + L_f(\overrightarrow{x})$$
L'application linéaire L_f est appelée *application linéaire associée* à l'application affine f. Elle est unique. L'ensemble des applications affines est noté $\mathcal{A}(E,E')$, et $\mathcal{A}(E)$ lorsque $E = E'$.

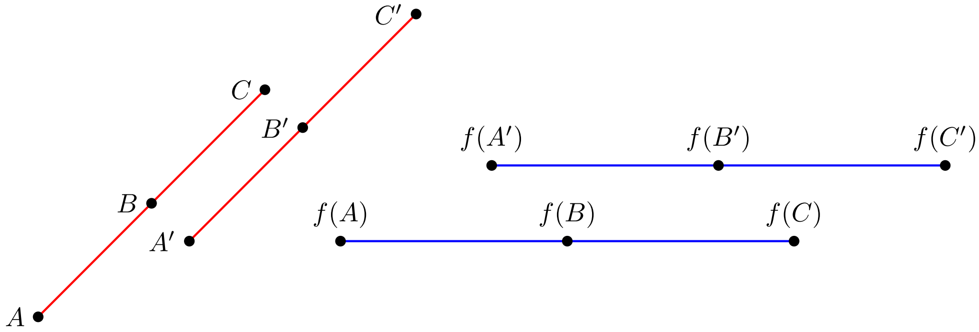


FIG. 25.4 – *Une application affine conserve le parallélisme et les barycentres*

Remarque 275.

1. Si f est une application affine, alors
$$\forall (A,B) \in E, \quad \overrightarrow{f(A)f(B)} = L_f(\overrightarrow{AB})$$
2. Si f est une application affine, l'application linéaire associée est définie de la façon suivante :
$$\forall \overrightarrow{x} \in E, \quad L_f(\overrightarrow{x}) = f(x) - f(0)$$

THÉORÈME 25.6 : **Une application affine conserve le parallélisme**
Soit $f : E \mapsto E'$ une application affine.

1. Si $\mathcal{F} = M_F + F$ est un sous-espace affine de E, alors $f(\mathcal{F}) = f(M_F) + L_f(F)$: c'est un sous-espace affine de E'.
2. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux sous-espaces affines de E, $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G} \Rightarrow f(\mathcal{F}) \parallel f(\mathcal{G})$.

THÉORÈME 25.7 : **Une application affine conserve les barycentres**
Soit $f : E \mapsto E'$ une application affine. Soit $S = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ un système pondéré de points de E de poids non-nul. Si G est le barycentre du système pondéré S, alors le point $f(G)$ est le barycentre du système pondéré $S' = \begin{pmatrix} f(A_1) & \dots & f(A_n) \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$.

THÉORÈME 25.8 : **Expression matricielle d'une application affine.**
Soient deux espaces vectoriels réels E et E'. Soit $\mathcal{R} = (\Omega, b)$ un repère cartésien de E et $\mathcal{R}' = (\Omega', b')$ un repère cartésien de E', et $f : E \mapsto E'$ une application affine de partie linéaire L_f. Si X est la matrice des coordonnées d'un point A dans le repère $\mathcal{R}$ et X' la matrice des coordonnées du point $f(A)$ dans le repère $\mathcal{R}'$, si L est la matrice de l'application linéaire L_f dans les deux bases b et b' et si T est la matrice des coordonnées du point $f(\Omega)$ dans le repère $\mathcal{R}'$, alors :
$$X' = Z + LX$$

Remarque 276. Dans $\mathbb{R}^2$, si $M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$ et $f(M)\left|\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}\right.$, les formules d'une application affine sont de la forme :
$$\begin{cases} X & = \alpha + ax + by \\ Y & = \beta + cx + dy \end{cases}$$

THÉORÈME 25.9 : **Caractérisation des isomorphismes affines par leur partie linéaire**

1. Si $f : E \mapsto E'$ et $g : E' \mapsto E''$ sont deux applications affines, alors $g \circ f$ est une application affine de partie linéaire $L_g \circ L_f$;
2. (f est bijective) $\iff$ (L_f est un isomorphisme) ;
3. Si $f : E \mapsto E'$ est une application affine bijective, alors f^{-1} est une application affine de partie linéaire $L_{f^{-1}} = (L_f)^{-1}$.

DÉFINITION 25.6 : **Isomorphisme affine, automorphisme affine**

1. Si une application affine $f \in \mathcal{A}(E,E')$ est bijective, on dit que c'est un isomorphisme affine.
2. Si $E = E'$, on parlera d'automorphisme affine, l'ensemble des automorphismes affines est un groupe noté $(\mathcal{GA}(E), \circ)$, appelé *groupe affine* de E.

Définition 25.7 : Translations
Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de E on définit la translation $\tau_{\overrightarrow{u}}$ de vecteur $\overrightarrow{u}$: c'est l'application

$$\tau_{\overrightarrow{u}} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \mapsto & M + \overrightarrow{u} \end{array} \right.$$

Une translation est une application affine de partie linéaire id_E.

Théorème 25.10 : Groupe des translations

1. Une application affine de E vers E est une translation si et seulement si sa partie linéaire est l'identité.
2. L'ensemble $\mathcal{T}(E)$ des translations est un sous-groupe du groupe affine $(\mathcal{GA}(E), \circ)$.
3. $\tau_{\overrightarrow{u}}^{-1} = \tau_{-\overrightarrow{u}}$.

Définition 25.8 : Homothétie
On dit qu'une application affine est une homothétie affine si et seulement sa partie linéaire est égale à $\alpha\,\mathrm{id}$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

Théorème 25.11 : Groupe des homothéties-translations

1. Une homothétie affine possède un unique point fixe $\Omega \in E$ (centre de l'homothétie) et

$$\forall M \in E, \quad \overrightarrow{\Omega f(M)} = \alpha \overrightarrow{\Omega M}$$

2. L'ensemble des homothéties-translations $\mathcal{HT}(E)$ est un sous-groupe du groupe affine $(\mathcal{GA}(E), \circ)$.

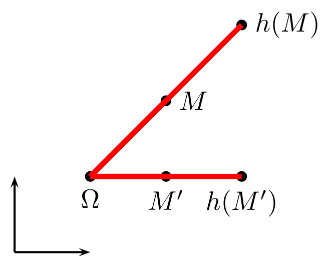


Fig. 25.5 – *Homothétie affine*

Exercice 25-1
Soit h une homothétie de centre Ω et de rapport $\alpha \neq 0,1$. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{x}$. Déterminer la nature des applications $t \circ h$ et $h \circ t$.

Lemme 25.12 : Points fixes d'une application affine
Soit une application affine $f : E \mapsto E$. On note

$$\mathrm{Fix}(f) = \{M \in E \mid f(M) = M\}$$

l'ensemble des points fixes de f. Alors lorsque $\mathrm{Fix}(f)$ n'est pas vide, c'est un sous-espace affine de E de direction $\mathrm{Ker}(L_f - \mathrm{id})$.

Théorème 25.13 : Factorisation d'une application affine
Soit une application affine $f : E \mapsto E$, et un point $\Omega \in E$. Alors il existe une translation t et une application affine g tels que $f = t \circ g$, avec Ω qui est un point fixe de l'application affine g : $g(\Omega) = \Omega$.

25.5 Isométries affines

On considère un espace euclidien, muni d'un produit scalaire noté $(. \mid .)$ et de la norme euclidienne associée notée $\|.\|$. Étant donnés deux points $(A,B) \in E^2$, on définit la *distance* entre ces points par :

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

DÉFINITION 25.9 : **Isométrie affine**
Soit $f : E \mapsto E$ une application. On dit que c'est une *isométrie affine* lorsqu'elle conserve les distances :

$$\forall (A,B) \in E^2, \quad d\big(f(A),f(B)\big) = d(A,B)$$

THÉORÈME 25.14 : **Caractérisation des isométries**
Une application f est une isométrie si et seulement si f est affine et sa partie linéaire L_f est un endomorphisme orthogonal.

DÉFINITION 25.10 : **Réflexion**
On appelle *réflexion* une symétrie affine orthogonale par rapport à un hyperplan affine (droite dans le plan, plan dans l'espace). C'est une isométrie affine

Remarque 277. Etant donnés deux points A,B; il existe une unique réflexion s telle que $s(A) = B$ et $s(B) = A$.

Exercice 25-2

Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni du repère canonique. Écrire l'expression analytique de la réflexion échangeant les points $A\begin{vmatrix}1\\2\\0\end{vmatrix}$ et $B\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}$.

Exercice 25-3

Déterminer l'expression analytique de la réflexion par rapport au plan

$$\mathcal{P} : x + y - z = 1$$

DÉFINITION 25.11 : **Déplacement**
On dit qu'une isométrie affine est un *déplacement* lorsque sa partie linéaire est une isométrie vectorielle directe : $L_f \in SO(E)$.

THÉORÈME 25.15 : **Classification des déplacements du plan**
Soit $f : E_2 \mapsto E_2$ un déplacement, alors

1. Si $L_f = \mathrm{id}$, f est une translation ;
2. Si $L_f \neq \mathrm{id}$, L_f est une rotation vectorielle r_θ et f est une rotation affine qui possède un unique point fixe Ω. Alors

$$\forall M \in E_2, \quad f(M) = \Omega + r_\theta(\overrightarrow{\Omega M})$$

   On dit que f est la *rotation affine* de centre Ω et d'angle θ.

THÉORÈME 25.16 : **Classification des déplacements de l'espace**
Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ un déplacement de l'espace E_3. On note $\mathrm{Fix}(f)$ l'ensemble des points invariants par f :

$$\mathrm{Fix}(f) = \{M \in E_3 \mid f(M) = M\}$$

1. $L_f = \mathrm{id}$: f est une translation ;
2. $L_f \neq \mathrm{id}$, alors L_f est une rotation vectorielle d'axe $D = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{d})$ et d'angle θ ;
   (a) Si $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$ alors $\mathrm{Fix}(f)$ est une droite affine $\mathcal{D}$ de direction la droite vectorielle D. On dit que f est une rotation affine d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ,
   (b) Si $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$, alors f est la composée d'une rotation d'axe $\mathcal{D}$ (droite de direction D) et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u} \in D$. On dit que f est un *vissage* d'axe $\mathcal{D}$, d'angle θ et de vecteur $\overrightarrow{u}$.

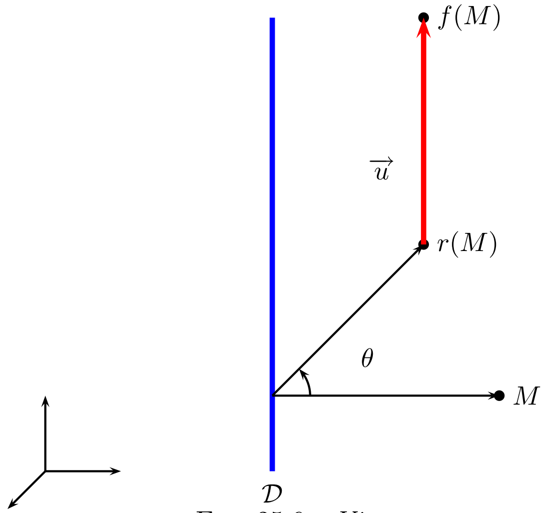


FIG. 25.6 – *Vissage*

Remarque 278. On détermine l'axe $\mathcal{D}$ d'un vissage f par la condition :

$$\mathcal{D} = \{M \in E \mid \overrightarrow{Mf(M)} \in D\}$$

Exercice 25-4

Reconnaître l'application affine donnée par

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -z+1 \\ -x \\ y-2 \end{vmatrix}$$

25.6 Similitudes

DÉFINITION 25.12 : **Similitude**
On appelle *similitude* une application $f : E \mapsto E$ telle que $\forall (A,B) \in E^2$, $d(f(A),f(B)) = kd(A,B)$ où $k \in \mathbb{R}^\star$. Le réel k s'appelle le *rapport* de la similitude.

Remarque 279. Une homothétie affine est une similitude, une isométrie affine est une similitude de rapport 1.

Remarque 280. On montre que f est une similitude de rapport k si et seulement si f est une application affine de partie linéaire L_f vérifiant :

$$\forall \overrightarrow{x} \in E, \|L_f(\overrightarrow{x})\| = k\|\overrightarrow{x}\|$$

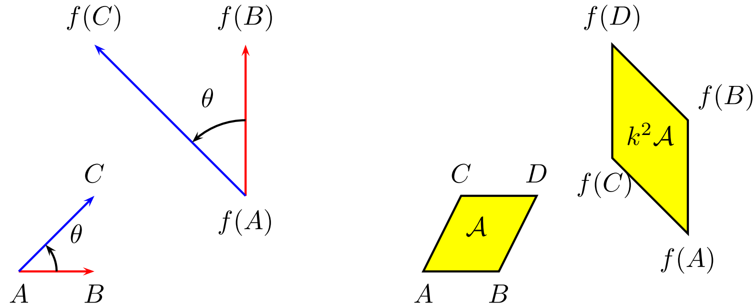
c'est à dire que $L_f = ku$ avec $u \in \mathrm{O}(E)$.

PROPOSITION 25.17 : **Groupe des similitudes**
L'ensemble des similitudes forme un sous-groupe du groupe affine.

DÉFINITION 25.13 : **Similitude directe**
On dit qu'une similitude f est directe (resp. indirecte) si $\det(L_f) > 0$ (resp. $\det(L_f) < 0$). L'ensemble des similitudes directes forme un sous-groupe du groupe des similitudes.

THÉORÈME 25.18 : **Propriétés des similitudes directes**
Soit une similitude directe du plan $\mathcal{E}_2$. Alors :

1. f conserve les angles orientés : Pour trois points (A,B,C) de $\mathcal{E}_2$ avec $A \neq B$, $A \neq C$, l'angle $\measuredangle\big(\overrightarrow{f(A)f(B)},\overrightarrow{f(A)f(C)}\big) = \measuredangle\big(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\big)$.
2. f multiplie les aires par k^2 : Si $(ABCD)$ est un parallélogramme, $\mathcal{A}(f(A)f(B)f(C)f(D)) = k^2\mathcal{A}(ABCD)$.



(a) Conservation des angles

(b) Multiplication des aires par k^2

FIG. 25.7 – *Similitudes directes*

THÉORÈME 25.19 : **Classification des similitudes directes du plan**
Soit une similitude directe du plan $\mathcal{E}_2$ de rapport k.

1. Si $k = 1$, alors f est une isométrie affine (translation ou rotation).
2. Si $k \neq 1$, f possède un unique point fixe Ω et il existe une rotation affine $r_{\Omega,\theta}$ de centre Ω, d'angle θ et une homothétie affine de centre Ω et de rapport k telles que

$$f = h_{\Omega,k} \circ r_{\Omega,\theta} = r_{\Omega,\theta} \circ h_{\Omega,k}$$

PROPOSITION 25.20 : **Représentation complexe d'une similitude directe**
En identifiant le plan avec $\mathbb{C}$, une similitude directe de rapport k et d'angle θ correspond à une application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & az + b \end{cases}$$

où $a = ke^{i\theta}$ et $b \in \mathbb{C}$.

COROLLAIRE 25.21 :
Étant donnés deux segments du plan, $[A,B]$ et $[C,D]$, il existe une unique similitude directe f telle que $f(A) = C$ et $f(B) = D$.

Table des figures

Index

G

H

I

J

L

M

N

O

P

R