Cours de Mathématiques Supérieures

Jonathan Protzenko

2005-2006

Table des matières

PARTIE I

DIVERS DE DÉBUT D'ANNÉE

I.1 Manipulation des nombres complexes

Pour les nombres complexes $z = x + iy, z \in \mathbb{C}$, on a les relations utiles suivantes : $\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $\Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$, $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$, et surtout : $|z|^2 = z\bar{z}$.

Les formules incontournables : $1 + e^{i\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ mais aussi $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

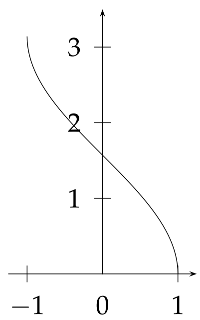
$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z \pm z'| \leqslant |z| + |z'| \qquad (1)$$

En plus de l'inégalité triangulaire[1](1), on a la formule de Moivre (2), qui permet de linéariser les polynômes trigonométriques : en utilisant les formules trigonométriques standard, puis en utilisant $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$, on a, classiquement : $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ et $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

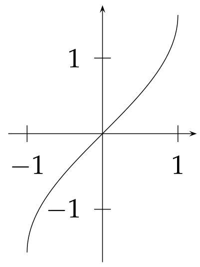
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad (2)$$

L'équation $z^n = 1$ admet exactement n solutions : les racines n-ièmes de l'unité. $z^n = 1 \Leftrightarrow z \in \{\exp(2ik\pi/n), k \in [\![0, n-1]\!]\}$. [2] Pour $n \geqslant 2$, leur somme vaut 0 : $1 + j + j^2 = 0$, $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On note : $\{\exp(2ik\pi/n), k \in [\![0, n-1]\!]\} = \mathbb{U}_n$. $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un groupe abélien.[3]

I.2 Fonctions trigonométriques inverses



La fonction Arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ est bijective. Sa dérivée vaut $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.



La fonction Arcsin : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est bijective, impaire. Sa dérivée vaut $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

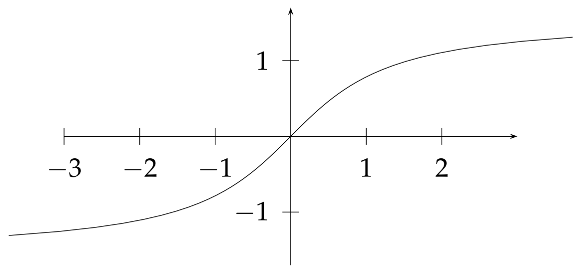
En effet, on a le résultat $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{(f' \circ f^{-1})(y)}$ si $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, f^{-1} n'est pas dérivable en y sinon.

[1] et des utiles $|\Re(z)| \leqslant |z|$ et $|\Im(z)| \leqslant |z|$

[2] Pour le degré 2, il est possible d'identifier en écrivant que $(x+iy)^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{X^2+Y^2} \\ x^2 - y^2 = X \\ 2xy = Y \end{cases}$

[3] Penser aux isomorphismes de groupe : en superposant la table de $(\mathbb{U}_n, \times)$ et celle d'un autre groupe potentiel, on prouve la structure de groupe de ce dernier

On a également $\forall\, x \in [-1, 1]$, $\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1/x) = \text{signe}(x) \times \frac{\pi}{2}$.



La fonction Arctan : $\mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est bijective, impaire. Sa dérivée vaut $\frac{1}{1+x^2}$.

I.3 Géométrie complexe

$\vec{w}$ et $\vec{w'}$ sont colinéaires si et seulement si $z \times \bar{z'} \in \mathbb{R}$. $\vec{w} \perp \vec{w'} \iff z \times \bar{z'} \in i\mathbb{R}$. $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto az + b \end{array}$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ est une similitude directe.

- une translation si $a = 1$
- si $a \neq 1$, la composée commutative de h et g i.e. $f = h \circ g$ où h est l'homothétie de rapport $|a|$ et g la rotation de centre z' avec $z' = f(z')$ et d'angle $\arg(a)$.

$(\mathscr{S}, \circ)$ est le groupe non abélien des similitudes directes.

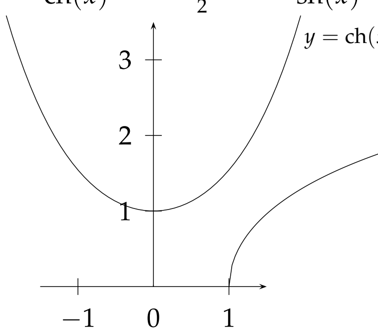
I.4 Suites complexes

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite bornée si : $\exists\ m \in \mathbb{R}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|u_n| < M$. Elle est dite convergente de limite λ si $\lim_{n\longrightarrow\infty} |u_n - \lambda| = 0 \iff \lim \Re(u_n) = \Re(\lambda)$ et $\lim \Im(u_n) = \Im(\lambda)$. Pour une suite géométrique $u_n = k^n$, $k \in \mathbb{C}$, si $|k| < 1, u_n \longrightarrow 0$, si $|k| > 1, u_n \longrightarrow \infty$, et si $|k| = 1$, alors si $k = 1$ $u_n \longrightarrow 0$, sinon u_n diverge.

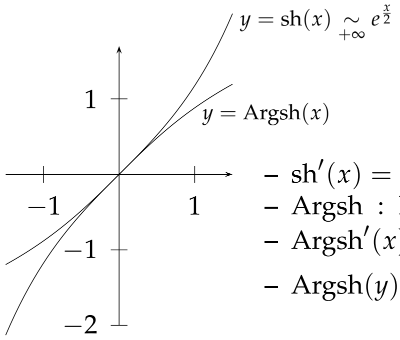
I.5 Fonctions hyperboliques

Toute fonction s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire, en l'occurence $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$, et d'une fonction impaire, $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$. On appelle cosinus hyperbolique la partie paire de l'exponentielle et sinus hyperbolique la partie impaire.

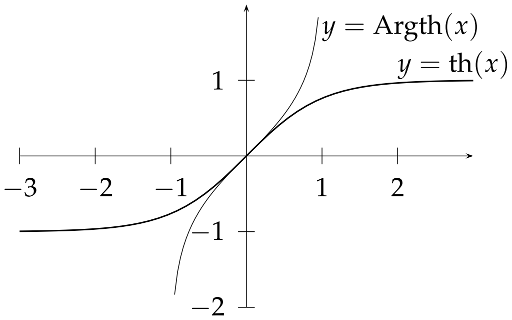
$\text{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $\text{sh}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$



- $\text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$
- $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$
- Argch : $[1, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$
- $\text{Argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $\text{Argch}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$



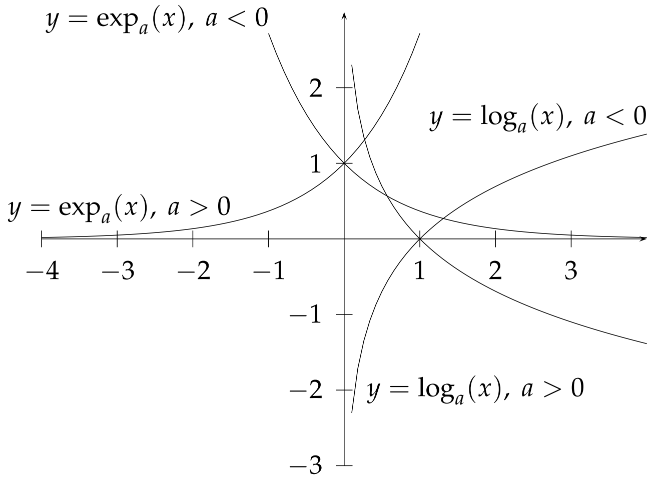
- $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$
- $\mathrm{Argsh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
- $\mathrm{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- $\mathrm{Argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$



- $\mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$
- $\mathrm{Argth} :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$
- $\mathrm{Argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$
- $\mathrm{Argth}(y) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|$

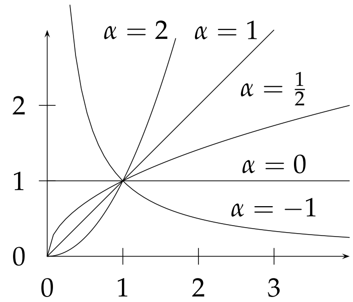
I.6 Fonctions exponentielles

- On définit l'exponentielle en base a par $\exp_a : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto a^x = e^{x \ln a} \end{array}$. En particulier, $(a^x)' = \ln a \times a^x$.
- Le logarithme en base a est défini par $\forall a > 0, a \neq 1, \log_a : \begin{array}{l}]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \end{array}$.[4]



On a également la fonction « puissance d'exposant α » définie par $f_\alpha : \begin{array}{l}]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[\\ x \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \end{array}$

[4] Trivial mais pratique : $\left\{ \begin{array}{l} \forall a > 0, a \neq 1 \\ \forall b > 0, b \neq 1 \end{array} \right., \forall x > 0, \log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$



I.7 Équations différentielles du premier ordre

La solution générale de l'équation $y' = a(x)y$ avec $a \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$[5] est $x \longmapsto \lambda \exp(\mathrm{A}(x))$ où A est une primitive de $a(x)$ sur l'intervalle I considéré, et λ un réel ou un complexe déterminé par les conditions initiales.[6]

La solution de l'équation $y' = a(x)y + b(x)$ est la somme de la solution de l'équation homogène $y' = a(x)y$ et d'une solution particulière (à trouver sous la forme d'un polynôme, puis identifier, ou bien un éclair de génie, etc.). De manière différente, la méthode de variation de la constante permet de poser $y = \lambda(x)\exp(\mathrm{A}(x))$. Les termes se simplifient pour trouver $\lambda(x)$, qui redonnera après intégration à la fois la solution générale et la solution particulière (constante d'intégration).

En effet, la solution au problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$ est unique.

Pour une approximation des solutions, on pourra définir la suite $y_{k+1} = y_k + k(a(x_k)y_k + b(x_k))$, en partant de $y = y_0$.

On a aussi les équations fonctionnelles : $f(x+y) = f(x) \times f(y)$, qui se résolvent en fixant l'une des variables puis en prenant la valeur en 0 par exemple. L'équation sus-citée admet $x \mapsto 0$ et $x \mapsto \exp(\alpha x)$ comme solutions.

I.8 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Les équations homogènes (sans second membre) de la forme

$$ay'' + by' + c = 0 \tag{3}$$

se voient associer une équation caractéristique, en r : $ar^2 + br + c = 0$. Si les racines sont au nombre de deux (on est dans $\mathbb{C}$), les solutions de (3) sont sous la forme $x \mapsto \lambda \exp(\omega_1 x) + \nu \exp(\omega_2 x)$ où λ et ν sont des constantes déterminées par les conditions initiales. S'il n'y a qu'une seule racine à l'équation caractérisque, les solutions de (3) sont sous la forme $x \mapsto (\lambda x + \nu)\exp(\omega_0 x)$. Lorsqu'on passe dans $\mathbb{R}$, il suffit de prendre la partie réelle des solutions pour retrouver les solutions réelles. Seul le cas où les racines sont imaginaires change : les solutions sont alors sous la forme $x \mapsto e^{\alpha x}(\lambda\cos(\beta x) + \nu\sin(\beta x))$ avec $\omega_1 = \alpha + i\beta$ (racine de l'équation caractéristique).

Quelques équations classiques : pour $y'' + \omega_0^2 y = 0$, la solution est $x \mapsto A\cos(\omega_0 x + \phi)$[7] Pour $y'' - \omega_0^2 y = 0$, la solution est $x \mapsto \lambda\,\mathrm{ch}(\omega_0 x) + \nu\,\mathrm{sh}(\omega_0 x)$.

[5] a doit être continue sur l'intervalle considéré

[6] Les solutions d'une équation différentielle linéaire sont stables par combinaison linéaire (c'est un espace vectoriel)

[7] qui est bien évidemment une autre présentation de $\mu\cos(\omega_0 x) + \nu\sin(\omega_0 x)$.

Lorsque le second membre n'est plus constant, et qu'il est sous la forme $e^{\alpha x} \times P(x)$ où P est un polynôme, il faut sommer la solution générale (cf. supra) et une solution particulière sous la forme $e^{\alpha x} \times Q(x)$ avec :

- si α est racine double de l'équation caractéristique, $Q''(x) = P(x)/a$
- si α est racine simple, Q est à identifier en tant que polynôme, avec $\deg Q = \deg P + 1$.
- si α n'est pas racine, Q est à identifier en tant que polynôme, avec $\deg Q = \deg P$.

On notera que pour un second membre constitué d'une somme de $e^{\alpha_i x} \times P_i(x)$, les solutions se superposent. La solution au problème de Cauchy $\begin{cases} ay'' + by' + cy = \exp(\alpha x)P(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_1) = y_1 \end{cases}$ est unique.

Partie II
Théorie des ensembles

II.1 Groupes et sous-groupes

$(G, *)$ est un groupe si

- $*$ est une loi de composition interne dans G ($* : G^2 \to G$)
- $*$ est associative ($(x * y) * z = x * (y * z)$).
- $*$ admet un élément neutre dans G i.e. $\exists\ e \in G,\ \forall\ x \in G,\ e * x = x * e = x$. Un tel élément neutre est unique.
- tout élément de G admet un symétrique dans G, i.e. $\forall\ x \in G,\ \exists\ x' \in G,\ x * x' = x' * x = e$. Si $(G, *)$ est un groupe, alors ce symétrique x^{-1} est unique.

Si de plus $*$ est commutative (i.e. $x * y = y * x$), on dit que le groupe est commutatif ou abélien.

$(H, *)$ est un sous-groupe s'il vérifie l'une des trois caractérisations équivalentes suivantes :

- $\forall\ (x, y) \in H^2,\ x * y \in H$, $(H, *)$ est un groupe, et $H \neq \varnothing$
- $\forall\ (x, y) \in H^2,\ x * y \in H, \forall\ x \in H,\ x^{-1} \in H$, et $H \neq \varnothing$
- $\forall\ (x, y) \in H^2,\ x * y^{-1} \in H$, et $H \neq \varnothing$

II.2 Anneaux et sous-anneaux

$(A, +, \times)$ est un anneau si :

- $(A, +)$ est un groupe abélien
- $\times$ est associative
- $\times$ est doublement distributive par rapport à $+$
- A possède un élément neutre 1_A pour la loi $\times$

Si de plus $\times$ est commutative, on dit que A est un anneau commutatif. Si enfin $\forall (x, y) \in A^2,\ xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$, on dit que l'anneau est intègre.

$(B, +, \times)$ est un sous-anneau de A si :

- $1_A \in B$
- $x - y \in B$
- $x \times y \in B$

Un idéal I de l'anneau A est un sous groupe $(I, +)$ de $(A, +)$ stable par la multplication par un élément de A i.e. $\forall a \in A,\ \forall i \in I,\ a \times i \in I$.

II.3 Corps et sous-corps

Un corps est un anneau dans lequel tout élément admet un inverse par $\times$ i.e. $(C, +, \times)$ est un corps si $\forall x \in C,\ \exists\ x^{-1} \in C \setminus \{0_A\}\ ,\ x \times x^{-1} = 1_C$.

Un sous-corps est un sous-anneau dans lequel tout élément est inversible selon la loi $\times$.

II.4 Algèbre

$(E, +, \times, .)$ est une K-algèbre si

- $(E, +, .)$ est un K-espace vectoriel
- $(E, +, \times)$ est un anneau
- $\forall \alpha \in K, \forall (x, y) \in E^2, (\alpha.x) \times y = x \times (\alpha.y) = \alpha.(x \times y)$

II.5 Relation d'ordre $\preccurlyeq$

$\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur un ensemble E si :

- elle est réflexive : $\forall x \in E, x \preccurlyeq x$;
- elle est transitive : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z) \Rightarrow x \preccurlyeq z$;
- elle est antisymétrique : $\forall (x, y) \in E^2,\ (x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x) \Rightarrow x = y$.

On dit alors que $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné. Si de plus $\forall (x,y) \in E^2$, $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$, alors E est dit totalement ordonné. L'inclusion est par exemple une relation d'ordre.

II.6 Relation d'équivalence

C'est une relation d'ordre où l'antisymétrie a été remplacée par de la symétrie (moins restrictive donc) : $\forall (x,y) \in E^2$, $x \preccurlyeq y \Rightarrow y \preccurlyeq x$.

Partie III

Géométrie dans le plan et dans l'espace

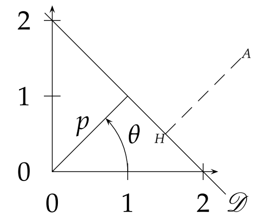
III.1 Arcs paramétrés

Un arc paramétré est défini par $f : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto (x(t),y(t)) \end{array}$. $f(I)$ est le support de l'arc. Si en un point le vecteur tangent $(x'(t_0), y'(t_0))$ est défini (i.e. différent de $(0,0)$), alors le point est régulier. Dans le cas contraire, il est singulier (cf. les développements limités pour une étude plus détaillée). La solution «simple» consiste à étudier $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$.

D'un point de vue complexe, $\vec{u}.\vec{v} = \Re(z\bar{z}') = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u},\vec{v})$ (bilinéaire symétrique), et $\det(\vec{u},\vec{v}) = \Im(z\bar{z}') = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin(\vec{u},\vec{v})$ (bilinéaire antisymétrique).

L'équation d'une droite ainsi définie est $\mathscr{D} \big/ \cos\theta x + \sin\theta y - p = 0$. En polaire : $\rho(\theta) = \frac{p}{\cos(\theta-\theta_0)}$. Équation cartésienne : $ax + by + c = 0$.

La distance du point A à la droite $\mathscr{D}$ est donnée par $\mathrm{d}(A,\mathscr{D}) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.



III.2 Étude des branches infinies

Pour les cas usuels, les méthodes d'étude suivantes sont à appliquer :

- Si $\lim_{t\to t_0}(x(t),y(t)) = (a, +\infty)$: asymptote verticale $x = a$.
- Si $\lim_{t\to t_0}(x(t),y(t)) = (+\infty, b)$: asymptote horizontale $y = b$.

Et pour les cas où $\lim_{t\to t_0}(x(t),y(t)) = (\infty,\infty)$, il faut procéder de la manière suivante :

- Si $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, on a une branche parabolique de direction (Ox). Exemple : $x \mapsto \ln x$.
- Si $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = +\infty$, on a une branche parabolique de direction (Oy). Exemple : $x \mapsto \exp x$.
- Si $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = a$, $a \in \mathbb{R}$, deux cas sont à distinguer.
  - Si $\lim_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = b$, $b \in \mathbb{R}$, alors la droite $x \mapsto ax + b$ est asymptote.
  - Si $\lim_{t\to t_0} y(t) - ax(t) = +\infty$ alors la courbe est de *direction* asymptote $x \mapsto ax$.

III.3 Cinématique

Pour deux arcs f_1 et f_2, on a $(f_1.f_2)' = f_1'.f_2 + f_1.f_2'$, $\det(f_1,f_2)' = \det(f_1',f_2) + \det(f_1,f_2')$ et $\|f_1\|' = \frac{f_1.f_1'}{\|f_1\|}$.

On déduit notamment de la dernière formule que si $\vec{v}(t).\vec{a}(t) = 0$, alors le mouvement est uniforme[8]. Le mouvement est dit à accélération centrale de centre A s'il existe $\alpha : I \to \mathbb{R}$ tel que $\vec{a}(t) = \alpha(t)\overrightarrow{AM}(t) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}(t), \vec{v}(t)) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$.

[8] car alors $\|\vec{v}(t)\|' = 0$

III.4 Courbes polaires

On définit la base polaire par $\begin{cases} \vec{u}(\theta) = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath} \\ \vec{v}(\theta) = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath} \end{cases}$. [9]

Le paramétrage polaire est $\overrightarrow{OM}(\theta) = \rho(\theta)\vec{u}(\theta)$. Le seul point susceptible d'être singulier est l'origine.

$\tan(\vec{u}(\theta), \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(\theta)}{\mathrm{d}\theta}) = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$. Si $\rho'(\theta) = 0$, les deux vecteurs sont perpendiculaires. Enfin, si un point passe par l'origine en $\theta = \theta_0$, alors la tangente en ce point est $\vec{u}(\theta_0)$.

Pour les branches infinies, si $\lim_{\theta\to+\infty} \rho(\theta) = +\infty$, alors c'est une branche en spirale. Si $\lim_{\theta\to\theta_0} \rho(\theta) = +\infty$, il y a deux cas :

– si $\rho(\theta)\sin(\theta-\theta_0) \xrightarrow[\theta\to\theta_0]{} l$, $l \in \mathbb{R}$, on a une asymptote d'équation $Y = l$ dans $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$.
– si $\rho(\theta)\sin(\theta-\theta_0) \xrightarrow[\theta\to\theta_0]{} +\infty$, alors la courbe présente une branche parabolique de direction (Ox) dans le repère polaire.

III.5 Cercles

Soit $\mathscr{C}$ un cercle. $\mathscr{C} = \left\{M \in \mathscr{P} \middle/ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \vec{0}\right\}$. [10]

Soit $\alpha \in [0, \pi[$. On pose $\Gamma_\alpha = \left\{M \in \mathscr{P} \middle/ (MA, MB) \equiv 0 \pmod{\pi}\right\}$. $\Gamma_0 = (AB)\backslash\{A, B\}$. Γ_α est le cercle de centre Ω situé sur la médiatrice de $[AB]$ et tel que $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv 2\alpha \pmod{\pi}$, passant par A et B mais privé de A, B.

L'équation d'un cercle en polaire, *passant par l'origine*, de centre Ω tel que $\overrightarrow{O\Omega} = \rho_0\vec{u}(\theta_0)$ est : $\mathscr{C} \big/ \rho(\theta) = 2\rho_0\cos(\theta-\theta_0)$.

III.6 Plans et sphères dans l'espace

$d(A, \mathscr{P}) = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. L'écart angulaire entre deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ est $\mathrm{Arccos}(\frac{|\vec{n}.\vec{n'}|}{\|\vec{n}\|\|\vec{n'}\|})$.

Une sphère $\mathscr{S}$ est définie par $\mathscr{S} = \left\{M \in \mathscr{E} \middle/ \Omega M = R\right\} = \left\{M \in \mathscr{E} \middle/ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0\right\}$. L'intersection d'un plan et d'une sphère est un cercle : son centre se trouve avec la distance de Ω à ce plan, et son rayon se trouve à l'aide d'un triangle rectangle judicieusement placé.

On introduit les coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^{+*} \times [0, \pi] \times [0, 2\pi[$. Ainsi, $\theta = \theta_0$ est l'équation d'un cône, soit en cartésien : $\tan^2\theta_0 z^2 = x^2 + y^2$. On a également les coordonnées cylindriques, avec $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$.

III.7 Côniques (approche cartésienne)

Toute équation cartésienne du type $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ est l'équation d'une *cônique*. On peut éliminer le terme en xy en effectuant une rotation de repère d'angle θ tel que $B\cos 2\theta + (C-A)\sin 2\theta = 0$ [11]. On introduit alors le discriminant d'un polynôme du second degré en deux variables $\Delta = B^2 - 4AC$. La tangente en un point de coordonnées (x_0, y_0) à une courbe de ce type est donnée par la règle du dédoublement des termes : $T \big/ axx_0 + b\frac{xy_0+x_0y}{2} + cyy_0 + d\frac{x+x_0}{2} + e\frac{y+y_0}{2} + f = 0$.

a. L'ellipse

Lorsque $\Delta < 0$, on obtient l'ensemble vide, un point, ou une ellipse[12] caractérisée par une équation du type $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$, avec une éventuelle translation de repère en plus[13]. Si $a > b$, alors a est le demi grand-axe, et b le demi petit-axe. On peut alors affirmer que l'ellipse est l'image par l'affinité orthogonale de rapport b/a du cercle de rayon a (resp. de rapport a/b de rayon b).

L'ellipse admet un paramétrage : $(x(t), y(t)) = (a\cos t, b\sin t), t \in [0, 2\pi[$[14].

b. La parabole

Lorsque $\Delta = 0$, on obtient l'ensemble vide, une droite, deux droites parallèles, ou une parabole, d'équation $Y^2 = 2pX$. $|p|$ est appelé le *paramètre* de la parabole. Un paramétrage classique est $(x(t), y(t)) = (\frac{t^2}{2p}, t), t \in \mathbb{R}$.

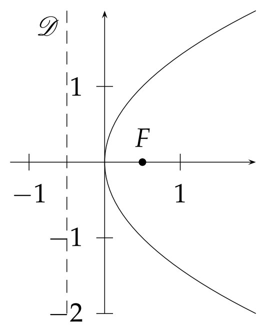
c. L'hyperbole

Lorsque $\Delta > 0$, on a au choix, deux droites sécantes, ou une hyperbole d'équation réduite $(\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2 = 1$. L'hyperbole est constituée de deux parties non connexes. Il y a donc deux paramétrages : $(x(t), y(t)) = (a\,\mathrm{ch}\,t, b\,\mathrm{sh}\,t)$, $t \in \mathbb{R}$ et $(x(t), y(t)) = (-a\,\mathrm{ch}\,t, b\,\mathrm{sh}\,t)$, $t \in \mathbb{R}$ et l'hyperbole est dite équilatère lorsque $a = b$. Toute hyperbole admet pour équation $xy = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ dans un repère lié à ses asymptôtes. *Très* utile : pour trouver les asymptotes de l'hyperbole, on enlève le zéro soit : $(\frac{x}{a})^2 - (\frac{y}{b})^2 = 0$.

III.8 Côniques (approche par les lignes de niveaux)

On cherche les ensembles $\Gamma_e = \left\{M \in \mathscr{P} \middle/ \frac{MF}{d(M, \mathscr{D})} = e\right\}$.

a. La parabole



Son *excentricité* e vaut 1. C'est une parabole de paramètre $p = d(F, \mathscr{D})$. $\mathscr{D}$ est appelée la directrice et F est appelé le foyer de la parabole. Il existe un repère orthonormal (d'axe des ordonnées $\mathscr{D}$) dans lequel la parabole a pour équation $Y^2 = 2pX$. Alors $\mathscr{D} \big/ x = -\frac{p}{2}$ et $F(\frac{p}{2}, 0)$.

[9] $\vec{v}(\theta) = \frac{d\vec{u}(\theta)}{d\theta}$

[10] On définit au passage l'angle de droites $(\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2) = (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \bmod [\pi]$.

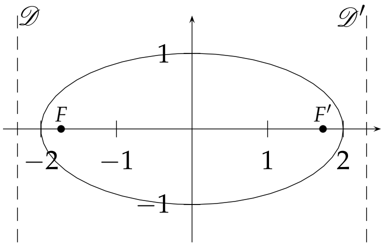
[11] Alors, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

[12] un cercle si $a = b$

[13] faire apparaître des débuts de carrés, puis diviser par le bon coefficient pour avoir 1 à droite

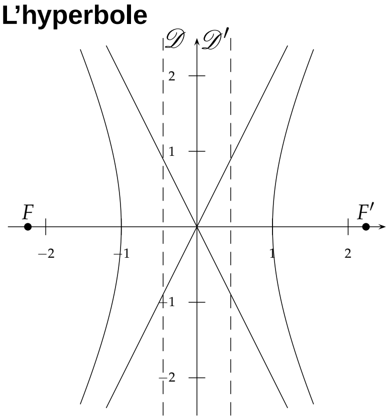
[14] Si la cônique d'équation $P(x, y) = 0$ admet un centre de symétrie (hyperbole ou ellipse donc), alors les coordonnées du centre sont telles que $(\frac{\partial P}{\partial x}(x, y), \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)) = (0, 0)$, et ce indépendamment du repère.

b. L'ellipse



Son excentricité est inférieure à un. On pose $c^2 = a^2 - b^2, c > 0$ (si a est le demi grand-axe). Alors : $e = \frac{c}{a}$, $F(-c, 0)$ et $F'(c, 0)$ et $\mathscr{D} \Big/ x = \frac{a^2}{c}$, $\mathscr{D}' \Big/ x = \frac{-a^2}{c}$. [15]

c. L'hyperbole



Son excentricité est supérieure à un. On pose $c^2 = a^2 + b^2, c > 0$. Alors : $e = \frac{c}{a}$, $F(-c, 0)$ et $F'(c, 0)$[16] et $\mathscr{D} \Big/ x = \frac{a^2}{c}$, $\mathscr{D}' \Big/ x = \frac{-a^2}{c}$. [17]

d. En polaire

Pour un foyer situé en O, origine du repère, et une directrice donnée $\mathscr{D} \Big/ x = k$[18], la cônique correspondante a pour équation $\rho = \frac{ek}{1+e\cos\theta}$. La tangente en un point de paramètre θ_0 est : $\rho = \frac{ek}{\cos(\theta-\theta_0)+e\cos\theta}$.

III.9 Côniques (définition bifocale)

L'ensemble $\Gamma = \left\{ M \in \mathscr{P} \Big/ MF + MF' = 2a \right\}$ est l'ellipse de foyers F et F' et de demi grand-axe a. L'ensemble $\Gamma = \left\{ M \in \mathscr{P} \Big/ |MF - MF'| = 2a \right\}$ est l'hyperbole de foyers F et F' et de distance entre les deux sommets $2a$.

III.10 Produit vectoriel

Soit $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \in \mathscr{W}^2$, non colinéaires[19]. $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ est tel que :

- $(OC) \perp (OAB)$
- $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est une base directe
- $\|\overrightarrow{OC}\| = \|\overrightarrow{OA}\| \|\overrightarrow{OB}\| \sin(\widehat{AOB})$

$\wedge$ est le produit vectoriel, antisymétrique, bilinéaire. On le note traditionnellement, pour $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} x & x' & \vec{\imath} \\ y & y' & \vec{\jmath} \\ z & z' & \vec{k} \end{vmatrix}$. Inteprétation : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$. $\frac{1}{2}\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'aire du triangle construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Dans l'espace, la distance d'un point à une droite est donnée par $\mathrm{d}(M, \mathscr{D}) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$, pour tout point $A \in \mathscr{D}$. La perpendiculaire commune à deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ a pour vecteur directeur $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ et est l'intersection des plans $\mathscr{P}$ formé par $\vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{u}'$ et $\mathscr{P}'$ formé par $\vec{u}'$ et $\vec{u} \wedge \vec{u}'$. Enfin, la projection orthogonale d'un cercle contenu dans un plan $\mathscr{P}$ sur un plan $\mathscr{Q}$ est une ellipse d'excentricité $\sin\theta$ avec $\theta = (\widehat{\mathscr{P}, \mathscr{Q}}) \in]0, \pi/2[$.

III.11 Produit mixte

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w})$. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires. Le produit mixte est inchangé par permutation circulaire. Il est trilinéaire antisymétrique.

$\left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right|$ est le volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. $\frac{1}{6}\left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right|$ est le volume du tétraèdre construit sur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

[15] On pourra remarquer que dans le cas où $c = 0 \Rightarrow a = b$, c'est à dire lorsque l'ellipse est un cercle, $e = 0$

[16] FF' est appelée la distance focale

[17] On pourra remarquer que l'hyperbole coupe l'axe des abscisses lorsque $x = a$. En effet, une fois tracées les tangentes obliques, il est utile de chercher les points d'intersection avec les axes pour ne pas se tromper dans le tracé.

[18] ou encore $\rho = \frac{k}{\cos\theta}$

[19] Si les deux vecteurs sont colinéaires, leur produit vectoriel est nul

PARTIE IV ARITHMÉTIQUE

IV.1 Nombres entiers

$\mathbb{N}$ satisfait à l'axiome suivant : si A est une partie de $\mathbb{N}$ telle que $\begin{cases} 0 \in A \\ \forall n \in \mathbb{N}, (n \in A \Rightarrow n+1 \in A) \end{cases}$ alors $A = \mathbb{N}$.

Pour une partie A non vide d'un ensemble $(E, \preccurlyeq)$,
- Si : $\exists M \in E, \forall a \in A, a \preccurlyeq M$, alors M est un majorant de A.
- Si : $\exists m \in E, \forall a \in A, m \preccurlyeq a$, alors m est un minorant de A.
- Si G est un majorant de A et si $G \in A$, alors G est appelé *plus grand élément de A*, et est noté $\max(A)$.
- Si g est un minorant de A et si $g \in A$, alors g est appelé *plus petit élément de A*, et est noté $\min(A)$.

Dans l'ensemble totalement ordonné $(\mathbb{N}, \leqslant)$: toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément et toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Pour $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ réalisant la division euclidienne de a par b. q est appelé le quotient et r le reste. $\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r < |b| \end{cases}$.

Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les ensembles $a\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}$.

Tout entier relatif admet une décomposition unique comme produit de facteurs premiers : $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_n^{\alpha_n}$. Pour $m \in \mathbb{Z}$, soit m est premier, soit m admet un diviseur premier $p \leqslant \sqrt{|m|}$.

IV.2 PGCD et PPCM

a. PGCD

$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, donc $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$. d est appelé le pgcd de a et b, on le note $d = a \wedge b$.

Quelques propriétés :
- $a \wedge b = b \wedge a$
- $(ab) \wedge (ac) = |a|(b \wedge c)$
- Si $a = bq + r$, alors $a \wedge b = b \wedge r$ (d'où l'algorithme d'Euclide pour trouver le pgcd)
- Le théorème de Bézout affirme que, pour a et b premiers entre eux (i.e. $a \wedge b = 1$), $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2,\ au + bv = 1$.
- Pour $\delta = a \wedge b, \exists (a', b') \in \mathbb{Z}^2, \begin{cases} a = \delta a' \\ b = \delta b' \\ a' \wedge b' = 1 \end{cases}$.
- Si $a \wedge b_1 = a \wedge b_2 = \cdots = a \wedge b_n = 1$, alors $a \wedge (b_1 \times b_2 \times \cdots \times b_n) = 1$.
- $a \wedge b = 1 \Rightarrow a^p \wedge b^n = 1,\ \forall (p,n) \in \mathbb{N}^2$.
- Théorème de Gauss : $\begin{cases} a|(bc) \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow a|c$.
- $\begin{cases} a|b \\ c|b \\ a \wedge c|b \end{cases} \Rightarrow (ac)|b$.

b. PPCM

$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, donc $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = c\mathbb{Z}$. c est appelé le ppcm de a et b, il est noté $c = a \vee b$. *Grosso modo*, les mêmes propriétés s'appliquent que pour le pgcd (ex : $a \vee b = b \vee a$, $(ab) \vee (ac) = |a|(b \vee c)$).

Important : $(a \vee b) \times (a \wedge b) = ab$.

IV.3 Applications

Voir les définitions de cet ouvrage (cf. page 10).

Pour $f \in \mathscr{F}(E,F)$ et $g \in \mathscr{F}(F,G)$, on définit l'application composée de f et g par $\forall x \in E,\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$. $\circ$ est une loi associative (i.e. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$).

Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective. La composée de deux bijections / surjections / injections est une bijection / surjection / injection.

$f \in \mathscr{F}(E,F)$ est une bijection si et seulement si il existe $h \in \mathscr{F}(F,E)$ tel que $\begin{cases} h \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ h = \mathrm{id}_F \end{cases}$. h est notée f^{-1}.

Si l'on note $S(E)$ l'ensemble des bijections de E dans E, alors $(S(E), \circ)$ est le groupe des permutations de E.

Pour un morphisme de groupes $f : (G, *) \to (G', *')$, on note : $\mathrm{im}\, f = f(G)$ et $\ker f = f^{-1}(e') = \left\{ x \in G \middle/ f(x) = e' \right\}$. $\mathrm{im}\, f$ est un sous-groupe de $(G', *')$. $\ker f$ est un sous-groupe de $(G, *)$. f est surjective si et seulement si $\mathrm{im}\, f = G'$. f est injective si et seulement si $\ker f = e$.

IV.4 Ensembles finis, dénombrement

Si $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,q]\!]$ surjective, alors $p \geqslant q$. Si $f : E \to F$ est une bijection et que l'un des deux ensembles est fini, alors $\mathrm{card}\, E = \mathrm{card}\, F$. Si $F \in \mathscr{P}(E)$, alors $\mathrm{card}\, F \leqslant \mathrm{card}\, E$. Si $\mathrm{card}\, F = \mathrm{card}\, E$, alors $F = E$.

Pour deux ensembles finis E et F ayant même cardinal, toute application $f : E \to F$ injective ou surjective est bijective.

$\mathrm{card}\, E \cup F = \mathrm{card}\, E + \mathrm{card}\, F - \mathrm{card}\, E \cap F$. $\mathrm{card}\, E \times F = \mathrm{card}\, E \times \mathrm{card}\, F$. $\mathrm{card}\, \mathscr{F}(E,F) = \mathrm{card}\, F^E = (\mathrm{card}\, F)^{\mathrm{card}\, E}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0,n]\!]$. Le nombre de parties à p élements d'un ensemble de cardinal n est $\binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}$. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$. On en déduit : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$. $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Et enfin, $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

IV.5 Groupe symétrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Toute bijection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est appelée une permutation de $[\![1,n]\!]$. L'ensemble des permutations est noté $\mathfrak{S}_n$ (groupe symétrique de degré n) et $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe, non abélien si $n \geqslant 3$ et de cardinal $n!$.

Soit $n \geqslant 2$. Soit $p \in [\![2,n]\!]$. Un permutation σ de $[\![1,n]\!]$ est appelée un cycle de longueur p s'il existe p entiers distincts $x_1, \ldots, x_p$ de $[\![1,n]\!]$ tels que $\sigma(x_1) = x_2, \sigma(x_2) = x_3, \ldots, \sigma(x_p) = x_1$ et $\forall i \in [\![1,n]\!] \backslash \{x_1, \ldots, x_p\}, \sigma(i) = i$. Un 2-cycle est une *transposition*. Toute permutation de $[\![1,n]\!], n \geqslant 2$ est un produit de transpositions. On dit que les transpositions engendrent le groupe symétrique. Exemple : $(ij) = (1i)(1j)(1i)$.

On appelle inversion de σ tout couple $1 \leqslant i < j \leqslant n$ tel que $\sigma(i) > \sigma(j)$. On appelle signature de σ le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$ où $I(\sigma)$ est le nombre d'inversions de σ. Si $\varepsilon(\sigma) = 1$,

σ est dite paire. Si $\varepsilon(\sigma) = -1$, σ est dite impaire. La signature $\varepsilon : (\mathfrak{S}_n, \circ) \to (\{-1, 1\}, \times)$ est un morphisme de groupes. On en déduit que toute transposition est une permutation impaire et que par conséquent, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^T$ où T est le nombre de transpositions composant σ. [20]

La signature ε est un morphisme de groupes donc $\ker \varepsilon = \left\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \middle/ \varepsilon(\sigma) = 1\right\} = \mathfrak{A}_n$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$. $(\mathfrak{A}_n, \circ)$ est le groupe alterné de degré n. Son cardinal vaut $\frac{n!}{2}$ si $n \geqslant 2$ et 1 sinon.

[20] Un p-cycle peut s'écrire $\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_p \\ x_2 & x_3 & \dots & x_1 \end{pmatrix} = \underbrace{(x_1 x_2)(x_2 x_3) \dots (x_p x_1)}_{p \text{ transpositions}}$. Donc $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$.

Partie V
Vocabulaire relatif aux applications

Un morphisme de groupes f entre $(G, *)$ et $(G, *')$ est tel que $\forall (x, y) \in G^2,\ f(x * y) = f(x) *' f(y)$

Un morphisme d'anneaux f entre $(A, +, \times)$ et $(B, \oplus, \otimes)$ est tel que $\forall (x, y) \in A^2,\ f(x + y) = f(x) \oplus f(y)$ et $f(x \times y) = f(x) \otimes f(y)$ et $f(1_A) = 1_B$.

Un isomorphisme est un morphisme bijectif. Son application réciproque est également un isomorphisme.

Deux groupes isomorphes sont des groupes pour lesquels il existe un isomorphisme permettant de passer de l'un à l'autre.

Une injection $f : E \to F$ est une application pour laquelle tout élement de F admet *au plus* un antécédent par f i.e. $\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (contraposée).

Une surjection $f : E \to F$ est une application pour laquelle tout élement de F admet *au moins* un antécédent par f i.e. $\forall y \in F,\ \exists y \in E,\ f(x) = y$.

Une bijection $f : E \to F$ est une application surjective et injective, i.e. pour laquelle tout élément de F admet exactement un (unique) antécédent par f.

Une application involutive f est telle que $f \circ f = \mathrm{id}$. Elle est automatiquement bijective.

L'image directe d'un ensemble $A \in \mathscr{P}(E)$ par une application $f \in \mathscr{F}(E, F)$ est notée $f(A)$ et vaut $\left\{f(x) \middle/ x \in A\right\}$. $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A,\ f(x) = y$. $A \subset f(f^{-1}(A))$.

L'image réciproque d'un ensemble $B \in \mathscr{P}(F)$ par une application $f \in \mathscr{F}(E, F)$ est notée $f^{-1}(B)$ et vaut $\left\{x \in E \middle/ f(x) \in B\right\}$. $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$. $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est $L(E, F)$. Si $f : E \to F$ est bijective, elle constitue un isomorphisme d'espaces vectoriels[21]

L'ensemble des endomorphismes de E est $L(E) = L(E, E)$.

L'ensemble des automorphismes (endomorphismes bijectifs) de E est $GL(E)$.

L'ensemble des formes linéaires est $L(E, K) = E^*$.

[21] Alors $f^{-1} \in L(F, E)$ bijective.

PARTIE VI

PRÉ-ANALYSE

VI.1 Nombres réels

On définit par récurrence les règles de calcul dans un anneau par $\begin{cases} 0.a = 0_A & \text{et pour } n \in \mathbb{N}, (n+1).a = n.a + a \\ a^0 = 1_A & \text{et pour } n \in \mathbb{N}, a^{n+1} = a^n \times a \end{cases}$.
On en déduit ainsi la formule du binôme de Newton, uniquement valable dans un anneau commutatif : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.(a^k \times b^{n-k})$

$\mathbb{R}$ est défini de manière axiomatique. Il vérifie les axiomes suivants :

- $\mathbb{Q}$ est un sous-corps du corps commutatif $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre total $\leqslant$ prolongeant celle de $\mathbb{Q}$: $\begin{array}{l} \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x \leqslant y \Rightarrow x+z \leqslant y+z \\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x \leqslant y \\ z \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x \times z \leqslant y \times z \end{array}$.
- Axiome de la borne supérieure : toute partie non vide majorée de $(\mathbb{R}, \leqslant)$ admet une borne supérieure [22].
- $\Rightarrow$ propriété d'Archimède : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x \leqslant n$ [23].

On définit de manière unique la partie entière par $\begin{cases} \mathrm{E}(x) \in \mathbb{Z} \\ \mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x)+1 \end{cases}$ [24].

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: entre deux nombres réels, il y a toujours un rationnel.

On définit $|x| = \max(-x, x)$ et $\mathrm{d}(x,y) = |y-x|$. Outre l'inégalité triangulaire, on a :

i) $\mathrm{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$: séparation ;

ii) $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$: symétrie ;

iii) $\mathrm{d}(x,z) \leqslant \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,z)$: inégalité triangulaire.

On dit que d est une distance.

La borne supérieure d'un ensemble E est le plus petit des majorants s'il existe, noté $\sup(E)$ [25]. La borne inférieure d'un ensemble E est le plus grand des minorants s'il existe, noté $\inf(E)$. Si un partie A d'un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$ admet un plus grand élément, alors celui-ci est sa borne supérieure.

On appelle *droite numérique achevée* l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On prolonge la relation d'ordre $\leqslant$ à une relation d'ordre total $\preccurlyeq$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ par : $\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x \leqslant y \\ \forall x \in \overline{\mathbb{R}}, -\infty \preccurlyeq x \preccurlyeq +\infty \end{cases}$.

Toute partie non-vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure (et une borne inférieure). Une intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$ est une partie I de $\overline{\mathbb{R}}$ vérifiant $\forall (x,y) \in I^2, x \preccurlyeq z \preccurlyeq y \Rightarrow z \in I$. Les intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$ sont de quatre types $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$. Ceux de $\mathbb{R}$ sont de onze types.

$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: entre deux nombres réels, il y a toujours un irrationnel.

[22] Ceci n'est pas vrai dans $\mathbb{Q}$: $\left\{ r \in \mathbb{Q}^{+*} \middle/ r^2 < 2 \right\}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$

[23] On dit que $\mathbb{R}$ est archimédien

[24] Reformulation utile : $x - 1 < \mathrm{E}(x) \leqslant x$

[25] Elle peut être caractérisée par $\begin{cases} \forall e \in E, e \leqslant \sup E \\ \forall \varepsilon > 0, \exists e \in E, \sup E - \varepsilon < e \end{cases}$

VI.2 Suites de nombres réels

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite ℓ si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$. Cette limite est unique. Toute suite réelle convergente est bornée. Si une suite réelle converge vers un réel strictement positif, alors elle est minorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif.

On dit que u admet pour limite $+\infty$ si $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n > A$. Théorèmes de comparaison pour trois suites u, v, w réelles :

- $\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant v_n \\ \lim_{n \to +\infty} v_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} u_n = 0.$
- $\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, v_n \leqslant u_n \\ \lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} u_n = +\infty.$
- $\begin{cases} \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \\ \lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = \ell \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \lim_{\infty} u = \ell.$

On a aussi le résultat suivant : si $\begin{cases} \lim_{n \to \infty} u_n = 0 \\ v \text{ bornée} \end{cases}$ alors $\lim_{\infty} uv = 0$.

Tout réel est la limite d'une suite de rationnels, et tout réel est également la limite d'une suite d'irrationnels.

$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times)$ est l'anneau des suites réelles. $\mathscr{S}$ (ensemble des suites convergentes) en est un sous-anneau. $f : \begin{array}{l} \mathscr{S} \to \mathbb{R} \\ u \mapsto \lim u \end{array}$ est un morphisme d'anneaux. Donc $\lim(u +$ [26] $v) = \lim u +$ [27] $\lim v$, etc., etc.. Pour $f : I \to \mathbb{R}$ continue en $\ell \in I$, et si $\lim_{n \to \infty} u_n = \ell$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$, alors $\lim_{no \to \infty} f(u_n) = f(\ell)$. Les formes indéterminées pour les limites sont : « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ », « 1^∞ », « 0^0 ».

Une suite v est extraite de u s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$. Si u converge vers une limite ℓ alors toute suite extraite converge vers cette limite ℓ. Si $u \leqslant v$ et si (*très* important) u et v convergent vers ℓ et ℓ', alors $\ell \leqslant \ell'$.

Toute suite monotone converge dans $\overline{\mathbb{R}}$. Deux suites adjacentes sont définies par : $\begin{cases} u \text{ croissante, } v \text{ décroissante} \\ \lim_{n \to \infty}(u_n - v_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$. Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

Pour une suite de segments emboîtés $I_n = [a_n, b_n]$ avec $a < b$ et $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n \\ \lim_{n \to \infty}(b_n - a_n) = 0 \end{cases}$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est un singleton. Ce résultat permet de prouver le *théorème de Bolzano-Weierstraß* : toute suite bornée admet une suite extraite convergente.

VI.3 Méthodes d'étude des suites récurrentes

Si I est un intervalle stable par une application continue f alors

i) $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ définit de manière unique une suite u.

ii) si u converge vers $\ell \in I$ alors $\ell = f(\ell)$.

iii) si f est croissante sur I alors u est monotone.

[26] addition de suites dans l'anneau des suites réelles$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times)$

[27] addition dans l'anneau des réels $(\mathbb{R}, +, \times)$

Pour une suite arithmétique $u_{n+1} = au_n + b$, on cherche l'éventuelle limite ℓ et $v = u - \tilde{\ell}$ est une suite géométrique. Pour une suite homographique $u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$, on cherche les limites. S'il y en a deux ℓ_1 et ℓ_2 alors $v = \frac{u-\tilde{\ell_1}}{u-\tilde{\ell_2}}$ est géométrique. S'il n'y en a qu'une, $v = \frac{1}{u-\tilde{\ell}}$ est géométrique.

VI.4 Relations de comparaison

Pour deux suites $(u, v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$, on a (notations de Landau) :

- $u = O(v) \Leftrightarrow \exists w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée, $u = v \times w$ à partir d'un certain rang. Ceci équivaut, lorsque v ne s'annule pas à partir d'un certain rang, à $\frac{u}{v}$ bornée.
- $u = o(v) \Leftrightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lim_\infty \varepsilon = 0,\ u = v \times \varepsilon$ à partir d'un certain rang. Ceci équivaut, lorsque v ne s'annule pas à partir d'un certain rang, à $\lim_\infty \frac{u}{v} = 0$. $u = o(v) \Rightarrow u = O(v)$.
- $u \sim v \Leftrightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lim_\infty \varepsilon = 0,\ u = v \times (1 + \varepsilon)$ à partir d'un certain rang. Ceci équivaut, lorsque v ne s'annule pas à partir d'un certain rang, à $\lim_\infty \frac{u}{v} = 1$. $u \sim v \Leftrightarrow u = v + o(v)$[28].

On peut multiplier, diviser lorsque c'est possible, élever à une puissance des équivalents, mais pas les additionner, ni leur appliquer une fonction.

[28] $\sim$ est une relation d'équivalence

PARTIE VII
PRÉ-ALGÈBRE

VII.1 Polynômes

K désigne un corps commutatif ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ traditionnellement). $K^{(\mathbb{N})} = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \middle/ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, a_n = 0\right\}$ (ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang). $(K^{(\mathbb{N})}, +, \times)$ est un anneau où $\times$ est le produit de Cauchy : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \times (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $d_n = \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} a_i b_j = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$. On note ensuite $X = (0, 1, 0, \dots) \in K^{(\mathbb{N})}$ et $X^k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ zéros}}, 1, 0, \dots)$. Pour un polynôme à coefficients dans K : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{(\mathbb{N})}$, on a $a_n = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$. $(K[X], +, \times)$ est l'anneau commutatif des polynômes sur l'indéterminée X. Il est intègre.

a_n est le coefficient dominant du polynôme. S'il vaut un, le polynôme est dit unitaire. On définit le degré d'un polynôme par $\deg P = \begin{cases} \max\left\{n \in \mathbb{N} \middle/ a_n \neq 0\right\} & \text{si } P \neq 0 \\ -\infty & \text{si } P = 0 \end{cases}$[29]. On définit également la *valvation* d'un polynôme par $\operatorname{val} P = \begin{cases} \min\left\{n \in \mathbb{N} \middle/ a_n \neq 0\right\} & \text{si } P \neq 0 \\ +\infty & \text{si } P = 0 \end{cases}$. $\deg P \times Q = \deg P + \deg Q$, $\deg P + Q \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$ ($=$ si $\deg P \neq \deg Q$). Si $\deg P = n$ alors P admet au plus n racines distinctes.

«$|$» est réflexive et transitive dans $K[X]$. $[P|Q \text{ et } Q|P] \Rightarrow [Q = 0 \text{ et } P = 0]$ ou $[Q = \lambda P, \lambda \in \mathbb{R}]$. On dit alors que P et Q sont associés. La division euclidienne d'un polynôme par un autre polynôme existe et est unique. On définit $P(Q) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n Q^n$ où Q est un autre polynôme. Ainsi, $P = P(X)$.

On distingue les polynômes ($K[X]$) des fonctions polynômes ($\mathcal{P}$). L'application $\begin{array}{l} K[X] \to \mathcal{P} \\ P \mapsto \widetilde{P} \end{array}$ est un isomorphisme d'anneaux si K est un sous-corps de $\mathbb{C}$[30]. Si deux fonctions polynômiales $\widetilde{P}$ et $\widetilde{Q}$ de degré n coïncident pour $n+1$ valeurs, alors $P = Q$.

VII.2 Racines de polynômes

Une racine de polynôme a est telle que $\widetilde{P}(a) = 0$, ce qui est équivalent à P divisible par $X - a$. On a alors : si P est de degré n, il admet alors au plus n racines distinctes. Conséquence : si deux polynômes de degré n coïncident sur au moins $n+1$ valeurs, ou encore sur un intervalle de $\mathbb{R}$, ils sont égaux. La méthode de Horner permet de factoriser un polynôme par $(X - \alpha)$: $P(X) = (X - \alpha)(h_4 X^3 + h_3 X^2 + h_2 X^1 +$

[29] 0 représente ici le polynôme nul i.e. l'élément nul de l'anneau des polynômes

[30] On pourra remarquer que tout sous-corps de $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{Q}$

$h_1) + h_0$ [31].

	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
α		$h_4\alpha$	$h_3\alpha$	$h_2\alpha$	$h_1\alpha$
	$\underbrace{a_4}_{h_4}$	$\underbrace{h_4\alpha + a_3}_{h_3}$	$\underbrace{h_3\alpha + a_2}_{h_2}$	$\underbrace{h_2\alpha + a_1}_{h_1}$	$\underbrace{h_1\alpha + a_0}_{h_0}$

On introduit le polynôme dérivé P' par $P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$. $(P \times Q)' = P'Q + PQ'$. On a également la formule de Leibniz : $(P \times Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$. Les formules de Taylor permettent d'exprimer un polynôme en fonction de ses dérivées successives. Taylor en 0 : $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$. Taylor en a : $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.

$\Big[(X-a)^k | P \text{ et } (X-a)^{k+1} \nmid P\Big] \Leftrightarrow P = (X-a)^k Q, Q(a) \neq 0 \Leftrightarrow \Big[P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(k)}(a) \neq 0\Big]$. On dit que a est une racine d'ordre de multiplicité k. Un polynôme est dit scindé s'il possède autant de racines que son degré.

Les formules de Viète, ou «relations coefficients-racines», donnent pour le degré 3, pour $\overset{+}{a}X^3 + \overset{-}{b}X^2 + \overset{+}{c}X + \overset{-}{d}$, $\begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 & = -\frac{b}{a} \\ \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 & = \frac{c}{a} \\ \sigma_3 = x_1x_2x_3 & = -\frac{d}{a} \end{cases}$. Pour un polynôme de dégré 2, on retrouve les classiques $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine complexe (d'Alembert-Gauss). On en déduit que les seuls polynômes irréductibles [32] dans $\mathbb{R}[X]$ sont $aX + b$ et $aX^2 + bX + C, \Delta < 0$. On a le résultat : tout polynôme peut se décomposer en un produit de polynômes irréductibles[33].

VII.3 Arithmétique des polynômes

Les idéaux de l'anneau $(K[X], +, \times)$ sont les ensembles $PK[X]$ avec $P \in K[X]$. $AK[X] + BK[X]$ est un idéal $DK[X]$: D est le PGCD des polynômes A et B. Les règles de manipulation du PGCD de deux polynômes sont globalement les mêmes que pour les entiers. Attention : $(AB) \wedge (AC) = A^*(B \wedge C)$ où A^* est un polynôme unitaire. On également le théorème de Bézout : pour deux polynômes premiers entre eux, $\exists (U,V) \in (K[X])^2, AU + BV = 1$. $AK[X] \cap BK[X]$ est également un idéal $CK[X]$: C est le PPCM des polynômes A et B. Attention, $(A \wedge B) \times (A \vee B) = A^* \times B^*$.

VII.4 Fractions rationnelles

On définit $K(X)$ (corps des fractions rationnelles) comme étant le plus petit corps contenant $K[X]$ comme sous-anneau. $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S} \Leftrightarrow PS = QR$ car $K[X]$ est commutatif. Une fraction rationnelle F possède une écriture irréductible $F = \frac{P_1}{Q_1}$ avec $Q_1 \wedge P_1 = 1$. Pour une fraction irréductible $F = \frac{P}{Q}$, on appelle zéros de F les racines de P et on appelle pôles de F les racines de Q. $\widetilde{F} : \begin{array}{l} K \backslash \{\text{pôles de } Q\} \to K \\ x \mapsto \frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)} \end{array}$ est la fonction rationnelle associée à F.

$\deg F = \deg P - \deg Q \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$. Pour $(F_1, F_2) \in (K(X))^2$, $\deg(F_1 + F_2) \leqslant \max(\deg F_1, \deg F_2)$. Si a est un pôle d'ordre $k \geqslant 1$ de F, alors $F = \underbrace{F_1}_{\text{n'a pas } a \text{ pour pôle}} + \underbrace{\frac{c_1}{X-a} + \cdots + \frac{c_k}{(X-a)^k}}_{\text{partie polaire de } F \text{ relative à } a}$. Pour un pôle simple, $c = \frac{P(a)}{Q'(a)}$. Pour un pôle double, $\begin{cases} c_2 = & (X-a)^2 F\Big|_{X=a} \\ c_1 = & [(X-a)^2 F]'\Big|_{X=a} \end{cases}$.

Théorème de décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$:

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k_i} \frac{c_{ij}}{(X-a_i)^j} \right)$$

E est la partie entière de F définie par $F = E + F_1$ avec $\deg F_1 \leqslant -1$.

---

[31] Si α est une racine de P alors naturellement $h_0 = 0$

[32] i.e. qui ne sont ni constants et qui admettent pour seuls diviseurs 1, eux-mêmes, et leurs associés

[33] Pour décomposer dans $\mathbb{R}$, il faut d'abord décomposer dans $\mathbb{C}$: $P = \lambda(X-a_1)(X-a_2)\ldots(X-a_n)$ puis ensuite trouver les racines conjuguées pour pouvoir multiplier les termes du produit pour faire apparaître des trinômes irréductibles

PARTIE VIII ALGÈBRE

VIII.1 Espaces vectoriels

Un ensemble E est un espace vectoriel sur le corps K si :
- $(E,+)$ est un groupe abélien ;
- $\forall\alpha \in K, \forall(u,v) \in E^2, \alpha.(u+v) = \alpha.u + \alpha.v$;
- $\forall(\alpha,\beta) \in K^2, \forall u \in E, (\alpha+\beta).u = \alpha.u + \beta.u$;
- $\forall(\alpha,\beta) \in K^2, \forall u \in E, \alpha.(\beta.u) = (\alpha\beta).u$;
- $1_k.u = u$.

Un ensemble F est un sous espace vectoriel de $(E,+,.)$ si :
- $F \subset E, F \neq \varnothing$
- $\forall(u,v) \in F^2, u+v \in F$
- $\forall(\alpha,u) \in K \times F, \alpha.u \in F$

Les deux dernières conditions sont équivalentes à $\forall(\alpha,\beta) \in K^2, \forall(u,v) \in E^2, \alpha.u+\beta.v \in F$.

L'intersection d'une famille $(K_i)_{i\in I} = \bigcap_{i\in I} K_i$ de sev de E est encore un sous espace vectoriel de E. L'intersection de tous les sous espaces vectoriels de E contenant un ensemble A est $\mathrm{vect}(A)$, plus petit sous espace vectoriel de E contenant A [34] ; $\mathrm{vect}(A) = \mathrm{CL}(A)$.

Pour F et G sous espaces vectoriels de E, $F+G = \left\{u+v \middle/ u \in F, v \in G\right\} = \mathrm{vect}(F \cup G)$. F et G sous espaces vectoriels de E sont supplémentaires si $\forall x \in E, \exists!(y,z) \in F \times G, x = y+z$ ce qui équivaut à $\begin{cases} E = F+G \\ F \cap G = 0_E \end{cases}$. On note : $E = F \oplus$ [35] G.

Une famille d'éléments $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice de E si $E = \mathrm{vect}(\{x_i / i \in I\})$. Elle est libre si $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \Rightarrow a_1 = \cdots = a_n = 0$[36]. Si elle n'est pas libre, elle est liée[37] : un vecteur s'écrit comme combinaison linéaire des autres[38]. Si $(x_i)_{i\in I}$ est libre et génératrice, on dit que c'est une base de E ce qui équivaut à $\forall x \in E, \exists!(a_1,\ldots,a_n) \in K^n, x = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$. $(a_i)_{i\in I}$ est la famille des coordonnées de x dans la base $(x_i)_{i\in I}$.

VIII.2 Applications linéaires

$f : E \to F$, E et F K-espaces vectoriels est une application linéaire si $\begin{cases} \forall(u,v) \in E^2, f(u+v) = f(u)+f(v) \\ \forall(\alpha,u) \in K \times E, f(\alpha.u) = \alpha.f(u) \end{cases} \Leftrightarrow \forall(\alpha,\beta) \in K^2, \forall(u,v) \in E^2, f(\alpha.u+\beta.v) = \alpha.f(u)+\beta.f(v)$[39]. Exemples : l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ est de la forme $(x,y) \mapsto (ax+by, cx+dy)$; $L(K) = \left\{x \mapsto \alpha.x \middle/ \alpha \in K\right\}$.

Soit $f \in L(E,F)$. Pour un sous espace vectoriel E' de E, $f(E')$ est un sous espace vectoriel de F. Pour un sous espace vectoriel F' de F, $f^{-1}(F')$ est un sous espace vectoriel de E. $\mathrm{im}\, f$ (sous espace vectoriel de F) $= F \Leftrightarrow f$ surjective. $\ker f$ (sous espace vectoriel de E) $= 0_E \Leftrightarrow f$ injective.

La composition d'applications linéaires est linéaire, à gauche et à droite, et $L(E,F)$ est un sous espace vectoriel de $(\mathscr{F}(E,F),+,.)$. $(L(E),+,\circ,.)$ est une K-algèbre, $(GL(E),\circ)$ est le groupe linéaire.

On définit la projection vectorielle sur F parallèlement à G par $p : \begin{array}{l} E = F \oplus G \to E \\ u_F + u_G \mapsto u_F \end{array}$. Une application $p \in L(E)$ telle que $p \circ p = p$ est un projecteur, en l'occurence la projection vectorielle sur $\mathrm{im}\, p$ parallèlement à $\ker p$. On définit la symétrie vectorielle par rapport à F parallèlement à G par $s : \begin{array}{l} E = F \oplus G \to E \\ u_F + u_G \mapsto u_F - u_G \end{array}$. Une application $s \in L(E)$ telle que $s \circ s = \mathrm{id}$ est la symétrie vectorielle par rapport à $\ker(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\ker(s + \mathrm{id}_E)$. On a la relation fort utile : $s = 2p - \mathrm{id}_E$.

VIII.3 Dimension d'un espace vectoriel

Un K-espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. Si $E = \mathrm{vect}(\{x_1,\ldots,x_n\})$ alors toute famille $(y_1,\ldots,y_p)$, avec $p > n$ est liée. Si $E = \mathrm{vect}(\{x_1,\ldots,x_n\})$ et $(y_1,\ldots,y_p)$ famille libre de E (alors $p \leqslant n$), on peut compléter avec des éléments x_i la famille $(y_1,\ldots,y_p)$ pour obtenir une base de E. On en déduit alors que tout K-espace vectoriel de dimension finie admet une base. Toutes les bases ont même cardinal noté $\dim_K E$[40].

Toute famille libre a au plus $n = \dim E$ éléments. Si elle en a n, alors c'est une base de E. Toute famille liée a au moins n éléments. Si elle en a n, alors c'est une base de E.

Pour un sous espace vectoriel F de E, E étant de dimension finie, on a : F est de dimension finie, $\dim F \leqslant \dim E$ et $\dim F = \dim E \Rightarrow F = E$.

Tout sous espace vectoriel F de E admet un supplémentaire G. Alors $E = F \oplus G$ et $\dim E = \dim F + \dim G$. $\dim E \times F = \dim E + \dim F$. $\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$.

VIII.4 Applications linéaires en dimension finie

Si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E, alors $\begin{cases} f(e_1) = u_1 \\ \vdots \\ f(e_n) = u_n \end{cases}, u_i \in F \Rightarrow f \in L(E,F)$ est unique, et $\mathrm{im}\, f = \mathrm{vect}(f(e_1),\ldots,f(e_n))$. f est injective si et seulement si $(f(e_1),\ldots,f(e_n))$ est une base de $\mathrm{im}\, f$. S'il existe un isomorphisme entre deux espaces vectoriels E et F, et que $\dim E = n$, alors $\dim F = n$. Si $f \in L(E,F)$ et $\dim E = \dim F \in \mathbb{N}$, alors f surjective $\Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ bijective.

Formule du rang :

$$\mathrm{rang}\, f = \dim \mathrm{im}\, f = \dim E^{41} - \dim \ker f$$

Un hyperplan vectoriel H de E est un sous espace vectoriel de dimension $n-1$ ($n = \dim E$). Alors, pour $\phi \in E^*$,

[34] Appelé sous espace vectoriel engendré par A

[35] À prononcer « somme directe ».

[36] Par exemple, une famille de polynômes échelonnés est libre dans $(K[X],+,.)$

[37] Toute famille contenant le vecteur nul est liée

[38] On définit ainsi la notion de vecteurs colinéaires : u et v sont colinéaires si (u,v) est liée ce qui équivaut à $\exists\lambda \in K, u = \lambda.v$ ou $v = 0_E$

[39] Pour du vocabulaire, voir page 10.

[40] Dimensions célèbres : $\dim \mathbb{R} = 1$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, $\dim K^n = n$, $\dim K_n[X] = n+1$

[41] Ensemble de départ

$\begin{cases}\phi(x)=0\\ x\in E\end{cases}$ est l'équation d'un hyperplan vectoriel. On dit que le noyau d'une forme linéaire est un hyperplan vectoriel, et réciproquement, tout hyperplan vectoriel est le noyau d'une forme linéaire non nulle. L'intersection de deux hyperplans vectoriels H et H' est un sous espace vectoriel de E de dimension $n-2$.

$\operatorname{rang}(x_1,\dots,x_p) = \dim\operatorname{vect}\{x_1,\dots,x_p\}$ est inchangé si $x_i \leftarrow \lambda x_i + \sum_{\substack{j\\ j\neq i}} \lambda_j x_j$ avec $\lambda \neq 0$. On a alors : une famille triangulaire à coefficients diagonaux est libre. $\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{im} f = \operatorname{rang}(f(e_1),\dots,f(e_n))$.

VIII.5 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3, ac\neq 0$. L'ensemble des suites complexes définies par : $\forall n\in\mathbb{N}, au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n=0$ est un sous espace vectoriel de dimension 2 de $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}},+,.)$. On associe à une telle suite une équation caractéristique $ar^2+br+c=0$.

- Si $\Delta=b^2-4ac\neq 0, \forall n\in\mathbb{N}, u_n=\alpha r_1^n+\beta r_2^n, (\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$.
- Si $\Delta=0, \forall n\in\mathbb{N}, u_n=(\alpha n+\beta)r_0^n$.

Pour les suites réelles, les résultats sont les mêmes, sauf dans le cas où $\Delta<0$: $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\rho^n(a\cos(n\theta)+b\sin(n\theta))$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2, \rho=|r_1|=|r_2|$.

VIII.6 Matrices associées à une application linéaire

Une matrice de type n,p est une application $A : \begin{matrix}[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]\to K\\ (i,j)\mapsto a_{ij}\end{matrix}$ notée $A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$. On définit la matrice d'une application f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ par :

$$M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)=\begin{pmatrix}a_{1,1}&\dots&a_{1,p}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n,1}&\dots&a_{n,p}\end{pmatrix}$$

$\begin{matrix}L(E,F)\to\mathscr{M}_{n,p}(K)\\ f\mapsto M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)\end{matrix}$ est une bijection. Les vecteurs colonnes $x_j=\begin{pmatrix}a_{1,j}\\ \vdots\\ a_{n,j}\end{pmatrix}$ sont les coordonnées de $f(e_j)$ (où $(e_1,\dots,e_n)$ sont les vecteurs de la base $\mathscr{B}$) dans la base $\mathscr{C}$. $(\mathscr{M}_{n,p},+,.)$ est un K-espace vectoriel de dimension $n\times p$, de base $E_{i,j}=(a_{k,l})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant l\leqslant p}}$ avec $a_{k,l}=\delta_{i,k}\times\delta_{l,j}$.

On introduit le produit matriciel ($A=(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B=(b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$) par $A\times B=(c_{ik})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$ avec $c_{ik}=\sum_{j=1}^{p}(a_{ij}b_{jk})$, bilinéaire et associatif. $(\mathscr{M}_{n,p},+,\times,.)$ est une K-algèbre.

On définit la transposée de A par ${}^tA=(a'_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ avec $\forall(j,i)\in[\![1,p]\!]\times[\![1,n]\!], a'_{ji}=a_{ij}$. ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$; ${}^t(AB)={}^tB\times{}^tA$.

VIII.7 Matrices carrées

A est dite symétrique si ${}^tA=A$, antisymétrique si ${}^tA=-A$. Ces deux ensembles sont des sous espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{M}_n(K)$ ($\mathscr{M}_n(K)=\mathscr{S}_n(K)\oplus\mathscr{A}_n(K)$).

- $(\mathscr{D}_n,+,\times,.)$ est une algèbre commutative $\begin{pmatrix}\alpha_1&&0\\ &\ddots&\\ 0&&\alpha_n\end{pmatrix}$
- $(\mathscr{H}_n,+,\times,.)$ est une algèbre commutative $\begin{pmatrix}\lambda&&0\\ &\ddots&\\ 0&&\lambda\end{pmatrix}$
- $(\mathscr{T}_n^+,+,\times,.)$ est une algèbre $\begin{pmatrix}*&&*\\ &\ddots&\\ 0&&*\end{pmatrix}$
- $(\mathscr{T}_n^-,+,\times,.)$ est une algèbre $\begin{pmatrix}*&&0\\ &\ddots&\\ *&&*\end{pmatrix}$

A est inversible si et seulement si A est la matrice associée à une application linéaire bijective. Alors $\exists A'\in\mathscr{M}_n(K), A\times A'=I_n$[42]. $(GL_n(K),\times)$ forme un groupe (ensemble des matrices carrées inversibles). On connaît la forme de l'inverse d'une matrice 2×2 : $A^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\ c&d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}d&-b\\ -c&a\end{pmatrix}$.

VIII.8 Changement de base

$X=P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}X'$ où $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ contient les coordonnées des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$ [43]. Classique : $M'=P^{-1}MP$ ou plus précisément $M_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)=P^{-1}_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$[44]

VIII.9 Gauss

$$\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1&\underline{\quad *\quad\cdots}&0&&0&&0\\ &&&&&1&\underline{\quad *\quad}&\vdots&&\vdots\\ &&&&&&&0&*&\vdots\\ &&&&&&&1&\underline{\qquad}&\vdots\\ &&&\mathbf{0}&&&&&&\vdots\\ &&&&&&&&&0\\ &&&&&&&&&1\end{pmatrix}$$

Toute matrice peut se mettre sous la splendide forme cidessus (avec r colonnes principales, et p colonnes au total), en effectuant tout d'abord une suite d'opérations convenables sur les lignes ($L_i\leftarrow\alpha.L_i+\beta.L_j, \alpha\neq 0$, ou encore $L_i\leftrightarrow L_j$), puis en effectuant le même type d'opérations sur les colonnes[45]. La matrice en échelons obtenue ne dépend pas des opérations effectuées. On peut appliquer en parallèle ces opérations à I_n : lorsque notre matrice devient I_n, I_n est devenue l'inverse de la matrice. Le nombre de colonnes principales correspond à $\dim\operatorname{vect}\{\text{colonnes}\}$, et $\operatorname{vect}(\{\text{colonnes de m̂ indice que les colonnes principales}\}=\operatorname{vect}(\{\text{colonnes}\})$ (les colonnes de même indice que les colonnes principales forment une base).

[42] Utile : $({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$

[43] $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}=M_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)$

[44] Chercher les réels λ pour lesquels $\ker(f-\lambda\,\mathrm{id})$ est non trivial. On obtient alors une nouvelle base, dans laquelle on exprime la matrice de f. Les nouveaux vecteurs sont tels que $f(e_i)=\lambda.e_i$: la matrice de f dans cette nouvelle base est diagonale, on peut facilement l'élever à une puissance et avec les formules de changement de base $A^n=P^{-1}A'^nP$.

[45] Les opérations sur les lignes (resp. colonnes) correspondent à une multiplication à gauche (resp. à droite) par une matrice carrée inversible

On a donc le résultat $\operatorname{rang}(M_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)) = \operatorname{rang} f = \operatorname{rang}(c_1, \dots, c_p) = r$, et également $A \in GL_n(K) \iff \operatorname{rang} A = n$. Le rang d'une matrice est inchangé si on la multiplie à droite ou à gauche par une matrice inversible. $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} {}^tA$.

VIII.10 Systèmes linéaires

$t_a : \begin{array}{l} E \to E \\ u \mapsto a + u \end{array}$ est la translation de vecteur a. Pour F sous espace vectoriel de E, $t_a(F) = a + F$ est le sous-espace affine de E passant par a de direction F. $a + F = b + G \iff F = G$ et $b - a \in F$.

$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$ est l'équation d'un hyperplan affine[46]. Pour deux sous espaces affines $W = a + F$ et $W' = b + G$, $W /\!/ W'$ si $F \subset G$. W et W' *sont* parallèles si $F = G$. $W \cap W' = \varnothing$ ou bien $W \cap W' = b + (F \cap F')$ (i.e. $W \cap W'$ est un sous espace affine de direction $F \cap F'$). Si $E = F \oplus G$, $W \cap W'$ est un singleton. Si $W \cap W' \neq \varnothing$, alors $\dim W \cap W' = \dim W + \dim W' - \dim(F + G)$.

Soit (S) un système linéaire de p équation à n inconnues de rang $r = \operatorname{rang} A$. $\mathscr{S}_H$ (solution du système homogène) est un sous espace vectoriel de K^n de dimension $n - r$ et $\mathscr{S} = \varnothing$ ou $(a_1, \dots, a_n) + \ker f$ est soit vide, soit un sous espace affine de dimension $n - r$. Si $n = p = r$, le système est dit de Cramer et il possède une unique solution.

Méthode : $(S) \iff AX = B$. On définit $\widetilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right)$. On transforme cette matrice en échelons grâce à la méthode du pivot de Gauss, puis le nouveau système $A'X = B'$ est équivalent à (S) et se résout immédiatement.

VIII.11 Applications multilinéaires

Soit $f : E^p \to F$. f est multilinéaire de degré p si $\forall i \in [\![1, p]\!], f_i : \begin{array}{l} E \to F \\ x \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_p) \end{array}$ linéaire. L'ensemble des applications p-linéaires est $L^p(E, F)$, sous espace vectoriel de $(\mathscr{F}(E, F), +, .)$.

Soit $f \in L^p(E, F)$.

- f est symétrique si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p, f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = f(x_1, \dots, x_p)$.
- f est antisymétrique si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p, f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p)$[47].
- f est alternée si $\left[\exists (i, j) \in [\![1, p]\!]^2, \begin{cases} i \neq j \\ x_i = x_j \end{cases} \right] \Rightarrow f(x_1, \dots, x_p) = 0$.

Il y a équivalence entre «alternée» et «antisymétrique» si $1 + 1 \neq 0$. L'ensemble des formes p-linéaires alternées est noté $A^p(E)$, sous espace vectoriel de $(L^p(E, K), +, .)$.

VIII.12 $A^n(E)$ avec $n = \dim E$

Dans une telle situation, $A^n(E)$ est une droite vectorielle engendrée par d_n, où $d_n(\underbrace{e_1, \dots, e_n}_{\text{base}\mathscr{B}}) = 1$ et $d_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \dots x_{\sigma(n)n}$, avec $x_i = x_{1i}e_1 + x_{2i}e_2 + \dots + x_{ni}e_n$. d_n est le déterminant selon la base $\mathscr{B}$. On note : $d_n = \det_{\mathscr{B}}$.

$\det_{\mathscr{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$. Indispensable : $(x_1, \dots, x_n)$ liée $\iff \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$ et $(x_1, \dots, x_n)$ libre $\iff \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

VIII.13 Déterminant d'un endomorphisme

$\det f$ est le scalaire tel que $\det_{\mathscr{B}}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det f . \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$ i.e. $\det f = \det_{\mathscr{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Quelques propriétés : $\det(f \circ g) = \det f \times \det g$, $\det \mathrm{id}_E = 1$, et attention, $\det(\lambda . f) = \lambda^n \det f$. Enfin : $f \in GL(E) \iff \det f \neq 0$, et donc $\det f^{-1} = \frac{1}{\det f}$.

VIII.14 Déterminant d'une matrice carrée

$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \times \dots \times a_{\sigma(n)n} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det f = \det_{\mathrm{can}}(c_1, \dots, c_n)$. Le déterminant d'une matrice triangulaire / identitaire / diagonale est le produit des éléments de la diagonale. Les mêmes propriétés s'appliquent : $\det(M \times M') = \det M \times \det M'$, $\det(M^p) = (\det M) =^p$, $\det(\lambda . M) = \lambda^n \det M$, $M \in GL_n(K) \iff \det M \neq 0$, et alors $\det M^{-1} = \frac{1}{\det M}$. On a de plus le très utile : $\det {}^tM = \det M$.

Pour calculer un déterminant, on utilise les opérations suivantes

- $A \leftarrow {}^tA$ laisse le déterminant inchangé ;
- $L_i \leftarrow \lambda . L_i, \lambda \neq 0$ (le déterminant est alors multiplié par λ) ;
- $L_i \leftarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j . L_j$
- si l'on permute les lignes, le déterminant est multiplié par la signature de la permutation ;
- le déterminant est nul si la famille des vecteurs colonnes (ou lignes) est liée.

$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ où A_{ij} est A privée de sa $i^{\text{ième}}$ ligne de sa $j^{\text{ième}}$ colonne. C'est le développement du déterminant selon la $i^{\text{ième}}$ ligne. $\sum_{i=1} \dots$ est le développement selon la $j^{\text{ième}}$ colonne.

$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$ (déterminant de Vandermonde).

On introduit la comatrice de A : $\operatorname{com} A \left((-1)^{i+j} \det A_{ij} \right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$. L'intérêt est la superbe formule : $A \times {}^t\operatorname{com} A = {}^t\operatorname{com} A \times A = \det A \times I_n$.

Enfin, le déterminant permet de résoudre un système de Cramer : $x_i = \frac{1}{\det A} \times \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

[46] Il y a équivalence avec $\exists f \in L(E, K), H = a + \ker f$

[47] Il suffit de regarder pour une transposition (toute permutation est un produit de transpositions ♡)

PARTIE IX ANALYSE

IX.1 Fonctions convexes

Une application $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est dite convexe si $\forall(a,b) \in I^2, \forall\lambda \in [0,1], f(\lambda.a + (1-\lambda).b) \leqslant \lambda.f(a) + (1-\lambda).f(b)$. Cette application est convexe si et seulement si l'épigraphe[48] de f est convexe[49]. La convexité équivaut à la croissance des pentes des sécantes dont on fixe une extrémité (i.e. $g : \begin{matrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{matrix}$ est croissante). La convexité équivaut encore à f' croissante (si elle existe) ou $f'' > 0$ (même remarque).

La courbe de f présente un point d'inflexion en x_0 (i.e. un changement de courbure) si f'' s'annule en x_0 en changeant de signe. f convexe (et dérivable) $\Rightarrow$ la courbe est au-dessus de toutes ses tangentes.

Inégalité de convexité : $f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$ avec $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

Méthode de Newton (conditions nécessaires) : si $\begin{cases} f(a)f(b) < 0 \\ f' \text{ et } f'' \text{ ne s'annulent pas sur } [a,b] \\ u_0 \in I \text{ et } f(u_0)f''(u_0) > 0 \end{cases}$ alors $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ tend vers α, unique solution de $f(x) = 0$.

IX.2 Fonctions en escalier

L'ensemble des fonctions T-périodiques, bornées, paires et impaires est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}$. On note $\sup_I f = \sup_{x\in I} f(x) = \sup_{\mathbb{R}} f(I)$.

Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. $\sigma = (x_1, \ldots, x_n)$ est une subdivision de $[a,b]$ si $x_1 = a, x_n = b$ et $x_i < x_{i+1}$. Soit $f \in (\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R}))$. σ est une subdvision adaptée à f si $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, f est constante sur $]x_i, x_{i+1}[$. On note : $f \in \mathscr{E}([a,b])$. C'est un sous espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{[a,b]}, +, .)$.

On définit l'intégrale d'une fonction en escalier par $\int_{[a,b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i)$ où λ_i est la valeur prise par f sur $]x_i, x_{i+1}[$. Une telle intégrale ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie.

$\begin{matrix} \mathscr{E}_{[a,b]} \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_{[a,b]} f \end{matrix}$ est une forme linéaire croissante ($f \leqslant g \Rightarrow \int f \leqslant \int g$). Si $(f,g) \in \mathscr{E}^2_{[a,b]}$ diffèrent en un nombre fini de points, leurs intégrales sont égales. $\int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f = \int_{[a,c]} f$.

IX.3 Fonctions lipschitziennes

f est k-lipschitzienne si $\forall(x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$, k-contractante si $k \in]0,1[$. L'ensemble des fonctions lipschitziennes sur I est un sous espace vectoriel de $(\mathbb{R}^I, +, .)$.

IX.4 Limites

f admet b pour limite au point a si : $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, (|x - a| < \delta \text{ et } x \in I) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$ (en supposant que a n'est pas une extrémité de I). Si une telle limite existe, elle est unique. On définit également la limite à droite, la limite à gauche. Pour un point a (dans I), la limite b en a équivaut à la limite à droite et à gauche (valant b). On définit également les limites en $+\infty$, en $-\infty$, vers un réel ou un infini.

$\lim_a f = b, a \in \overline{I} \iff \exists(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[x\to\infty]{} b$. On peut ainsi prouver qu'une fonction f n'a pas de limites de deux manières :

- en trouvant deux suites x et y telles que $\lim_{n\to\infty}(f(x_n)) \neq \lim_{n\to\infty}(f(y_n))$;
- en trouvant une suite z telle que $(f(z_n)_{n\in\mathbb{N}})$ n'a pas de limite.

L'addition, la multiplication, le quotient (s'il existe), la composition (intervalles emboîtés) de limites sont possibles. Si f est bornée au voisinage de a, et que $\lim_a g = 0$, $\lim_a fg = 0$. Si $f \leqslant g$ au voisinage de *a et si f et g ont des limites* alors $\lim_a f \leqslant \lim_a g$. L'encadrement marche aussi.

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ avec $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Si f est croissante, f admet une limite à gauche en b : $\sup_{]a,b[} f$ si f est majorée, $+\infty$ sinon. Si f est décroissante, f admet une limite à droite en a : $\inf_{]a,b[} f$ si f est minorée, $-\infty$ sinon. Et en tout c de $]a,b[$, f admet une limite à gauche et à droite (théorème de la limite monotone).

IX.5 Continuité

Définitions (pour $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in I$) :

- f est continue en a si f admet une limite en a et si elle y est définie $\iff$ f est continue à gauche et à droite $\iff \forall(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a, (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \to f(a)$
- f est continue à gauche si f admet une limite à gauche en a (idem. à droite)

Le produit de f par g continues en a est continu en a, de même pour le quotient (s'il existe), et la composition (si possible). Les fonctions continues en a forment un sous espace vectoriel de $(\mathscr{F}(I,\mathbb{R}), +, .)$. Les fonctions continues sur un intervalle ($\mathscr{C}(I)$) sont les fonctions continues pour tout $a \in I$. On a les mêmes résultats : produit, quotient, et sous espace vectoriel. Important : toute fonction k-lipschitzienne sur I y est continue.

IX.6 Résultats importants

Théorème des valeurs intermédiaires : Si $I = [a,b]$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, alors $\forall y \in [f(a), f(b)], \exists x \in [a,b], y = f(x)$

Image d'un intervalle : l'image d'un intervalle I (resp. d'un segment $[a,b]$) par une fonction continue f est un intervalle $f(I)$ (resp. un segment $f([a,b])$)[50].

Point fixe : soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}, f([a,b]) \subset [a,b]$ continue ; f admet un point fixe.

Bijection réciproque : si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue strictement monotone alors :

- f réalise une bijection de $f(I)$ sur J
- $f^{-1} : J \to I$ est continue strictement monotone sur J, de même monotonie que f
- Les courbes $y = f(x)$ et $y = f^{-1}(x)$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$

[48] La partie du plan au-dessus de la courbe de f i.e. $\{(x,y) \in I \times \mathbb{R} / y \geqslant f(x)\}$

[49] Une partie A du plan est dite convexe si $\forall(M,N) \in A^2, [MN] \subset A$

[50] Attention, les intervalles ne sont pas nécessairement de même nature : $\sin(]0,2\pi[) = [-1,1]$

Toute application continue sur un intervalle est bornée et atteint ses bornes

IX.7 Uniforme continuité

$f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, x') \in I^2, |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue (théorème de Heine). Toute fonction lipschitzienne sur un intervalle y est uniformément continue. Interprétation géométrique : f est uniformément continue sur I si et seulement si $\lim_{h\to 0} \sup_{x \in I \cap t_{-h}(I)} |f(x+h) - f(x)| = 0$. Théorème d'approximation : si $f : [a,b] \to \mathbb{R}, f \in \mathscr{C}([a,b]), \forall \varepsilon > 0, \exists (\varphi, \psi) \in \mathscr{E}^2_{[a,b]}, \begin{cases} \varphi \leqslant f \leqslant \psi \\ \forall x \in [a,b], \psi(x) - \varphi(x) \leqslant \varepsilon \end{cases}.$

IX.8 Intégration

f est continue par morceaux si elle est continue en tout point de $[a,b]$ sauf en un nombre fini de discontinuités de première espèce[51](c'est une algèbre). Pour f continue par morceaux sur $[a,b]$, et pour $A = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \middle/ \varphi \in \mathscr{E}_{[a,b]} \text{ et } \varphi \leqslant f \right\}$ et $B = \left\{ \int_{[a,b]} \psi \middle/ \psi \in \mathscr{E}_{[a,b]} \text{ et } f \leqslant \psi \right\}$, $\sup A = \inf B = \int_{[a,b]} f$.

Résultats importants : si $\begin{cases} f \in \mathscr{C}([a,b]) \\ f \geqslant 0 \end{cases}$ alors $\int_{[a,b]} f = 0 \iff f = x \mapsto 0$. On définit $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$: intégrale normale, 0 (si $a = b$) ou l'opposée de l'intégrale. Alors :

- $\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant \left| \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x \right|$
- $\left| \int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant \sup_{[a,b]} |f| \times \left| \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \right|$
- $\begin{cases} f \in \mathscr{C}_{\text{morceaux}}(I) \\ (a,b) \in I^2, a < b \Rightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0 \\ f \geqslant 0 \end{cases}$

IX.9 Sommes de Riemann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

IX.10 Relations de comparaison

- $f = \underset{(a)}{O}(g) \iff \frac{f}{g}$ bornée au voisinage de $a \iff |f(x)| \leqslant M|g(x)|$
- $f = \underset{(a)}{o}(g) \iff \frac{f}{g}(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \iff f = g \times \varepsilon$ et $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$
- $f \underset{(a)}{\sim} g \iff \frac{f}{g}(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1 \iff f(x) = (1 + \varepsilon(x))g(x)$

[51]Pas d'infini

IX.11 Dérivabilité

f est dérivable en a si $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie, notée $f'(a)$ en a. La dérivabilité en a équivaut à la dérivabilité à droite et à gauche. f est différentiable en a s'il existe $u \in L(\mathbb{R})$ tel que $f(a+h) = f(a) + au(h) + o(h)$. Ceci est équivalent à la dérivabilité en a. u est noté $\mathrm{d}f_a$. On élargit ces défitions à un intervalle, et on introduit $f', \mathrm{d}f = f'\mathrm{d}x$, etc.

Si $f : I \to \mathbb{R}$ continue strictement monotone dérivable en $a \in I$, alors $(f(a) = b)$

1) Si $f'(a) \neq 0, (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$;

2) Si $f'(a) = 0, f^{-1}$ n'est pas dérivable en b.

Théorème fondamental : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives (en l'occurence $x \mapsto \int_{x_0}^x f(x)\mathrm{d}x$ avec $x_0 \in I$).

IX.12 Accroissements finis

Si f admet un extremum local en $a \in \overset{\circ}{I}$, et si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est telle que $\begin{cases} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f \text{ dérivable } sur]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{cases}$ alors $\exists c \in]a,b[, f'(c) = 0$ (théorème de Rolle) : « entre deux zéros de f, il y a un zéro de f' ».

Égalité des accroissements finis[52] : si $\begin{cases} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\end{cases}$ alors $\exists c \in]a,b[, f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$. Inégalité des accroissements finis[53] : avec les mêmes hypothèses, si $\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2, m \leqslant f' \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$. Variante : si $\exists (M) \in \mathbb{R}^2, |f'| \leqslant M$, alors $\forall (y,z) \in [a,b]^2, |f(z) - f(y)| \leqslant M|z-y|$[54].

Pour les fonctions de la variable réelle à valeurs complexes, on n'a comme résultat que l'IAF qui devient $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in]a,b[, |f'(x)|$[55] $\leqslant M$, alors $|f(b) - f(a)| \leqslant M(b-a)$.

IX.13 Limite de la dérivée

Si $f : [a,b[\to \mathbb{R}, \begin{cases} \text{continue sur } [a,b[\\ \text{dérivable sur }]a,b[\end{cases}$ alors :

- $f'(x) \underset{x \overset{>}{\to} a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow f'_d(a) = \ell$
- $f'(x) \underset{x \overset{>}{\to} a}{\longrightarrow} \pm\infty \Rightarrow f'$ n'est pas dérivable en a
- si f' n'a pas de limite, *on ne peut pas conclure*

Au passage : f est strictement croissante si $f' \geqslant 0$ et si f ne s'annule pas sur un segment véritable.

IX.14 Dérivations successives

Pour f et g n-fois dérivables, $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ et $(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

[52]EAF pour les intimes
[53]IAF
[54]Version très allégée : si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, et si $\exists k \in \mathbb{R}, |f'| \leqslant k$, f est k-lipschitzienne sur I
[55]C'est un module (et non plus une valeur absolue)

Pour $f \in \mathscr{C}^n(I)$, $g \in \mathscr{C}^n(J)$, avec $f(I) \subset J$, $g \circ f \in \mathscr{C}^n(I)$. $\begin{cases} f \text{ strictement monotone sur } I \text{ de classe } \mathscr{C}^n \\ f' \text{ ne s'annule pas sur } I \end{cases} \Rightarrow f^{-1} \in \mathscr{C}^n(f(I))$.

IX.15 Intégration

Par parties : $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\mathrm{d}x$. Par la méthode des trapèzes : $I_n(f) = \frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_k) + f(x_{k+1})$ et $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - I_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2}\sup_{[a,b]}|f^n|$. Par un changement de variables : $\begin{cases} f : I \to \mathbb{R} \in \mathscr{C}(I) \\ (a,b) \in I^2 \\ \varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b] \text{ bijective } \mathscr{C}^1 \end{cases}$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}b} f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

IX.16 Développements limités

Soit $f : I \to \mathbb{R}, 0 \in I$. f admet en 0 un développement limité d'ordre 1 $a_0 + a_1x + o(x) \iff \begin{cases} f \text{ dérivable en } 0 \\ f(0) = a_0 \\ f'(0) = a_1 \end{cases}$. Ce résultat est uniquement valable pour un développement limité d'ordre 1. On peut également s'en tirer en prolongeant f en 0. Un développement limité est unique. La partie régulière du développement limité d'une fonction paire (resp. impaire) ne contient que des termes d'ordre pair (resp. impair).

Si f' admet en 0 le développement limité suivant : $f'(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$ alors $f(x) = f(0) + a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$. Formule de Taylor-Young : une fonction $f \in \mathscr{C}^n$, admet en 0 un développement limité d'ordre n donné par

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + o(x^n)$$

Les opérations possibles sur un développement limité sont la combinaison linéaire, le produit, la composition, et le quotient[56].

On a également le développement limité en a : $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$. Taylor-Young en a : $f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n)$ au voisinage de $h = 0$[57].

Les utilisations du développement limité sont multiples : calcul de limites, équivalents (premier terme non-nul du développement limité), analyser les tangentes : les deux premiers termes donnent l'équation de la tangente et la position relative au voisinage de a. On peut généraliser le développement limité en $+\infty$ en posant $y = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0$, en en factorisant par des x^n pour retomber sur les formes connues (ex. : $(1-x)^m$).

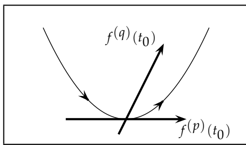
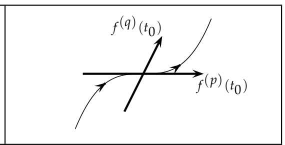
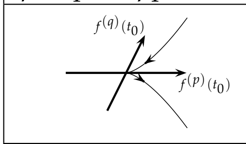
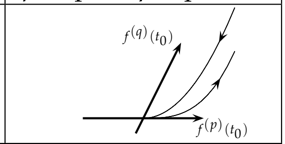
[56] Faire apparaître $\frac{1}{1-x}$

[57] Éventuellement, écrire $h = x - a$

IX.17 Arcs paramétrés

Si $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R}^2)$ et $t_0 \in I$, alors la tangente en $M(t_0)$ a pour vecteur directeur $f^{(p)}(t_0)$, premier vecteur dérivé non nul.

Soit p tel que $f^{(p)}(t_0)$ est le premier vecteur directeur non nul. Soit q tel que $f^{(q)}(t_0)$ est le premier vecteur directeur dérivé suivant tel que $(f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ est libre. La nature des points singuliers (i.e. tels que $f'(t_0) = (0,0)$) est donnée par le tableau suivant (s'il décrit le cas étudié).

	
p impair, q pair ①	p impair, q impair ②
	
p pair, q impair ③	p pair, q pair ④

① est un point d'aspect ordinaire, ② est un point d'inflexion, ③ est un point de rebroussement de première espèce et ④ est un point de rebroussement de seconde espèce.

Si $M(t_0)$ est un point d'inflexion, alors $(f'(t_0), f''(t_0))$ est liée. On peut alors chercher les valeurs du paramètre t pour lesquelles $\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix} = 0$: il suffira ensuite de vérifier que c'est un point d'inflexion (ou pas).

IX.18 Expression intégrale du reste

Formule de Taylor avec reste intégral : si $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I)$, alors $\forall (a,b) \in I^2, f(b) = f(a) + f'(a)(b-a)x + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!}x^n + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n\mathrm{d}t$.

Inégalité de Taylor-Lagrange : si $\begin{cases} f \in \mathscr{C}^{n+1}(I) \\ \exists M \in \mathbb{R}, \forall t \in I, |f^{(n+1)}(t)| \leqslant M \end{cases}$ alors $\left|f(b) - \left(f(a) + f'(a)(b-a)x + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!}x^n\right)\right| \leqslant M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$[58].

[58] Si le reste tend vers 0, alors on peut écrire par exemple $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ ou encore $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

PARTIE X

ALGÈBRE (LE RETOUR !)

X.1 Produit scalaire

E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire si :
- ϕ est linéaire à droite et à gauche
- ϕ est symétrique[59]
- positive (i.e. $\forall u \in E, \phi(u,u) \geqslant 0$)
- définie (i.e. $\forall u \in E, \phi(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0$)

On note le produit scalaire $\langle .,. \rangle$. Exemple : le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$: $\langle (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. On définit $\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$.

Quelques résultats : $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2$. Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ (égalité si et seulement si (x,y) liée). Inégalité triangulaire : $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

X.2 Bases orthonormales

$(u_i)_{i\in I}$ est orthogonale si $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow \langle u_i, u_j\rangle = 0$. $(u_i)_{i\in I}$ est orthonormale si $\forall (i,j) \in I^2, \langle u_i,u_j\rangle = \delta_{i,j}$. Relation de Pythagore : pour une famille orthogonale $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, $\|\sum_{i=1}^n x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$. Une famille orthogonale est libre si aucun vecteur n'est nul. Procédé d'orthonormalisation de Schmidt : pour toute base $(e_1,\dots,e_n)$ d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n, il existe une unique base orthogonale $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ telle que $P_{(e_1,\dots,e_n),(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)} = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. Puis $(\varepsilon'_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = \left(\frac{\varepsilon_i}{\|\varepsilon_i\|}\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est orthonormale.

Soit $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ avec $(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormale de E. $\forall i \in [\![1,n]\!], x_i = \langle x, e_i\rangle$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, $\mathrm{d}(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$, et enfin $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

X.3 Sous espaces vectoriels orthogonaux

Deux sous espaces vectoriels F et G sont orthogonaux si $\forall (x,y) \in F\times G, \langle x,y\rangle = 0$. $F^\perp = \left\{x \in E \middle/ \forall y \in F, \langle x,y\rangle = 0\right\}$: c'est le plus grand sous espace vectoriel de E orthogonal à F. On note : $E = F \oplus^\perp F^\perp$: $F^\perp$ est *le* supplémentaire orthogonal de F. $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$.

Le supplémentaire orthogonal d'un hyperplan vectoriel $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$ (de dimension $n-1$) est la droite vectorielle de vecteur directeur $u = a_1e_1 + \dots + a_ne_n \neq 0_E$.

Projection orthogonale : $p : \begin{array}{l} E = F\oplus F^\perp \to E \\ x = y+z \mapsto y \end{array}$. Projection orthogonale : $s : \begin{array}{l} E = F\oplus F^\perp \to E \\ x = y+z \mapsto y - z \end{array}$. Pour une base orthonormale, $p(x) = \sum_{i=1}^n \langle x_i, e_i\rangle e_i$ et le projeté orthogonal sur une droite est $\langle x,u\rangle u$.

Si F est un sous espace vectoriel de E et si $x \in E$, on pose $\mathrm{d}(x,F) = \inf_{y\in F}\|x-y\| = \|x - p(x)\|$ où $p(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F. $p(x)$ est l'unique vecteur vérifiant une telle condition. $\mathrm{d}(x,F) = 0 \iff x \in F$.

X.4 Produit vectoriel

Deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ ont même orientation si $\det_{\mathscr{B}} \mathscr{B}' > 0$. L'écart angulaire entre x et y est $\theta(x,y) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}\right)$. Dans E_3 (orienté) le déterminant $\det_{\mathscr{B}}(x,y,z)$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ orthonormale directe choisie. On note $\operatorname{Det}(x,y,z)$. Pour $(x,y) \in (E_3)^2, x\wedge y$ est l'unique $a \in E_3$ tel que $\forall z \in E_3, \operatorname{Det}(x,y,z) = \langle a,z\rangle$. Formule de duplication du produit vectoriel : $\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$.

X.5 Endomorphismes orthogonaux du plan

a. Endomorphisme orthogonal

Un endomorphisme f du plan est orthogonal s'il vérifie l'une des trois caractérisations équivalentes suivantes :
- $\forall (u,v) \in \mathscr{P}^2, \langle f(u), f(v)\rangle = \langle u,v\rangle$
- f transforme une (toute) base orthonormale en une base orthonormale
- $\forall u \in \mathscr{P}, \|f(u)\| = \|u\|$

Un endomorphisme orthogonal est nécessairement bijectif (on parle d'*automorphismes* orthogonaux). $O(\mathscr{P})$ est l'ensemble des automorphismes orthogonaux (sous-groupe de $(GL(\mathscr{P}),\circ)$).

b. Matrice orthogonale

f est orthogonale si et seulement si sa matrice A dans une base orthonormale vérifie ${}^tA\times A = I_2$. Les deux types de matrices orthogonales possibles sont $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a\end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} a^2+b^2 = 1 \\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\end{cases}$. $O(2)$ est le groupe des matrices orthogonales d'ordre 2. $A \in O(2) \Rightarrow \det A \in \{-1,1\}$. $SO(2) = \left\{A \in O(2) \middle/ \det A = 1\right\}$ est un sous-groupe commutatif de $O(2)$.

c. Nature des endomorphismes

Pour $\mathscr{P}$ orienté, $\det_{\mathscr{B}}(u,v)$ ne dépend pas de la base orthonormale directe $\mathscr{B}$ choisie. On note $\operatorname{Det}(u,v)$.

Si $f \in O(\mathscr{P})$, $\det f \in \{-1,1\}$.
- $SO(\mathscr{P})$ est le groupe spécial orthogonal, qui contient les rotations vectorielles. Si $f \in SO(\mathscr{P})$, sa matrice ne dépendant pas de la base orthonormale directe choisie est $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$: c'est la rotation d'angle θ.
- $O^- = \left\{f \in O(\mathscr{P} \middle/ \det f = -1\right\}$. C'est l'ensemble des réflexions vectorielles, d'axe $\ker(f - \mathrm{id}_{E_2})$.

Il existe une unique réflexion telle que $s(u) = v$, d'axe $\operatorname{vect}\{u+v\}$ (ou $(\operatorname{vect} u)^\perp$ si $u+v = 0_E$). Il existe une unique rotation telle que $r(u) = v$.

$\widehat{(u,v)}$ est l'angle de la rotation qui transforme $\frac{u}{\|u\|}$ en $\frac{v}{\|v\|}$. Alors : $\begin{cases}\langle u,v\rangle = \|u\|\,\|v\|\cos\theta \\ \operatorname{Det}(u,v) = \|u\|\,\|v\|\sin\theta\end{cases}$. Pour une rotation : $\widehat{(r(u),r(v))} = \widehat{(u,v)}$. Pour une réflexion : $\widehat{(s(u),s(v))} = -\widehat{(u,v)}$ (à 2π près). La composée de deux réflexions est une

[59] Symétrique et linéaire d'un côté implique symétrique bilinéaire

rotation d'angle $2\widehat{(u,u')}$ ($\mathscr{D} = \text{vect}(\{u\})$ et $\mathscr{D}' = \text{vect}(\{u'\})$).

X.6 Endomorphismes orthogonaux de l'espace

On retrouve les résultats suivants :

- caractérisation d'un endomorphisme (norme, produit scalaire, base orthonormale) ;
- bijection, ensemble des automorphismes orthogonaux de l'espace $O(E_3)$;
- matrice orthogonale $O(3)$ si ${}^tA \times A = I_3$.
- $A \in O(3) \Rightarrow \det A \in \{-1, 1\}$;
- $(O(3), \times)$ sous-groupe de $(GL_3(\mathbb{R}), \times)$.

Attention : $SO(3)$ n'est pas commutatif.

a. Nature des endomorphismes de l'espace

Si $f \in SO(E_3)$, f possède des vecteurs invariants autres que le vecteur nul. Tableau récapitulatif pour $f \in O(E_3)$, $F = \ker(f - \text{id})$, $A = M_{(e_1,e_2,e_3)}(f)$:

$\dim F = 3$	$f = \text{id}_{E_3}$	$\det f = 1$	$A = I_3$
$\dim F = 2$	f est une réflexion de plan F	$\det f = -1$	
$\dim F = 1$	f est une rotation d'axe F[60]	$\det f = 1$	$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\dim F = 0$	voir devoir maison		

Pour une rotation r d'axe $\mathscr{D}$, si $x \in \mathscr{D}^\perp, r(x) = \cos\theta x + \sin\theta \times k \wedge x$; si $x \in E_3, r(x) = \cos\theta x + (1 - \cos\theta)\langle k, x\rangle k + \sin\theta \times k \wedge x$. Formules utiles : $\text{tr}\, A = 2\cos\theta + 1$ et $A - {}^tA = 2\sin\theta \begin{pmatrix} . & . & \beta \\ \gamma & . & . \\ . & \alpha & . \end{pmatrix}$ où (α, β, γ) est le vecteur unitaire de l'axe.

La composée d'une symétrie de plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ est une rotation d'axe $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ d'angle $\theta \equiv 2\widehat{(n_1, n_2)} \pmod{2\pi}$.

X.7 Isométries affines

$f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ est affine si :

- $\exists \ell \in L(\mathscr{V}), \forall (M, N) \in \mathscr{E}^2, \ell(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$
- ℓ est unique et $\ell = L(f)$

Ces deux conditions sont équivalentes à, $\forall O \in \mathscr{E}, \exists \Omega \in \mathscr{E}, \forall M \in \mathscr{E}, \ell(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\Omega M'}$.

Si f et g sont affines, $f \circ g$ l'est aussi. Si f est affine, alors elle conserve le barycentre, l'image d'un segment est un segment et l'image d'une partie convexe est une partie convexe.

Représentation analytique : $X' = LX + X_0$ où $L = M_{\mathscr{B}}(L(f))$.

Une transformation affine f est bijective i.e. $L(f) \in GL(\mathscr{V})$ (on note : $f \in GA(\mathscr{E})$, sous-groupe de $\mathscr{E}$).

Une isométrie affine est une transformation affine qui conserve les distances i.e. $L(f) \in O(\mathscr{V})$ (sous-groupe de $(GA(\mathscr{E}), \circ)$).

Un déplacement est une isométrie avec $L(f) \in SO(\mathscr{V})$ (sous-groupe de $(Is(\mathscr{E}, \circ))$.

Un antidéplacement est une isométrie avec $L(f) \in O^-(\mathscr{V})$.

La composition de deux symétries affines de droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ est $t_{2\overrightarrow{AA'}}$ si $\mathscr{D}_1 /\!/ \mathscr{D}_2$ et $r(I, \theta)$ avec $\theta \equiv 2\widehat{(\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2)} \pmod{2\pi}$. La composition de deux symétries affines de plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ est $t_{2\overrightarrow{AA'}}$ si $\mathscr{P}_1 /\!/ \mathscr{P}_2$ et la rotation d'axe $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ et d'angle $\theta \equiv 2\widehat{(n_1, n_2)} \pmod{2\pi}$.

Tout déplacement du plan est soit une translation, soit une rotation affine. Tout déplacement de l'espace est un vissage : une translation, une rotation affine ($\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$), ou un vissage strict (composée d'une translation et d'une rotation).

PARTIE XI
ANALYSE (LE RETOUR !)

XI.1 Topologie de $\mathbb{R}^2$

On définit le disque ouvert de centre a de rayon R par $D(a,R) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \middle/ \|x-a\| < R\right\}$, et le disque fermé de centre a de rayon R par $\left\{x \in \mathbb{R}^2 \middle/ \|x-a\| \leqslant R\right\}$. Une partie U de $\mathbb{R}^2$ est ouverte si $\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0, D(x,\varepsilon) \in U$. Une partie U de $\mathbb{R}^2$ est fermée si son complémentaire est ouvert. U peut être ni ouverte, ni fermée.

$x \in \overline{U}$ (adhérence de U) si $\forall \varepsilon > 0, D(x,\varepsilon) \cap U \neq \varnothing$. Exemple : $\overline{D(a,R)} = D'(a,R)$.

XI.2 Continuité en deux variables

On s'intéresse aux fonctions $f : \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto f(x,y)\end{array}$. La définition est la même que pour les fonctions d'une variable. f est continue en A si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \|(x,y)-(x_a,y_a)\| < \delta \Rightarrow \|f(x,y) - f(x_a,y_a)\| < \epsilon$. Ensuite : toutes les opérations sur les limites restent valables (somme, multiplication, composition). Enfin : toute fonction d'une variable peut être vue comme fonction de deux variables. Donc : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x + y = 0$ car $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$ et par somme.

Les fonctions polynômiales sont continues sur $\mathbb{R}^2$ en deux variables, les fonctions rationnelles là où elles sont définies.

On définit la première application partielle par $f(.,a_2)$: $\begin{array}{l}A_1 \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x,a_2)\end{array}$ avec $A_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \middle/ (x,a_2) \in A\right\}$. et la seconde application partielle par $f(a_1,.)$: $\begin{array}{l}A_2 \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(a_1,x)\end{array}$ avec $A_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \middle/ (a_1,x) \in A\right\}$.

Quelques résultats :

- Si $\begin{cases} h : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (x(t),y(t))\end{array} \text{ continue en } t_0 \in I \\ h(I) \in A (A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)) \\ f : A \to \mathbb{R} \text{ continue en } h(t_0)\end{cases}$ alors $f(x(t),y(t))$ est continue en t_0 ($f \circ h : I \to \mathbb{R}$). Exemple : $x \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ [61].
- Si $\begin{cases} A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \\ f : A \to \mathbb{R} \text{ continue en } a \in A \\ f(A) \subset I \\ g : I \to \mathbb{R} \text{ continue en } f(A)\end{cases}$ alors $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ est continue en a. Exemple : $(x,y) \mapsto \exp(x+y)$ continue sur $\mathbb{R}^2$.
- $f : \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (f_1(x,y), f_2(x,y))\end{array}$ continue en a si et seulement si f_1 et f_2 le sont. Exemple : $(u,v) \mapsto (u+v, u-v)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- Si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est bijective et que h et h^{-1} sont continues, h est un homéomorphisme ou difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^0$.

[61] Sert beaucoup à montrer qu'une fonction *n'est pas* continue en un point : pour cet exemple, $\lim_{t\to 0} f(t,t) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{t \to 0} f(0,t) = 0$: la fonction n'est donc pas continue en 0

XI.3 Calcul différentiel

f est définie sur un ouvert. f admet une dérivée selon le vecteur (h,k) en (x_0,y_0) si $\varphi : t \mapsto f(x_0+th, y_0+tk)$ est dérivable en 0. $D_{(h,k)}(x_0,y_0) = \varphi'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+th,y_0+tk)-f(x_0,y_0)}{t}$. $D_{(0,0)}f(x_0,y_0) = 0$. $D_{(1,0)}f(x_0,y_0) = D_1 f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \left.\frac{\mathrm{d}f(.,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$. $D_{(0,1)}f(x_0,y_0) = D_2 f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \left.\frac{\mathrm{d}f(x_0,.)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}$.

Une application $f : U \to \mathbb{R}^2$ (U ouvert) est de classe $\mathscr{C}^1$ si $D_1 f(x,y)$ et $D_2 f(x,y)$ existent pour tout $(x,y) \in U$ et sont continues sur U. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U, alors, pour tout $(x_0,y_0) \in U$,

$$\forall (x,y) \in U, f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \times (x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \times (y-y_0) + \|(x-x_0, y-y_0)\| \,\varepsilon(x,y)$$

avec $\varepsilon(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} 0$[62]. Résultat : pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, $D_{(h,k)}f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \times h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \times k$.

Sur U, $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$ («x» : $(x,y) \mapsto x$). $(\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R}), +, \times, .)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.

Si f présente un extremum en (x_0,y_0) alors $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) = (0,0)$.

XI.4 Formules de dérivation

Pour $\begin{cases} f : U \to \mathbb{R} \\ h : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (x(t),y(t))\end{array} \\ h(I) \subset U\end{cases}$, i.e. $f \circ h : \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ t \mapsto f(x(t),y(t))\end{array}$, alors ($f$ et h de classe $\mathscr{C}^1$) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t),y(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. Pour $F(u,v) = f(x(u,v),y(u,v))$, $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\end{cases}$. Enfin, si $f \in \mathscr{C}^2(U)$, alors $\forall (x_0,y_0) \in U$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (Schwarz).

XI.5 Champs de vecteurs

$\begin{array}{l} U \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (f(x,y), g(x,y)) = \vec{V}(x,y)\end{array}$ est un champ de vecteurs. $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire si $\exists \varphi \in \mathscr{C}^1(U), \forall (x,y) \in U, \vec{V}(x,y) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, \varphi(x,y)$. Si $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire alors $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ (il y a équivalent lorsque U est un ouvert étoilé, théorème de Poincaré). Une partie du plan A est étoilée si $\exists \Omega \in A, \forall M \in A, [\Omega M] \subset A$.

XI.6 Intégrale curviligne

Soit un champ de vecteurs $\vec{V}$ continu défini sur un ouvert U. Soit $\gamma : \begin{array}{l}[a,b] \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (x(t),y(t))\end{array}$ un arc orienté $\mathscr{C}^1$ régulier simple, de support $\Gamma \subset U$. La circulation de $\vec{V}$ le

[62] L'équation du plan tangent à la surface définie par f est $f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \times (x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \times (y-y_0) = 0$.

long de Γ est $\int_a^b \left((f(x(t),y(t))x'(t)+g(x(t),y(t))y'(t)\right)\mathrm{d}t = \int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}x + g(x,y)\mathrm{d}y = \int_\Gamma \langle \vec{V}, \mathrm{d}\vec{\ell}\rangle$. L'intégrale curviligne ne dépend pas du paramétrage admissible conservant l'orientation choisi. Si $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire, $\int_\Gamma \langle \vec{V}, \mathrm{d}\ell\rangle = \varphi(B)-\varphi(A)$ où A et B sont les extrémités de Γ. En particulier : $\oint_\Gamma \langle \vec{V}, \mathrm{d}\ell\rangle = 0$.

XI.7 Intégrale double

On reprend l'intégrale au sens de Riemann avec : fonctions en escalier, théorème de Heine, théorème d'approximation et bornes supérieure et inférieure égales. Les nouveaux résultats : si $f : \underbrace{[a,b]\times[c,d]}_{\text{rectangle } R} \to \mathbb{R}$ est continue sur R alors $\varphi : \begin{array}{l}[a,b]\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\end{array}$ est continue sur $[a,b]$ [63]. Théorème de Fubini : si $f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ alors $\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \iint_R f$. Si $g : [a,b]\to\mathbb{R}$ et $h : [c,d]\to\mathbb{R}$ sont continues sur $[a,b]$ et $[c,d]$ alors $\iint_R g(x)h(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \times \int_c^d h(y)\mathrm{d}y$.

XI.8 Compacts élémentaires

Un compact élémentaire K_1 en x est tel que $K_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle/ a\leqslant x\leqslant b \text{ et } \alpha_1(x)\leqslant y\leqslant \alpha_2(x)\right\}$ avec $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$ et α_1 et α_2 continues sur $[a,b]$. Un compact élémentaire K_2 en y est tel que $K_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle/ c\leqslant y\leqslant d \text{ et } \beta_1(x)\leqslant x\leqslant \beta_2(x)\right\}$ avec $\beta_1\leqslant\beta_2$ et β_1 et β_2 continues sur $[c,d]$. $\iint_{K_1} f = \int_a^b \left[\int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$. $\iint_{K_2} f = \int_c^d \left[\int_{\beta_1(x)}^{\beta_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$.

$\begin{cases} K_1\subset K_2 \\ f\in\mathscr{C}(K_2) \\ f\geqslant 0\end{cases} \Rightarrow \iint_{K_1} f \leqslant \iint_{K_2} f.$

Formule de Green-Riemann : pour un champ de vecteurs $\vec{V}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur un compact élémentaire $K\subset U$, et pour ∂K^+ bord de K, arc orienté $\mathscr{C}^1$ par morceaux dans le sens direct :

$$\oint_{\partial K^+} f(x,y)\mathrm{d}x + g(x,y)\mathrm{d}y = \iint_K \left[\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

On en déduit : $\text{aire}(K) = \int_{\partial K^+} x\mathrm{d}y = \int_{\partial K^+} -y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial K^+} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$.

XI.9 Changements de variable usuels

Affine $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = A\times\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} + B$: $\iint_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \to |\det A| \iint_{K'} f(x',y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$

Polaire $\begin{cases}x = r\cos\theta\\ y = r\sin\theta\end{cases}$: $\iint_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \to \iint_{K'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

Sphérique $\begin{cases}x = r\sin\theta\cos\phi\\ y = r\sin\theta\sin\phi\\ z = r\cos\theta\end{cases}$: $\iiint_K f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \to \iiint_{K'} f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta) r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$

XI.10 Avec trois variables

Si $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire alors $\underbrace{\nabla\wedge\begin{pmatrix}f\\g\\k\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}} = 0$ avec $\nabla = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}$. Il y a équivalence sur un ouvert étoilé.

Si $\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \middle/ (x,y)\in K \text{ et } \gamma_1(x,y)\leqslant z\leqslant \gamma_2(x,y)\right\}$ alors $\iiint_\Omega f = \iint_K \left[\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (intégration par piles). On a également : $\iiint f = \int_{z=\dots}^{z=\dots}\left[\iint_{K(z)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z$ (intégration par tranches).

XI.11 Longueur d'une courbe

a. Longueur

Si l'on désigne par $L_\sigma(\gamma)$ la longueur de la ligne polygônale construite sur $\gamma\in\mathscr{C}^1([a,b])$ selon la subdivision σ, alors $\sup_{\sigma\in S_{[a,b]}} L_\sigma(\gamma)$ existe et vaut $\ell(\gamma)$, longueur de la courbe γ. $\ell(\gamma) = \ell(\gamma_1)+\ell(\gamma_2)$. Enfin

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$$

$\ell(\gamma)$ ne dépend ni du paramétrage admissible choisi, ni de son orientation. On note : $\ell(\Gamma)$ où Γ est désormais la courbe et non pas la fonction.

b. Abscisse curviligne

Une abscisse curviligne de γ est une primitive s de $\|\gamma'(t)\|$. Alors : $\ell(\gamma) = s(a)-s(b)$. En polaire : $\ell(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\rho(\theta)^2+\rho'(\theta)^2}$ (avec ρ $\mathscr{C}^1$ régulier simple).

c. Paramétrage normal

On exprime s en fonction de t : $s = s(t)$. Puis pour $f = f(s)$ (f exprimée en fonction de s), on abuse de la notation et on écrit $f = f(t) = f(s^{-1})$ (f exprimée en fonction de t). Alors : $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}$ et $\left\|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right\| = 1$. Réciproquement : si le paramétrage de l'arc est normal et conserve l'orientation, alors c'est une abscisse curviligne.

d. Frénet

$\vec{T}(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ est le vecteur normé tangent en $M(t)$ à Γ. On le complète avec $\vec{N}(t)$ pour obtenir une base orthonormale directe : c'est la base de Frénet. Elle ne dépend pas du paramétrage admissible conservant l'orientation.

e. Courbure

Si $f\in\mathscr{C}^k(I), k\geqslant 2$ alors $\exists\alpha\in\mathscr{C}^{k-1}(I)$ tel que $\vec{T}(t) = \cos\alpha(t)\vec{\imath}+\sin\alpha(t)\vec{\jmath}$. C'est une conséquence du théorème de relèvement : si $g\in\mathscr{C}^k(I,\mathbb{C})$ et que $\forall t\in I, g(t)\in\mathbb{U}$, alors :$\exists\alpha\in\mathscr{C}^{k-1}(I), \forall t\in I, g(t) = e^{i\alpha(t)}$. Et si α et α' sont deux relèvements de g, $\alpha = \alpha'+k_0\times 2\pi, k_0\in\mathbb{Z}$.

[63] i.e. pour une fonction de deux variables continue, si on intègre une variable, la fonction résultant est toujours continue

La courbure est $\gamma(s) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$. Le rayon de courbure au point s est (s'il existe) $R(s) = \frac{1}{\gamma(s)}$. Formules de Frénet (attention au dénominateur) : $\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\vec{N}$ et $\frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma\vec{T}$.

$f : I \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^2$ est birégulier si $\forall t \in I$, $(f'(t), f''(t))$ est libre dans $\mathbb{R}^2$. Ceci ne dépend pas du paramétrage.

f. Formules

$$\forall t \in I, \gamma(t) = \frac{\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix}}{\|s'(t)\|^3}$$

$$f \text{ birégulier } \iff \forall t \in I, \gamma(t) \neq 0$$

$$\text{Si } f \text{ birégulier}, R(t) = \frac{(x'(t) + y'(t))^{\frac{3}{2}}}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}$$

— *fin* —

Partie XII
Mes erreurs classiques

– Pour le binôme de Newton, sommes des termes d'une suite géométrique, ou d'autres sommes, ne pas oublier de transformer le $\sum_{k=1} \dots$ en $\sum_{k=0} \cdots$
– Les suites : attention à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\geqslant 1}$
– De manière générale : toujours vérifier pour les divisions / simplifications si l'on n'oublie pas un cas de $\cdots = 0$
– Multiplication d'une inégalité par un terme : attention si le terme est nul ou pas
– Ne pas prendre la limite pour justifier son existence (vérifier d'abord qu'elle existe)
– Le cas $x = 0\dots$