Cours de Mathématiques 2
première partie : Analyse 2

DEUG MIAS 1^e année, 2^e semestre.

Maximilian F. Hasler

Département Scientifique Interfacultaire
B.P. 7209 — F–97275 SCHOELCHER CEDEX
Fax : 0596 72 73 62 — e-mail : `mhasler@univ-ag.fr`

version du 21 avril 2002

Table des matières

1 Equations différentielles **3**
1.1 Introduction — définitions générales 3
1.2 Equations différentielles du 1^{er} ordre 3
1.2.1 Eq.diff. à variables séparées 4
1.2.2 Détermination de la cte. d'intégration 5
1.3 Equations différentielles linéaires 5
1.3.1 Principe de superposition 6
1.4 Equations différentielles linéaires du 1^{er} ordre 7
1.4.1 Structure de l'ens. de solutions 7
1.4.2 Résolution de l'équation homogène associée 7
1.4.3 Solution particulière par variation de la constante 8
1.5 Equations différentielles linéaires du 2^{e} ordre à coefficients constants 10
1.5.1 Définitions 10
1.5.2 Résolution de l'équation homogène associée $(E.H.)$ 11
1.5.3 Solution particulière à (E) 12

1 Equations différentielles

1.1 Introduction — définitions générales

Une équation différentielle (ED) d'ordre n est une équation faisant intervenir une fonction y ainsi que ses dérivées $y^{(k)}$ jusqu'à l'ordre n. Par exemple, une telle équation pourrait être

$$y'(t) = 2.y(t) \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{2}\,x^2\,y'' - 5\,x\ .$$

Dans le 2e exemple, il est sous-entendu que y est fonction de x, ou plutôt que x signifie l'application $\mathrm{id} = (x \mapsto x)$: c'est en effet une égalité entre fonctions.

Définition 1 *L'équation différentielle d'ordre n la plus générale peut toujours s'écrire sous la forme*

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0\ . \qquad (ED)$$

ou F est une fonction de $(n+2)$ variables. Nous ne considérons que le cas ou x et y sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une **solution** *à une telle équation différentielle sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y \in C^n(I;\mathbb{R})$ (une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ qui est n fois continûment dérivable) telle que pour tout $x \in I$, on ait $F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0$.*

Exercice 1.1.1 *Vérifier que*

- *$y(t) = C\,e^{2\,t}$ est une solution à la 1e équation sur tout $\mathbb{R}$, pour tout $C \in \mathbb{R}$ fixé ;*
- *$y(x) = m\,x^2 - 5x$ est une solution à la 2e équation, sur $\mathbb{R}$, pour tout $m \in \mathbb{R}$.*

Remarque 1.1.1 *Pour des raisons qui seront développés dans la suite, on dit aussi "intégrer l'ED" au lieu de "trouver une solution à l'ED".*

Dans ce chapitre, on donnera des méthodes pour trouver l'ensemble de toutes les solutions à une certaine classe d'équations différentielles.

1.2 Equations différentielles du 1^{er} ordre

Définition 2 *Une équation différentielle est du 1er ordre si elle ne fait intervenir que la première dérivée y'.*

1.2.1 Eq.diff. à variables séparées

Définition 3 *Une équation différentielle de 1er ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme*

$$f(y).y' = g(x) \qquad (vs)$$

Une telle équation différentielle peut s'intégrer facilement : En effet, on écrit $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, puis, symboliquement,

$$f(y).\mathrm{d}y = g(x).\mathrm{d}x \iff \int f(y).\mathrm{d}y = \int g(x).\mathrm{d}x + C\ .$$

(On écrit ici explicitement la *constante d'intégration* arbitraire $C \in \mathbb{R}$ (qui est déjà implicitement présente dans les l'intégrales indéfinies) pour ne pas l'oublier.)

Il s'agit donc d'abord de trouver des primitives F et G de f et de g, et ensuite d'exprimer y en terme de x (et de C) :

$$F(y) = G(x) + C \iff y = F^{-1}(G(x) + C)\ .$$

C'est pour cette raison que l'on dit aussi « intégrer » pour « résoudre » une équation différentielle.

Exemple 1.2.1 *Résoudre sur $I =]1, \infty[$ l'équation différentielle $xy' \ln x = (3 \ln x + 1)y$. On peut « séparer les variables » (x et y) en divisant par $yx \ln x$, ce qui est permis ssi $y \neq 0$ (car $x \ln x > 0$ d'après l'énoncé). On a*

$$\frac{y'}{y} = \frac{3 \ln x + 1}{x \ln x} \iff \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{3 \ln x + 1}{x \ln x}\,\mathrm{d}x + C$$

avec $C \in \mathbb{R}$, soit ($\frac{3 \ln x+1}{x \ln x} = \frac{3}{x} + \frac{1}{x \ln x}$)

$$\ln |y| = 3 \ln |x| + \ln |\ln x| + C' = \ln \left|x^3 \ln x\right| + C'\ .$$

(On a simplifié $\ln |...| = \ln(...)$ en utilisant que $x \in I \iff x > 1$.)
En prenant l'exponentielle de cette equation, on a finalement

$$y = C_2\, x^3 \ln x$$

avec $C_2 \in \mathbb{R}$: en effet, le signe de $C_2 (= \pm e^{C'})$ tient compte des deux possibilités pour $|y|$, et on vérifie que $C_2 = 0 \implies y = 0$ est aussi solution (mais pour laquelle le calcul précédent, à partir de la division par y, n'est pas valable.)

1.2.2 Détermination de la cte. d'intégration

La constante d'intégration C est fixée lorsqu'on demande que pour un $x = x_0$ donnée, on ait une valeur donnée de $y(x) = y(x_0) = y_0$. (On parle d'un *problème aux valeurs initiales*.)
On arrive au même résultat en travaillant dès l'intégration de l'équation différentielle avec des intégrales définis :

$$f(y).y' = g(x) \wedge y(x_0) = y_0 \iff \int_{y_0}^{y} f(\eta).\mathrm{d}\eta = \int_{x_0}^{x} g(\xi).\mathrm{d}\xi \; .$$

La fonction y ainsi obtenue est directement telle que $y(x_0) = y_0$, sans passer par la détermination de la constante d'intégration.

1.3 Equations différentielles linéaires

Définition 4 *Une équation différentielle d'ordre n est* **linéaire** *ssi elle est de la forme*

$$L(y) = f(x) \qquad (*)$$

avec

$$L(y) = a_0(x)\, y + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y'' + \cdots + a_n(x)\, y^{(n)} \; .$$

Proposition 5 *L'application $L : \mathcal{C}^n \to \mathcal{C}^0$ qui à la fonction y associe la nouvelle fonction $L(y)$, est une application linéaire.*

Démonstration : En effet,

$$\begin{aligned} L(y+z) &= \sum_{i=0}^{n} a_i(x)(y+z)^{(i)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{(i)} + \sum_{i=0}^{n} a_i(x) z^{(i)} \\ &= L(y) + L(z) \end{aligned}$$

et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} L(\lambda\, y) &= \sum_{i=0}^{n} a_i(x)(\lambda\, y)^{(i)} \\ &= \lambda \sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{(i)} = \lambda\, L(y) \end{aligned}$$

□

Définition 6 *L'équation différentielle*

$$L(y) = 0 \qquad (E.H.)$$

s'appelle équation homogène associée à $(*)$.

Proposition 7 *L'ensemble* S_0 *des solutions à* $(E.H.)$ *est le noyau de l'application linéaire* L*, c'est donc un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$*. L'ensemble* S *des solutions à* $(*)$ *est donné par*

$$S = y_p + S_0 = \{y_p + y_h ; y_h \in S_0\} \;\; \textit{avec} \;\; L(y_p) = f(x)$$

c'est-à-dire les solutions sont de la forme $y = y_p + y_h$*, ou* y_p *est une* **solution particulière** *de* $(*)$*, et* y_h *parcourt toutes les solutions de l'équation homogène* $(E.H.)$.

Démonstration : La première partie est évidente. En ce qui concerne la 2^e partie, d'une part toute fonction de la fome $y_p + y_h$ est solution de $(*)$: en effet, $L(y_p + y_h) = L(y_p) + L(y_h) = f(x) + 0 = f(x)$. D'autre part, soient y_1 et y_2 solutions à $(*)$, alors on peut voir y_1 comme la solution particulière y_p et toute autre solution y_2 vérifie $L(y_2 - y_1) = L(y_2) - L(y_1) = f(x) - f(x) = 0$, donc la différence $y_h = y_2 - y_1$ est bien une solution à $(E.H.)$, donc un élément de S_0.□

1.3.1 Principe de superposition

Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, une solution particulière est donnée par $y = y_1 + y_2$, où y_i est une solution à $L(y_i) = f_i(x)$ (pour $i = 1, 2$).

C'est une conséquence directe (voire la définition) de la linéarité de l'opérateur L.

On reviendra sur ce principe très important (voire fondamental notamment en ce qui concerne les lois de la nature) dans les cas particuliers des équations différentielles linéaires du 1er et du 2nd ordre.

1.4 Equations différentielles linéaires du 1^{er} ordre

Définition 8 *Une équation différentielle linéaire (EDL) du 1er ordre est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme*

$$a(x)\,y' + b(x)\,y = c(x) \qquad (E)$$

ou a, b, c sont des fonctions continues sur un même intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et on demandera $\forall x \in I : a(x) \neq 0$.
A cette équation différentielle on peut associer la même équation avec $c = 0$:

$$a(x)\,y' + b(x)\,y = 0 \qquad (E_0)$$

C'est **l'équation homogène** *associée à (EDL), ou équation sans second membre. (On la note aussi (E_h) ou $(E.H.)$.)*

1.4.1 Structure de l'ens. de solutions

Proposition 9 *L'ensemble des solutions S_0 à (E_0) est un sev. des fonctions $C^1(I)$. L'ensemble des solutions S à (E) est obtenu en ajoutant à toutes les solutions de (E_0) une solution particulière quelconque de (E).*

Démonstration : On vérifie que la fonction nulle et $\lambda + \mu$ fois une solution à (E_0) sont toujours des solutions à (E_0), donc c'est un s.e.v.

On vérifie que si on a deux solutions y_1 et y_2 à (E), alors leur différence est solution à (E_0). Donc réciproquement on obtient tous les $y_2 \in S$ en ajoutant à un quelconque $y_1 \in S$ tous les $y_0 \in \mathscr{S}_0$□

1.4.2 Résolution de l'équation homogène associée

En effet, $(E.H.)$ est une équation différentielle à var.séparées, en l'écrivant $\frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}$. En l'intégrant, on obtient

$$\ln|y| = \int -\frac{b(x)}{a(x)}\mathrm{d}x + C$$

et avec $K \in \left\{\pm e^C, 0\right\}$

$$y = K\,e^{F(x)}\ , \quad K \in \mathbb{R}\ , \quad F(x) = \int -\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x\ .$$

1.4.3 Solution particulière par variation de la constante

On cherche la solution particulière sous la forme $y = K(x)\,e^{F(x)}$, avec K une fonction à déterminer ("variation de la constante"). On trouve que y est solution ssi

$$K'(x) = \frac{c(x)}{a(x)}\,e^{-F(x)} \iff K(x) = \int \frac{c(x)}{a(x)}\,e^{-F(x)}\,\mathrm{d}x\ .$$

(on peut intéger car c'est une composée de fct.continues, et on peut oublier la constante car elle correspond à une solution de $(E.H.)$).
Une solution particulière est donc

$$y = e^{F(x)}\int \frac{c(x)}{a(x)}\,e^{-F(x)}\,\mathrm{d}x\ ,$$

et la solution générale est donc

$$y = e^{F(x)}\left(K + \int \frac{c(x)}{a(x)}\,e^{-F(x)}\,\mathrm{d}x\right)\ ,\ \ K \in \mathbb{R}\ ,\ \ F(x) = \int -\frac{b(x)}{a(x)}\,\mathrm{d}x$$

Exemple 1.4.1 *Résoudre sur $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle*

$$(\sin x)\,y' - (\cos x)\,y = x\ . \qquad (E)$$

Solution : *Résolvons d'abord sur I l'équation homogène*

$$(\sin x)\,y' - (\cos x)\,y = 0\ . \qquad (EH)$$

On obtient

$$\frac{y'}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} \Longrightarrow \ln|y| = \ln|\sin x| + k\ ,\ \ k \in \mathbb{R}$$

La solution générale de (EH) est donc

$$y = K\,\sin x\ ,\ \ K \in \mathbb{R}$$

(avec $K = \pm e^k$ pour tenir compte des valeurs absolues, et $K = 0$ étant solution aussi).
Cherchons ensuite une solution particulière de (E) sous la forme

$$y = K(x)\,\sin x\ ,\ \ K \in C^1(I)$$

(c'est-à-dire K est ici une fonction continûment dérivable sur I).
On a alors $y'(x) = K'(x)\,\sin x + K(x)\,\cos x$ ce qui donne dans (E) :

$$(\sin x)\,[K'(x)\,\sin x + K(x)\,\cos x] - (\cos x)\,K(x)\,\sin x = x$$

et comme dans la théorie générale (et c'est toujours ainsi par construction), il ne reste que le terme en $K'(x)$, soit :

$$\forall x \in I : K'(x)\sin^2 x = x \iff K'(x) = \frac{x}{\sin^2 x} \iff K(x) = \int \frac{x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\ .$$

On intègre par partie, en posant

$$u(x) = x,\ v'(x) = \frac{1}{\sin^2 x}\ \ et\ \ u'(x) = 1,\ v(x) = -\frac{1}{\tan x}\ ,$$

ce qui donne

$$K(x) = \frac{-x}{\tan x} + \int \frac{1}{\tan x}\,\mathrm{d}x = \frac{-x}{\tan x} + \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{-x}{\tan x} + \ln|\sin x| + C\ .$$

Sur I, $\sin x > 0$; **une** *solution particulière est donc obtenue pour $C = 0$,*

$$y = -x\cos x + (\sin x)\ln\sin x$$

et la solution générale de (E) est donné par

$$y = -x\cos x + (K + \ln\sin x)\sin x\ ,\quad K \in \mathbb{R}\ .$$

Remarque 1.4.1 *Si y_1 et y_2 sont deux solutions particulières à $(*)$, alors $y_1 - y_2$ est solution de $(E.H.)$, et la solution générale à $(*)$ est*

$$y = y_1 + c(y_1 - y_2)\ ,\quad c \in \mathbb{R}\ \textit{arbitraire}.$$

Changement de variable

De façon générale, pour résoudre une équation différentielle du 1er ordre, il faut trouver un moyen d'arriver à une équation différentielle à variables séparées. La méthode de la variation de la constante est en effet un moyen de passer de l'équation différentielle linéaire inhomogène (qui n'est pas à var.séparées) à une équation pour la *nouvelle fonction* $k(x) = y(x)/y_h(x)$ (où y_h, solution homogène, est une fonction connue, lorsqu'on a résolu (EH)) qui est en effet à variables séparées.

C'est donc en fait un *changement de variable* qui fait passer de l'équation pour y à une équation plus simple pour k, que l'on sait intégrer, et dont la solution permet de remonter à y.

De façon analogue, il existe souvent un changement de variable qui permet de passer d'une équation différentielle quelconque pour y à une équation différentielle linéaire pour une nouvelle fonction u, que l'on sait résoudre, et qui permet ensuite de trouver y.

Exemple 1.4.2 *L'équation de Bernoulli $y'\cos x + y\sin x + y^3 = 0$ devient une équation linéaire ($u' - 2\,u\tan x = 2/\cos x$) pour $u = \frac{1}{y^2}$.*
L'équation de Ricatti $y' = (y-1)(xy - y - x)$ admet la solution évidente $y = 1$, et on trouve les autres solutions en posant $y = 1 + \frac{1}{u}$; ce qui donne en effet une équation linéaire ($u' - u = 1 - x$) pour u.
(Exercice : resoudre ces deux équations différentielles.)

1.5 Equations différentielles linéaires du 2^e ordre à coefficients constants

On s'intéresse mainenant aux équations différentielles du 2e ordre, mais seules aux EDL ou les coefficients a_0, a_1, a_2 sont des constantes réelles.

1.5.1 Définitions

Définition 10 *Une EDL du 2^{nd} ordre à coeff. constants est une équation différentielle de la forme*

$$a\,y'' + b\,y' + c = f(x)\ , \tag{E}$$

ou $a, b, c \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$), et $f \in \mathcal{C}^0(I)$ (I ouvert de $\mathbb{R}$). L'équation homogène (ou sans second membre) associée est

$$a\,y'' + b\,y' + c = 0\ , \tag{$E.H.$}$$

D'après les résultats généraux on sait que l'ensemble des solutions à $(E.H.)$ est un e.v., et que la solution générale à (E) est de la forme $y = y_p + y_h$ (...).

Nous admettons les résultats supplémentaires :

Proposition 11

1. *Pour tout $x_0 \in I$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, (E) admet une unique solution y telle que $y(x_0) = \alpha$, $y'(x_0) = \beta$.*
2. *Les solutions à $(E.H.)$ sur I forment un e.v. de dimension 2 (sur $\mathbb{R}$), noté $S_2(I)$.*
3. *Si y_1, y_2 sont deux solutions indépendantes de $(E.H.)$ ($\{y_1, y_2\}$ libre dans $S_2(I)$), alors $\{y_1, y_2\}$ est une base de $S_2(I)$, c'est à dire $S_2(I) = \{\alpha\, y_1 + \beta\, y_2; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.*
4. *Pour $y_1, y_2 \in S_2(I)$, on définit* **le wronskien** $w : I \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \equiv y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x)\ .$$

Si $w(x_0) \neq 0$ pour un $x_0 \in I$, alors $w(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, et c'est une CNS pour que $\{y_1, y_2\}$ soit linéairement indépendant et donc une base de $S_2(I)$.

1.5.2 Résolution de l'équation homogène associée $(E.H.)$

On cherche la solution sous la forme $y = e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$. On a donc $y' = r\,y$ et $y'' = r^2\,y$, donc (E) devient $y(a\,r^2 + b\,r + c) = 0$.

Définition 12 *L'équation*

$$a\,r^2 + b\,r + c = 0 \qquad (EC)$$

se nomme **équation caractéristique** *de* $(E.H.)$.

Proposition 13 *Suivant le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$, on a les résultats suivants :*

$\Delta > 0$ **:** *(EC) admet 2 racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$, et*
$\boxed{y_1(x) = e^{r_1\,x},\ y_2(x) = e^{r_2\,x}}$ *est une base de $S_2(I)$.*

$\Delta = 0$ **:** *(EC) admet 1 racine double $r \in \mathbb{R}$, et*
$\boxed{y_1(x) = e^{r\,x},\ y_2(x) = x\,e^{r\,x}}$ *est une base de $S_2(I)$.*

$\Delta < 0$ **:** *(EC) admet 2 racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\,\beta$ et $r_2 = \alpha - i\,\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$), et*
$\boxed{y_1(x) = e^{\alpha\,x}\cos\beta x,\ y_2(x) = e^{\alpha\,x}\sin\beta y}$ *est une base de $S_2(I)$.*

Dans chacun des cas, la solution générale à $(E.H.)$ est donc $y = A\,y_1 + B\,y_2$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

<u>**Démonstration :**</u>

$\Delta > 0$ **:** Il est clair que $y_1, y_2(x)$ sont solutions à $(E.H.)$. Leur wronskien est égal à

$$\begin{vmatrix} e^{r_1\,x} & e^{r_2\,x} \\ r_1\,e^{r_1\,x} & r_2\,e^{r_2\,x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)\,x} \neq 0\ ,$$

donc y_1, y_2 sont indépendants et base de $S_2(I)$.

$\Delta = 0$ **:** On vérifie que $y_2(x) = x\,e^{r\,x}$ est solution de $(E.H.)$: $y_2'(x) = (r\,x + 1)\,e^{r\,x}$, $y_2''(x) = (r^2 x + 2r)\,e^{r_2\,x}$ et donc $a\,y_2''(x) + b\,y_2'(x) + c\,y_2(x) = e^{r\,x}[(ar^2 + br + c)x + 2ar + b] = 0$ car en effet $r = -b/2a$ (comme $\Delta = 0$).
Le wronskien est égal à

$$\begin{vmatrix} e^{r\,x} & x\,e^{r\,x} \\ r\,e^{r\,x} & (rx+1)\,,e^{r\,x} \end{vmatrix} = (rx + 1 - rx)e^{2\,r\,x} \neq 0\ ,$$

donc y_1, y_2 sont indépendants et base de $S_2(I)$.

$\Delta < 0$ **:** On a

$$y_1'(x) = e^{\alpha\, x}(\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x)$$
$$y_1''(x) = e^{\alpha\, x}(\alpha^2 \cos \beta x - 2\alpha\beta \sin \beta x - \beta^2 \cos \beta x)$$

et donc

$$a\, y_1''(x) + b\, y_1'(x) + c\, y_1(x)$$
$$= e^{\alpha\, x}[(a[\alpha^2 - \beta^2] + b\alpha + c) \cos \beta + (-2a\alpha\beta - b\beta) \sin \beta] = 0$$

les coefficients étant la partie réelle et imaginaire de $ar^2 + br + c = 0$. Le calcul est identique pour y_2.

Le wronskien est égal à

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha\, x} \cos \beta x & e^{\alpha\, x} \sin \beta x \\ e^{\alpha\, x}(\alpha \cos \beta x - \beta \sin \beta x) & e^{\alpha\, x}(\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) \end{vmatrix}$$

$$= e^{2\, \alpha\, x}(\beta[\cos^2 \beta + \sin^2 \beta] + [\alpha - \alpha] \sin \cos \beta x) \neq 0$$

car $\beta \neq 0$, donc y_1, y_2 sont indépendants et base de $S_2(I)$.

□

Ainsi, on a $S_2(I)$ dans tous les cas possibles.

1.5.3 Solution particulière à (E)

On distingue encore 2 cas particuliers et une méthode générale :

$f(x) = e^{\alpha x} P(x)$ ou $\alpha \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ (un polynôme).

On cherche la solution sous la forme $y = e^{\alpha x} Q(x)$, ou Q est un polynôme. dont on peut préciser le degré :
– si α n'est pas racine de (EC), alors $\deg Q = \deg P$;
– si α est l'une des deux racines de (EC), alors $\deg Q = \deg P + 1$;
– si α est racine double de (EC), alors $\deg Q = \deg P + 2$.

Remarques :
i) Cette méthode s'applique notamment pour $\alpha = 0$, c-à-d. $f(x) = P(x)$.
ii) On peut aussi chercher une solution sous la forme $y(x) = z(x)\, e^{\alpha x}$, où z est une fonction à déterminer ; en remplaçant ceci dans (E), on obtient une équation différentielle pour z, de laquelle on tire z (qui doit être égal à Q, modulo les ctes d'intégration qui correspondent à une solution homogène). Ce procédé est en fait équivalent à la méthode de la variation de la constante.

$f(x) = M \cos \omega x + N \sin \omega x$ où $\omega, M, N \in \mathbb{R}$.

On distingue encore une fois deux cas :

i) ω n'est pas racine de (EC) : Dans ce cas, les fonctions $x \mapsto \cos \omega x$, $x \mapsto \sin \omega x$ ne sont pas solutions de $(E.H.)$. Une solution particulière de (E) sera de la forme $y = A \cos \omega x + B \sin \omega x$, où les constantes $A, B \in \mathbb{R}$ se déterminent par identification.

ii) ω est racine de (EC), donc les fonctions $x \mapsto \cos\omega x$, $x \mapsto \sin\omega x$ sont solutions de $(E.H.)$. Une solution particulière de (E) sera de la forme $y = x(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$, où les constantes $A, B \in \mathbb{R}$ se déterminent par identification.

principe de superposition : Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, une solution particulière est donnée par $y = y_1 + y_2$, où y_i est une solution à $a\,y_i'' + b\,y_i' + c\,y_i = f_i(x)$ (pour $i = 1, 2$). (Conséquence de la linéarité de $L : y \mapsto a\,y'' + b\,y' + c\,y$.)

Exemple 1.5.1 *Résoudre $y'' + y = x + \cos 3x$ sur $I = \mathbb{R}$.*
a) équation homogène : L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$. La solution générale de $(E.H.)$ est donc $y = A\cos x + B\sin x$.
b) solution particulière à $y'' + y = x$: $y = x$ convient.
c) solution particulière à $y'' + y = \cos 3x$: En remplaçant $y = A\cos 3x + B\sin 3x$ dans l'équation, on trouve $(A-9A)\cos 3x + (B-9B)\sin 3x = \cos 3x$, donc $A = -\frac{1}{8}$ et $B = 0$.
d) conclusion : la solution générale est $y = x - \frac{1}{8}\cos 3x + A\cos x + B\sin x$.

méthode de variation des constantes. Soient y_1 et y_2 deux solutions indépendantes de $(E.H.)$. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y = A\,y_1 + B\,y_2$, où A et B sont des fonctions vérifiant $A'\,y_1 + B'\,y_2 = 0$. Ainsi, $y' = A\,y_1' + B\,y_2'$, et (E) devient $a(A'\,y_1' + B'\,y_2' = f(x)$ (car $a\,y_i'' + b\,y_i' + c\,y_i = 0$ pour $i = 1, 2$).

Donc, A', B' sont solutions du système

$$\begin{cases} A'y_1 + B'y_2 = 0 \\ A'y_1' + B'y_2' = \frac{1}{a}f(x) \end{cases}$$

Ce système se résoud aisément, ce qui donne A', B', puis A, B par intégration.

Exemple 1.5.2 *Résolvons $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$. La solution de $(E.H.)$ est $y_h = A\cos x + B\sin x$, $A, B \in \mathbb{R}$ (cf. exemple précédent)*
Cherchons une solution particulière. Les solutions $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$ sont indépendantes, en effet leur wronskien vaut $w(x) = -1$. Cherchons une solution sous la forme $y_p = A(x)\cos x + B(x)\sin x$, avec $A'y_1 + B'y_2 = 0$. A', B' sont solutions à

$$\begin{cases} A'\sin x + B'\cos x = 0 \\ A'\cos x - B'\sin x = \frac{1}{\sin^3 x} \end{cases}$$

donc

$$A' = \frac{1}{w(x)}\begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \frac{1}{\sin^3 x} & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{\cos x}{\sin^3 x},$$

$$B' = \frac{1}{w(x)}\begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & \frac{1}{\sin^3 x} \end{vmatrix} = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

avec les primitives

$$A = \frac{-1}{2\sin^2 x}, \quad B = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

On a donc la solution particulière

$$y_p = \frac{-1}{2\sin x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{\cos 2x}{2\sin x}\ ,$$

et la solution générale en ajoutant $y_h = A\cos x + B\sin x$.