Coniques

Plan du chapitre

1 Introduction

C'est Menechme qui a découvert les sections coniques. Il a d'abord étudié l'intersection d'un cône circulaire droit (c'est-à-dire un cône de révolution dont l'angle au sommet est droit) avec un plan perpendiculaire à une génératrice de ce cône. La courbe obtenue est une *parabole* (mot imaginé par Archimède). Puis, Menechme a fait varier l'angle au sommet du cône (en coupant toujours par un plan perpendiculaire à une génératrice) et obtenu tantôt une *ellipse* quand l'angle au sommet était aigu, et tantôt une *hyperbole*, quand l'angle au sommet était obtus.

C'est semble-t-il Apollonius de Perge qui a donné leurs noms à l'ellipse, la parabole et l'hyperbole, mais ce n'est pas lui qui les a imaginés. Il a systématisé l'étude des **sections coniques** en coupant un cône de révolution quelconque par un plan quelconque, dans n'importe quelle direction. Il a dégagé les notions d'*excentricité* et de *directrice*.

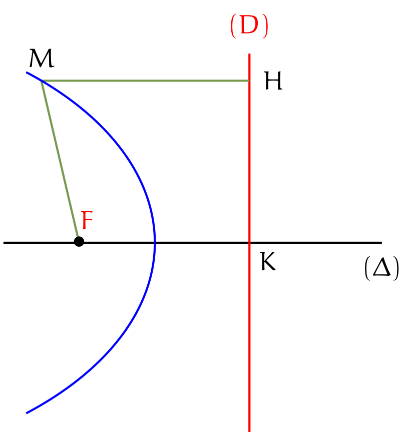
Le suffixe grec *bole* utilisé dans les mots parabole et hyperbole est le même que celui des mots discobole et symbole. Il signifie « lancer, jeter ». C'est clair pour le discobole mais moins pour le symbole : on a jeté (*bole*) ensemble (*sym*) deux objets (la colombe et la paix par exemple). Le mot parabole se traduit quant à lui littéralement par « jeter à côté » ou un peu plus clair « placer l'un à côté de l'autre pour comparer ». Ce que l'on compare, c'est, comme on va le voir plus loin, les distances d'un point M à un point F et à une droite (D).

Il y a de multiples présentations des coniques. Dans ce chapitre, on commence par la description à partir d'un foyer, d'une directrice et d'une excentricité. Cette description ne fournit pas toutes les sections coniques. On voit ensuite que l'ellipse et l'hyperbole peuvent être construites à partir de deux foyers et deux sommets par exemple. Nous étudions en fin de chapitre les courbes du second degré, qui fournissent toutes les sections possibles d'un cône de révolution par un plan et même un peu plus. Mais vous devrez admettre ce dernier résultat, car nous ne fera pas l'étude des sections coniques en dimension 3.

Un des intérêts majeurs des coniques est que les équations différentielles du second ordre régissant les trajectoires des planètes ont pour solutions des courbes du second degré, et une analyse plus fine montre que ces planètes, comètes, ...doivent se déplacer, soit sur des ellipses, soit sur des paraboles, soit sur des branches d'hyperboles.

2 Les coniques par foyer, directrice et excentricité

2.1 Définition



On se donne un point F, une droite (D) ne passant pas par F et un réel strictement positif e. La conique de **foyer** F, de **directrice** (D) et d'**excentricité** e est l'ensemble (Γ) des points du plan tel que $\dfrac{MF}{d(M,(D))} = e$. Ainsi, en notant H le projeté orthogonal du point M sur la directrice (D),

$$\forall M \in \mathscr{P},\ (M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MF = eMH).$$

La droite perpendiculaire à (D) et passant par F s'appelle l'**axe focal** de la conique (Γ). On le notera dorénavant (Δ). L'axe focal est un axe de symétrie de la conique (Γ). En effet, si M est un point du plan, en notant M' son symétrique par rapport à (Δ), H son projeté sur (D) et H' le projeté de M' sur (D), H' est alors le symétrique de H par rapport à (Δ) de sorte que $M'H' = MH$ (une symétrie orthogonale conservant les distances). D'autre part, F est son propre symétrique. Par suite,

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow MF = eMH \Leftrightarrow M'F = eM'H' \Leftrightarrow M' \in (\Gamma).$$

Le point d'intersection de la directrice (D) et de l'axe focal (Δ) sera dorénavant noté K.

2.2 Intersection d'une conique avec son axe focal

On cherche maintenant les points du plan qui sont à la fois sur la conique (Γ) et sur l'axe focal (Δ). On note que le projeté d'un point de (Δ) sur (D) est systématiquement le point K. Dans cette situation particulière, les points M, F et K étant alignés, les égalités de distance vont se traduire par des égalités de vecteurs.
Soit M un point du plan.

$$\begin{aligned} M \in (\Gamma) \cap (\Delta) &\Leftrightarrow M \in (\Delta) \text{ et } MF = eMK \Leftrightarrow \overrightarrow{MF} = -e\overrightarrow{MK} \text{ ou } \overrightarrow{MF} = e\overrightarrow{MK} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MF} + e\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \overrightarrow{MF} - e\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

Les deux dernières égalités s'interprètent en termes de barycentre, pour autant que la somme des coefficients considérés soit non nulle. La somme $1+e$ l'est systématiquement, mais la somme $1-e$ est non nulle si et seulement si $e \neq 1$. Il se dégage donc deux cas :

- Si $e \neq 1$, $(\Gamma) \cap (\Delta)$ est constituée de deux points, les points $A = \text{bar}(F(1), K(e))$ et $A' = \text{bar}(F(1), K(-e))$. Le point A appartient au segment $[F, K]$ contrairement au point A'. Nous verrons deux paragraphes plus loin que c'est le cas de l'ellipse et de l'hyperbole. Les points A et A' sont les futurs sommets de l'ellipse ou de l'hyperbole.
- Si $e = 1$, l'équation $\overrightarrow{MF} + e\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{0}$ (d'inconnue M) s'écrit plus précisément $\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{0}$ et admet une et une seule

solution, le milieu S de $[F, K]$ (S pour sommet de la parabole que nous allons étudier au paragraphe suivant). L'équation $\overrightarrow{MF} - e\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{0}$ s'écrit quant à elle $\overrightarrow{MF} - \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{0}$ ou encore $\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{0}$. Cette équation n'a pas de solution car $F \notin (D)$.

3 La parabole ($e = 1$)

3.1 Définition d'une parabole

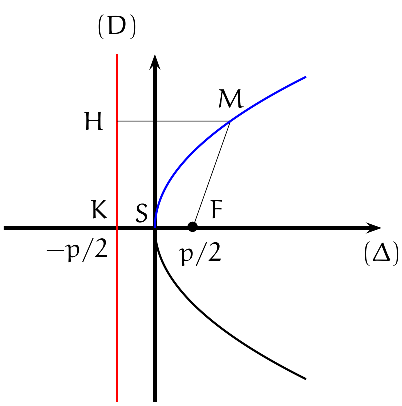
Définition 1. Soient F un point et (D) une droite ne passant pas par F. La parabole (P) de foyer F et de directrice (D) est la conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité 1 ou encore l'ensemble des points à égale distance de F et de (D).

La parabole sera notée (P). L'axe focal de la parabole sera comme précédemment noté (Δ) : c'est la droite passant par F et orthogonale à (D). (Δ) est un axe de symétrie de la parabole. L'intersection de (Δ) et de (P) est notée S : S est le sommet de la parabole. C'est le milieu du segment $[F, K]$, où K est le point d'intersection de (Δ) et de (D).

➢ **Commentaire** . *Une parabole est donc un objet très précis, régi par des contraintes géométriques très strictes, et une courbe qui a l'allure d'une parabole (comme par exemple, les graphes des fonctions $x \mapsto x^4$ ou $x \mapsto \text{ch}(x)$) n'est pas forcément une parabole.*

On doit alors donner un sens précis à un abus de langage usuel : quand on parle de branche parabolique pour un graphe de fonction, on ne dit pas qu'une partie de son graphe est un morceau de parabole, mais que cette même partie a l'allure d'un morceau de parabole.

3.2 Equation réduite d'une parabole



La tradition veut que l'on étudie la parabole quand celle-ci est « placée horizontalement et tournée vers la droite ». Cette description ne correspond donc pas à ce à quoi on est habitué au lycée avec l'équation $y = ax^2 + bx + c$.

On pose $\boxed{p = FK}$. p s'appelle le **paramètre** de la parabole. C'est ce paramètre qui donne à la parabole sa forme plus ou moins évasée.

On choisit un repère orthonormé $(S, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, d'origine S le sommet de la parabole, d'axe des abscisses l'axe focal (Δ), tel que le point F a pour coordonnées $(p/2, 0)$. Dans ce repère, l'abscisse de F est strictement positive et le point K a pour coordonnées $(-p/2, 0)$.

Soient $M(x, y)$ un point du plan et $H(-p/2, y)$ son projeté orthogonal sur (D).

$$M \in (P) \Leftrightarrow MF^2 = MH^2 \Leftrightarrow (x - \frac{p}{2})^2 + y^2 = (x + \frac{p}{2})^2 \Leftrightarrow y^2 = 2px.$$

Dans le repère ci-dessus,

la parabole a pour équation $y^2 = 2px$ (**équation réduite** de la parabole).

L'égalité $y^2 = 2px$ équivaut à $y = \sqrt{2px}$ ou $y = -\sqrt{2px}$. La parabole est donc ici pensée comme la réunion des graphes des fonctions $x \mapsto \sqrt{2px}$ et $x \mapsto -\sqrt{2px}$. On doit noter que l'abscisse $\frac{p}{2}$ du foyer est **le quart** du coefficient $2p$ de x.

Inversement, la courbe d'équation $y^2 = 2px$, $p > 0$ donné, est une parabole et on lit dans l'équation la valeur du paramètre p et donc la distance FK et finalement les coordonnées de F et de K. **Cette équation a été fournie dans un repère précis**, et on doit savoir adapter notre lecture si notre repère n'est pas celui envisagé ci-dessus.

Considérons par exemple, l'équation $y^2 = -2x$. Si on remplace x par $-X$ et y par Y, c'est-à-dire si on change l'orientation de l'axe des abscisses, la parabole d'équation $y^2 = -2x$ dans le repère initial, a maintenant pour équation $Y^2 = 2X$. En référence au cours ci-dessus, on lit les éléments de la parabole : son paramètre vaut 1 et dans le **nouveau repère**, son foyer a pour coordonnées $(1/2, 0)$ et sa directrice a pour équation $X = -\frac{1}{2}$, ou encore dans l'ancien repère, F a pour coordonnées $(-1/2, 0)$ et (D) a pour équation $x = 1/2$. De même, si dans l'équation $x^2 = 2y$, on remplace x par Y et y par X, ce qui correspond à un échange des axes de coordonnées, l'équation s'écrit $Y^2 = 2X$. Dans ce cas, l'axe focal est $(OX) = (Oy)$, le foyer est sur (Oy) et a donc une abscisse nulle dans le repère initial...

Dans la pratique, **il n'est pas nécessaire d'effectuer explicitement ces changements de repère** et vous pouvez donc oublier les remarques ci-dessus. On adapte simplement notre lecture de l'équation par la lecture d'un dessin, en ayant conscience que **le foyer est sur l'axe focal** et toujours **à l'intérieur de la parabole** et la directrice est à l'extérieur. On a résumé dans un tableau les situations usuelles.

Equation $y^2 = 2kx$, $k > 0$ (parabole de direction (Ox) tournée vers les $x > 0$).
Sommet $S(0,0)$, axe focal (Ox) $p = k$, foyer $F(k/2, 0)$, directrice $(D)\ :\ x = -\dfrac{k}{2}$.

Equation $y^2 = 2kx$, $k < 0$ (parabole de direction (Ox) tournée vers les $x < 0$).
Sommet $S(0,0)$, axe focal (Ox), $p = -k$, foyer $F(k/2, 0)$, directrice $(D)\ :\ x = -\dfrac{k}{2}$.

Equation $x^2 = 2ky$, $k > 0$ (parabole de direction (Oy) tournée vers les $y > 0$).
Sommet $S(0,0)$, axe focal (Oy), $p = k$, foyer $F(0, k/2)$, directrice $(D)\ :\ y = -\dfrac{k}{2}$.

Equation $x^2 = 2ky$, $k < 0$ (parabole de direction (Oy) tournée vers les $y < 0$).
Sommet $S(0,0)$, axe focal (Oy), $p = -k$, foyer $F(0, k/2)$, directrice $(D)\ :\ y = -\dfrac{k}{2}$.

Equation $(y - y_0)^2 = 2k(x - x_0)$, $k > 0$.
Sommet $S(x_0, y_0)$, axe focal $(\Delta)\ :\ y = y_0$, $p = k$,
foyer $F(x_0 + k/2, y_0)$, directrice $(D)\ :\ x = x_0 - \dfrac{k}{2}$.

Exercice 1. Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
Equation de la parabole (P_1) de foyer $F(1,2)$ et de directrice $(D)\ :\ x = -3$ et de la parabole (P_2) de foyer $F(0,0)$ et de directrice $(D)\ :\ y = x + 1$.

Solution.
1) Soit $M(x,y) \in \mathcal{P}$.

$$M(x,y) \in (P_1) \Leftrightarrow MF^2 = (d(M,(D))^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x+3)^2 \Leftrightarrow y^2 - 4y - 8x - 4 = 0.$$

2) Soit $M(x,y) \in \mathcal{P}$.

$$M(x,y) \in (P_1) \Leftrightarrow MF^2 = (d(M,(D))^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{x - y + 1}{\sqrt{2}}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0.$$

Exercice 2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
Nature et éléments caractéristiques de la courbe d'équation :
1) $y^2 = 2x$, **2)** $y^2 = -x$, **3)** $y = x^2$, **4)** $y = -\dfrac{x^2}{2}$, **5)** $y = x^2 + 3x + 2$, **6)** $y^2 + 6y + 4x - 3 = 0$.

Solution. Toutes ces courbes sont des paraboles.
1) Sommet O, axe focal $(0x)$, paramètre $p = 1$, foyer $F(1/2, 0)$ et directrice $(D)\ :\ x = -1/2$.
2) Sommet O, axe focal $(0x)$, paramètre $p = 1/2$, foyer $F(-1/4, 0)$ et directrice $(D)\ :\ x = 1/4$.
3) Sommet O, axe focal $(0y)$, paramètre $p = 1/2$, foyer $F(0, 1/4)$ et directrice $(D)\ :\ y = -1/4$.
4) Sommet O, axe focal $(0y)$, paramètre $p = 1$, foyer $F(0, -1/2)$ et directrice $(D)\ :\ y = 1/2$.
5) $y = x^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow (x + \dfrac{3}{2})^2 = (y + \dfrac{1}{4})$. Parabole de sommet $S(-3/2, -1/4)$, d'axe focal $(\Delta)\ :\ x = -3/2$, de paramètre $p = 1/2$, de foyer $F = S + (0, p/2) = (-3/2, 0)$ et de directrice $(D)\ :\ y = y_S - p/2 = -1/2$.
6) $y^2 + 6y + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow (y+3)^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow (y+3)^2 = -4(x-3)$. Parabole de sommet $S(3, -3)$, d'axe focal $(\Delta)\ :\ y = -3$, de paramètre $p = 2$, de foyer $F = S - (p/2, 0) = (2, -3)$ et de directrice $(D)\ :\ x = x_S + p/2 = 4$.

$\gg$ **Commentaire .** *En 2), puisque l'on doit avoir $-x = y^2 \geq 0$, la parabole est tournée vers les $x < 0$. Le foyer a donc une abscisse strictement négative. En 3) et 4), les équations doivent être écrites avec le carré isolé en premier membre ($x^2 = y$ et $x^2 = -2y$). En 6), on doit prendre garde au fait qu'un changement d'origine s'écrit $\left\{\begin{array}{l} x = x_{O'} + X \\ y = y_{O'} + Y \end{array}\right.$. En conséquence, l'équation ne doit pas être écrite sous la forme $(y+3)^2 = -4x + 12$, mais sous la forme $(y+3)^2 = -4(x-3) (\Leftrightarrow Y^2 = -4X^2)$. Sinon, pour bien voir, construisez chacune des paraboles précédentes avant de répondre.*

3.3 Paramétrisation de la parabole

Soit (P) une parabole. Il existe un repère dans lequel (P) admet pour équation cartésienne $y^2 = 2px$. La parabole est alors l'ensemble des $(\frac{t^2}{2p}, t)$, $t \in \mathbb{R}$. On a choisi y comme paramètre. On peut également choisir x mais c'est plus maladroit car apparaissent des cas de figure superflus et des $\sqrt{}$ inutiles.

Une paramétrisation de la parabole d'équation $y^2 = 2px$: $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Il existe un autre repère dans lequel la parabole admet pour équation $x^2 = 2py$ et une autre paramétrisation est $\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = \frac{t^2}{2p} \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

3.4 Tangente en un point de la parabole

Soit (P) la parabole de foyer F et de directrice (D). Soit p le paramètre de (P). Il existe un repère dans lequel (P) admet pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

Soient y_0 un réel puis $x_0 = \dfrac{y_0^2}{2p}$. Le vecteur dérivé en y_0 est $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(y_0) = (\dfrac{y_0}{p}, 1)$. Ce vecteur est non nul et donc, (P) admet une tangente (T_0) en $M(y_0)$. De plus,

$$M(x,y) \in (T_0) \Leftrightarrow \left|\begin{array}{cc} x - x_0 & y_0/p \\ y - y_0 & 1 \end{array}\right| = 0 \Leftrightarrow (x - x_0) - \frac{y_0}{p}(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow y_0(y - y_0) = p(x - x_0)$$
$$\Leftrightarrow y_0 y = p(x - x_0) + y_0^2 \Leftrightarrow y_0 y = p(x - x_0) + 2px_0 \Leftrightarrow y_0 y = p(x + x_0).$$

La tangente à la parabole (P) d'équation $y^2 = 2px$ en le point $M_0(x_0, y_0)$ admet pour équation cartésienne :

$$\boxed{y_0 y = p(x + x_0)}.$$

On verra en fin de ce chapitre (voir page 22) que cette équation s'obtient à partir d'une règle très générale appelée **règle de dédoublement des termes**.

3.5 Construction de la parabole par points et tangentes

Démontrons maintenant une propriété remarquable de la tangente à (P) en M_0, aux conséquences pratiques variées.

Théorème 1. Soit (P) une parabole de foyer F et de directrice (D). Soient M_0 un point de (P) et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur (D). La tangente (T_0) en M_0 à (P) est la médiatrice du segment $[F, H_0]$, et donc aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{FM_0H_0}$.

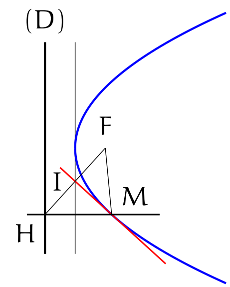
Démonstration . On note p le paramètre de (P). On choisit un repère orthonormé dans lequel (P) admet pour équation $y^2 = 2px$. D'après le paragraphe précédent, (T_0) admet pour équation dans ce repère : $y_0 y = p(x + x_0)$.

Soient alors (d) la médiatrice du segment $[F, H_0]$ et I le milieu du segment $[F, H_0]$. On a $F(p/2, 0)$, $H_0(-p/2, y_0)$ et donc $I(0, y_0/2)$. Ainsi,

$$M(x,y) \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{H_0F} = 0 \Leftrightarrow p(x - 0) - y_0(y - \frac{y_0}{2}) = 0 \Leftrightarrow y_0 y = px + \frac{y_0^2}{2} = p(x + x_0).$$

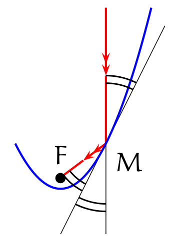
(d) et (T_0) sont donc effectivement une seule et même droite. Maintenant, puisque $M_0F = M_0H_0$, le triangle (FM_0H_0) est isocèle en M_0 et la médiatrice du segment $[F, H]$ est également la bissectrice de l'angle $\widehat{FM_0H_0}$. ❑

On peut alors fournir une construction de la parabole par points et tangentes, à partir de sa directrice (D) et de son foyer F.



Donnez vous donc une droite (D) et un point F non sur (D). Construisez (Δ) et donc le point K. Placez le sommet S de la parabole, qui est le milieu de $[FK]$. Donnez vous ensuite un point H sur la directrice (D). Tracez (en trait léger) la perpendiculaire à (D) passant par H (le point M de (P) dont le projeté orthogonal est H est sur cette droite). Tracez aussi (en trait léger) la médiatrice du segment $[F, H]$. Le point M est à l'intersection de ces deux droites, et de plus, la tangente en M à (P) est la médiatrice qui a servi à construire M. En recommençant avec sept ou huit autres points H, vous voyez surgir votre parabole avec ses tangentes.

Une conséquence pratique de ce résultat est la suivante : un rayon incident (sonore ou lumineux) arrive parallèle à l'axe de la parabole. Il tape sur la parabole en un point M puis se réfléchit. On sait que l'angle incident (c'est-à-dire plus précisément, l'angle que fait le rayon **avec la tangente** à la parabole) est égal à l'angle réfléchi. Ce rayon part donc au foyer. Inversement, un rayon issu du foyer et qui se réfléchit sur la parabole, repart parallèlement à l'axe de la parabole.



Nous utilisons surtout cette propriété géométrique en dimension 3. On fait tourner une parabole autour de son axe et on obtient un paraboloïde de révolution, encore appelé abusivement parabole dans la vie courante.

Si les rayons du soleil viennent taper sur le paraboloïde pourvu d'un revêtement réfléchissant, ceux-ci vont se reconcentrer au foyer et une feuille de papier placée en ce point s'enflammera. C'est d'ailleurs là l'origine du mot foyer. Le four solaire d'Odeillo (dans les Pyrénées) utilise ce principe (les dimensions du miroir parabolique sont environ 100m de large pour 20m de haut). Les paraboles qui nous permettent de recevoir les émissions de télévision également, mais il n'est alors plus question d'enflammer quoi que ce soit. Les phares paraboliques des voitures utilisent cette proriété en sens inverse : l'ampoule est placée au foyer du paraboloïde et le phare éclaire donc droit devant lui (heureusement).

4 L'ellipse ($0 < e < 1$) et l'hyperbole ($e > 1$)

4.1 Notations et calculs communs à l'ellipse et à l'hyperbole

On revient à la fin du paragraphe 1. Quand $e \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, l'intersection de la conique (Γ) et de son axe focal (Δ) est constituée de deux points distincts. Les points $A = \text{bar}(F(1), K(e))$ et $A' = \text{bar}(F(1), K(-e))$. On note alors O le milieu de $[A, A']$ (on a donc $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$). On pose $a = OA$ et $c = OF$.

4.1.1 Position relative des points O, A, F et K.

$$\left\{\begin{array}{l} A = \text{bar}(F(1), K(e)) \\ A' = \text{bar}(F(1), K(-e)) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AF} + e\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{A'F} - e\overrightarrow{A'K} = \overrightarrow{0} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{OF} + e\overrightarrow{OK} = (e+1)\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OF} - e\overrightarrow{OK} = (1-e)\overrightarrow{OA'} = (e-1)\overrightarrow{OA} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\overrightarrow{OF} = 2e\overrightarrow{OA} \quad (①+②) \\ 2e\overrightarrow{OK} = 2\overrightarrow{OA} \quad (①-②) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{OF} = e\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OK} = \dfrac{1}{e}\overrightarrow{OA} \end{array}\right. .$$

Une conséquence de ces calculs est que $OF = eOA$ et $OK = \frac{1}{e}OA$. Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{c} \overrightarrow{OF} = e\overrightarrow{OA} \text{ et } c = ea \text{ ou aussi } e = \dfrac{c}{a}, \\ \overrightarrow{OK} = \dfrac{1}{e}\overrightarrow{OA} \text{ et } OK = \dfrac{a}{e} = \dfrac{a^2}{c}. \end{array}}$$

On peut noter que, puisque $e \neq 1$, on a $c \neq a$.

4.1.2 Equation réduite de l'ellipse et de l'hyperbole.

On choisit un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, d'origine O et d'axe des abscisses (Ox) tel que A ait pour coordonnées $(a, 0)$. Le point F a alors pour coordonnées $(c, 0)$ et la directrice (D) a pour équation $x = \dfrac{a^2}{c}$. Le calcul qui suit est commun à l'ellipse et l'hyperbole.

$$M(x,y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow FM^2 = e^2(d(M,(D))^2 \Leftrightarrow (x-c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}(x - \frac{a^2}{c})^2 \text{ (puisque } e = \frac{c}{a})$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2 \Leftrightarrow \frac{a^2-c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1 \text{ (après division par le réel non nul } a^2 - c^2)$$

Ainsi, dans le repère ci-dessus, (Γ) admet pour équation

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1}.$$

On doit noter que le point O est centre de symétrie de (Γ). En effet,

$$M(x,y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{a^2-c^2} = 1 \Leftrightarrow s_O(M) \in (\Gamma).$$

Pour cette raison, l'ellipse et l'hyperbole sont appelées **coniques à centre**.

De même, nous savons déjà que l'axe focal de (Γ) (qui est ici l'axe des abscisses) est un axe de symétrie, ce que l'on redécouvre dans l'équivalence $(x,y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow (x,-y) \in (\Gamma)$. Mais l'axe des ordonnées de notre repère est également axe de symétrie de (Γ) (car $(x,y) \in (\Gamma) \Leftrightarrow (-x,y) \in (\Gamma)$). Ce deuxième axe de symétrie (Δ') est l'**axe non focal** de la conique (Γ).

Par symétrie soit par rapport à O, soit par rapport à (Δ'), on peut alors définir F' le symétrique du foyer F, (D') la symétrique de la directrice (D) et K' le point d'intersection de (D') et de (Δ). Il est clair par symétrie que la conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e est aussi la conique de foyer F', de directrice (D') et d'excentricité e. Ainsi, une ellipse ou une hyperbole ont deux foyers et deux directrices allant par paires (et aussi deux axes et un centre).

4.2 L'ellipse

Définition 2. Une ellipse est une conique d'excentricité $e \in]0,1[$.

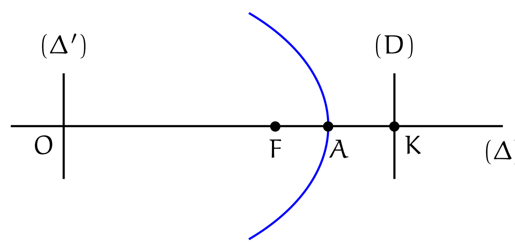
Dans ce cas, $OF = eOA < OA$ et $OK = \frac{1}{e}OA > OA$. Les points O, F, A et K sont donc disposés comme le montre la figure ci-contre.
Les formules $OF = eOA$ et $OK = \frac{1}{e}OA$ signifient alors pour l'ellipse que, à partir du point O,

le foyer F est e fois plus près

que le point A et

le point K est $\frac{1}{e}$ fois plus loin

que le point A.



C'est dans le cas de l'ellipse que le mot *excentricité* prend tout son sens : si $OA = 1$ (c'est-à-dire si OA est l'unité de longueur) alors $e = c$ est l'écartement du foyer par rapport au centre, ce centre étant lui-même pensé comme centre d'un cercle (de centre O et de rayon OA) qui s'est petit à petit aplati au fur et à mesure que le foyer, initialement en O, s'écartait de O pour se diriger vers le point fixe A.

Le cercle, qui n'est pas apparu dans la description des coniques par foyer, directrice et excentricité, peut d'ailleurs être pensé conventionnellement comme une ellipse d'excentricité 0 et de directrice à l'infini. Par exemple, dans le cas limite $e = 0$ qui fournit $c = 0$, l'équation de (Γ) obtenue dans le paragraphe précédent s'écrit : $x^2 + y^2 = a^2$.

Equation réduite d'une ellipse. Puisque $0 < e < 1$, on a $c < a$. Par suite, $a^2 - c^2 > 0$ et on peut poser $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ ce qui s'écrit encore

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

(on verra plus loin l'interprétation géométrique du nombre b et de l'égalité de Pythagore $a^2 = b^2 + c^2$). Dans le repère défini au paragraphe précédent, l'ellipse admet pour équation :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (équation réduite d'une ellipse)}}$$

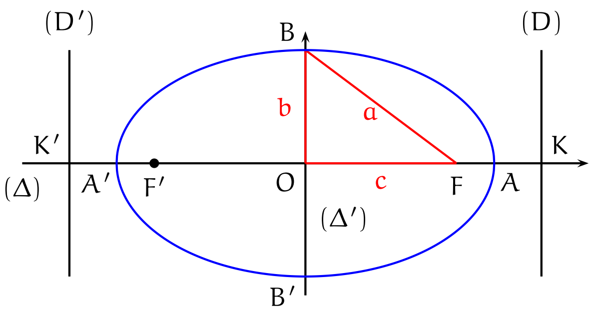
Etude de l'équation réduite et construction de l'ellipse.

• Tout d'abord, si $M(x,y)$ est un point de l'ellipse, $\dfrac{x^2}{a^2}=1-\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1$ avec égalité si et seulement si $y=0$. Par suite, l'abscisse x de M vérifie $|x|\leq a$ ou encore $-a\leq x\leq a$ avec égalités effectivement obtenues pour les points $A(a,0)$ et $A'(-a,0)$. De même, $-b\leq y\leq b$ avec égalités effectivement obtenues pour les points $B(0,b)$ et $B'(0,-b)$. Les points A, A', B et B' sont les **quatre sommets** de l'ellipse. A et A' sont sur l'axe focal et B et B' sont sur l'axe non focal. Ici, on a $OB=OB'=b=\sqrt{a^2-c^2}<a=OA=OA'$. Pour cette raison, le segment $[A,A']$ est appelé le **grand axe** de l'ellipse et le segment $[B,B']$, le **petit axe** de l'ellipse. Par abus de langage, l'expression *grand axe* désigne parfois l'axe focal ou aussi la longueur AA'. On parle par exemple de l'ellipse de *demi-grand axe* a et de *demi-petit axe* b.

• Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, l'égalité $\dfrac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ équivaut à $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ ou $y=-\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. L'ellipse est donc la réunion des graphes des fonctions $f_1\ :\ x\mapsto\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ et $f_2=-f_1$. L'étude de f_1 est simple et le graphe est aisé à construire.

• L'égalité de PYTHAGORE $a^2=b^2+c^2$ fournit une construction du foyer quand on a les sommets A et B.

Nous résumons maintenant le cours sur l'ellipse. L'étude de la tangente en un point de l'ellipse sera traitée plus loin.



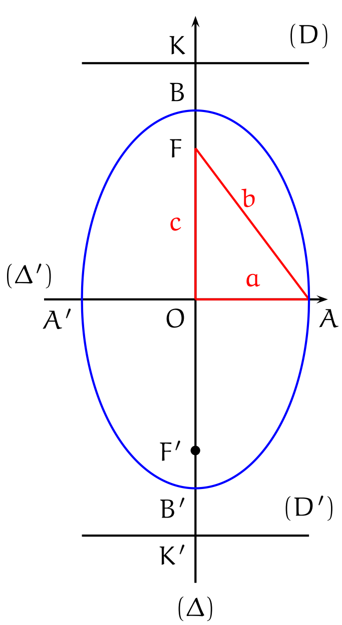
$a=OA=OA'$, $b=OB=OB'$, $c=OF=OF'$.
$a^2=b^2+c^2$, $a>b$ et $a>c$.
Axe focal (Ox) et axe non focal (Oy).

Equation réduite $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

$e=\dfrac{c}{a}$, $OF=OF'=eOA$,
Foyers $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$.

$OK=OK'=\dfrac{a}{e}=\dfrac{a^2}{c}$,
Directrices $(D)\ :\ x=\frac{a^2}{c}$ et $(D')\ :\ x=-\frac{a^2}{c}$.

Dans le cours qui vient de défiler, avoir choisi pour axe focal l'axe (Ox) a eu pour conséquence de tracer l'ellipse « à l'horizontale » ce qui est équivalent à l'inégalité $a>b$. Si on doit faire face à une équation du type $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $b>a$, la démarche consiste à priori à se ramener à la situation précédente par un changement de repère : on pose $x=Y$ et $y=X$, ce qui correspond à un échange des axes de coordonnées, de sorte que le plus grand des deux nombres a^2 ou b^2, à savoir b^2 est maintenant « sous X^2 » dans l'équation $\dfrac{X^2}{b^2}+\dfrac{Y^2}{a^2}=1\ldots$ Mais comme pour la parabole, il n'est pas besoin de faire ce changement de repère, et on adapte nos formules par simple lecture d'un dessin.



$a=OA=OA'$, $b=OB=OB'$, $c=OF=OF'$.
$b^2=a^2+c^2$, $b>c$ et $b>a$
Axe focal (Oy) et axe non focal (Ox).

Equation réduite $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

$e=\dfrac{c}{b}$, $OF=OF'=eOB$,
Foyers $F(0,c)$ et $F'(0,-c)$.

$OK=OK'=\dfrac{b}{e}=\dfrac{b^2}{c}$,

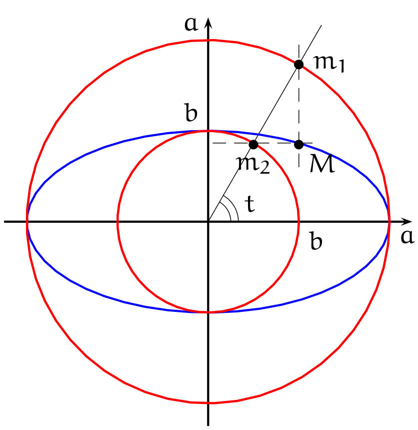
Directrices $(D)\ :\ y=\dfrac{b^2}{c}$ et $(D')\ :\ y=-\dfrac{b^2}{c}$.

Exercice 3. Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
Nature et éléments caractéristiques des courbes d'équations :
1) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$, **2)** $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$, **3)** $2x^2+y^2=2$, **4)** $x^2+x+2y^2+4y=0$.

Solution.
1) Ellipse de centre O. $a=5>3=b$. Donc, axe focal (Ox) et axe non focal (Oy). Sommets $A(5,0)$, $A'(-5,0)$, $B(0,3)$ et $B'(0,-3)$.
$c=\sqrt{a^2-b^2}=4$ et donc, foyers $F(4,0)$ et $F'(-4,0)$. Excentricité $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}$.
$x_K=\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{25}{4}$ et donc, directrices $(D):x=\dfrac{25}{4}$ et $(D'):x=-\dfrac{25}{4}$.
2) Ellipse de centre O. $a=4<5=b$. Donc, axe focal (Oy) et axe non focal (Ox). Sommets $A(4,0)$, $A'(-4,0)$, $B(0,5)$ et $B'(0,-5)$.
$c=\sqrt{b^2-a^2}=3$ et donc, foyers $F(0,3)$ et $F'(0,-3)$. Excentricité $e=\dfrac{c}{b}=\dfrac{3}{5}$.
$y_K=\dfrac{b^2}{c}=\dfrac{25}{3}$ et donc, directrices $(D):y=\dfrac{25}{3}$ et $(D'):x=-\dfrac{25}{3}$.
3) $2x^2+y^2=2\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1$. Ellipse de centre O. $a=1<\sqrt{2}=b$. Donc, axe focal (Oy) et axe non focal (Ox).
Sommets $A(1,0)$, $A'(-1,0)$, $B(0,\sqrt{2})$ et $B'(0,-\sqrt{2})$.
$c=\sqrt{b^2-a^2}=1$ et donc, foyers $F(0,1)$ et $F'(0,-1)$. Excentricité $e=\dfrac{c}{b}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
$y_K=\dfrac{b^2}{c}=2$ et donc, directrices $(D):y=2$ et $(D'):y=-2$.

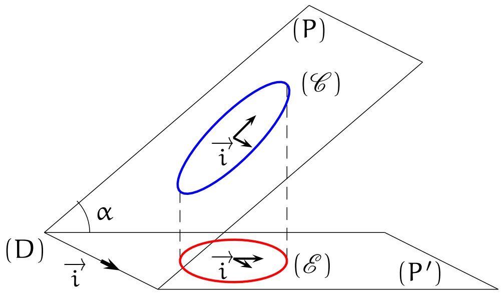
4) $x^2+x+2y^2+4y=0\Leftrightarrow(x+\dfrac{1}{2})^2+2(y+1)^2=\dfrac{9}{4}\Leftrightarrow\dfrac{(x+\frac{1}{2})^2}{(3/2)^2}+\dfrac{(y+1)^2}{(3/2\sqrt{2})^2}=1$.
Ellipse de centre $\Omega(-\dfrac{1}{2},-1)$. $a=\dfrac{3}{2}>\dfrac{3}{2\sqrt{2}}=b$. Donc, axe focal (Ωx) et axe non focal (Ωy).
Sommets $A=\Omega+(a,0)=(1,-1)$, $A'=\Omega-(a,0)=(-2,-1)$, $B=\Omega+(0,b)=(-\dfrac{1}{2},-1+\dfrac{3}{2\sqrt{2}})$ et $B'(-\dfrac{1}{2},-1-\dfrac{3}{2\sqrt{2}})$.
$c=\sqrt{a^2-b^2}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ et donc, foyers $F=\Omega+(c,0)=(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2\sqrt{2}},-1)$ et $F'=\Omega-(c,0)=(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2\sqrt{2}},-1)$.
Excentricité $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
$x_K=x_\Omega+\dfrac{a}{e}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ et $x_{K'}=x_\Omega-\dfrac{a}{e}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ et donc, directrices $(D):x=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ et $(D'):x=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Image d'un cercle par une affinité orthogonale



Le point courant $M(a\cos(t),b\sin(t))$ de l'ellipse $\mathscr{E}$ ci-contre est à la fois l'image du point $m_1(a\cos(t),a\sin(t))$ par l'affinité orthogonale d'axe (Ox) et de rapport $\dfrac{b}{a}$ et l'image du point $m_2(b\cos(t),b\sin(t))$ par l'affinité orthogonale d'axe (Oy) et de rapport $\dfrac{a}{b}$. Le point M est donc à l'intersection de la perpendiculaire à (Ox) passant par m_1 et de la perpendiculaire à (Oy) passant par m_2. Ceci fournit une construction du point M à partir des points d'angle polaire t du **petit cercle** et du **grand cercle** de l'ellipse.
De manière générale, l'image du grand cercle ci-contre par l'affinité d'axe (Ox) et de rapport $\dfrac{b}{a}$ est l'ellipse $\mathscr{E}$.

Appliquons ce résultat à la détermination de la projection orthogonale d'un cercle de l'espace sur un plan.



$(\mathscr{C})$ est un cercle de l'espace de dimesion 3, de centre O et de rayon $R > 0$. (P) est le plan de ce cercle. On veut projeter orthogonalement $(\mathscr{C})$ sur un plan (P'), sécant à (P) en une droite (D) et non perpendiculaire à (P). On note α l'angle entre (P) et (P') ($\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$).

On se donne un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de (P) où de plus $\overrightarrow{i}$ dirige (D). Le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de (P) se projette sur (P') en un repère orthogonal $(O', \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}_1)$ où $\|\overrightarrow{j}_1\| = \cos(\alpha)$. Si on pose $\mathcal{R}' = (O', \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}')$ où $\overrightarrow{i}' = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}' = \frac{1}{\cos(\alpha)}\overrightarrow{j}_1$, alors $\mathcal{R}'$ est un repère orthonormé de (P'). Comme les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ se projettent respectivement en $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{i}'$ et $\overrightarrow{j}_1 = \cos(\alpha)\overrightarrow{j}'$, un point $M = O + x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ de (P) se projette en le point $M' = O' + x\overrightarrow{i}' + y\overrightarrow{j}_1 = O' + x\overrightarrow{i}' + y\cos(\alpha)\overrightarrow{j}'$ de (P'). En particulier, le point courant $M(t) = O + R(\cos(t)\overrightarrow{i} + \sin(t)\overrightarrow{j})$ de $(\mathscr{C})$ est projeté en le point $O' + R\cos(t)\overrightarrow{i}' + R\cos(\alpha)\sin(t)\overrightarrow{j}'$ de (P'). Le sous-ensemble de (P') cherché est donc l'image du cercle de centre O' et de rayon R par l'affinité orthogonale de rapport $\cos(\alpha)$ et d'axe $(O', \overrightarrow{i}')$: on sait qu'il s'agit d'une ellipse.

En tenant compte des cas limites où (P') est parallèle à (P) et dans ce cas, le projeté de $\mathscr{C}$ est un cercle de même rayon, et où (P') est perpendiculaire à (P) et dans ce cas, le projeté de $\mathscr{C}$ est un segment ou encore une ellipse de « demi-petit axe nul », on peut énoncer :

Théorème 2. Le projeté orthogonal d'un cercle sur un plan est une ellipse.

4.3 L'hyperbole

Définition 3. Une hyperbole est une conique d'excentricité $e \in]1, +\infty[$.

Dans ce cas, $OF = eOA > OA$ et $OK = \frac{1}{e}OA < OA$. C'est donc le contraire de l'ellipse et les points O, F, A et K sont maintenant disposés comme le montre la figure ci-dessous.

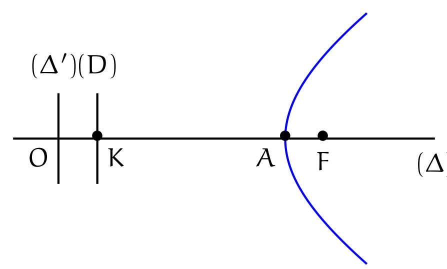
Les formules $OF = eOA$ et $OK = \frac{1}{e}OA$ signifient pour l'hyperbole que, à partir du point O,

le foyer F est e fois plus loin

que le point A et

le point K est $\frac{1}{e}$ fois plus près

que le point A.



Equation réduite d'une hyperbole. Puisque $e > 1$, on a $c > a$. Par suite, $c^2 - a^2 > 0$ et on peut poser $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ ce qui s'écrit encore

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 \text{ ou aussi } a^2 - c^2 = -b^2.}$$

Dans le repère défini au paragraphe précédent, l'hyperbole admet pour équation :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (équation réduite d'une hyperbole)}}$$

Etude de l'équation réduite et construction de l'hyperbole.

• Tout d'abord, si $M(x, y)$ est un point de l'hyperbole, $\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2} \geq 0$ avec égalité si et seulement si $y = 0$. Par suite, l'abscisse x de M vérifie $|x| \geq a$ ou encore ($x \leq -a$ ou $x \geq a$) avec égalités effectivement obtenues pour les points $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$. La courbe à construire ne possède donc aucun point d'abscisse dans $] - a, a[$.

/noindent A et A' sont sur l'axe focal : ce sont les **sommets** de l'hyperbole.

• Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'égalité $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ équivaut à $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ ou $y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. L'hyperbole est donc la réunion des graphes des fonctions $f_1 : x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ et $f_2 = -f_1$.

• L'étude de f_1 est simple. Il nous faut néanmoins la détailler en $+\infty$. Pour $x \in [a, +\infty[$,

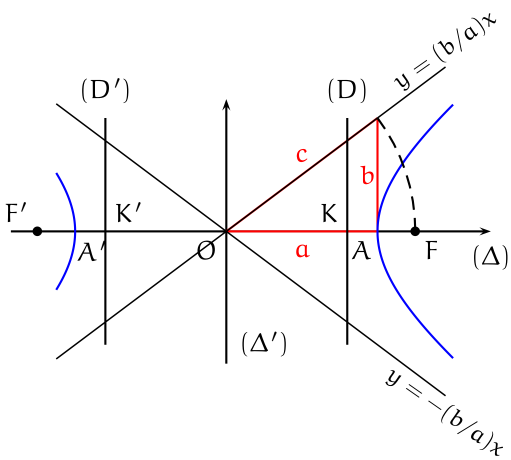
$$f_1(x) - \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}(\sqrt{x^2-a^2} - x) = -\frac{ab}{\sqrt{x^2-a^2}+x}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et donc, la droite d'équation $y = \frac{b}{a}x$ est asymptote à la courbe. Par symétrie, il en est de même de la droite d'équation $y = -\frac{b}{a}x$. On doit noter que les deux asymptotes à l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ sont obtenues mécaniquement en remplaçant 1 par 0 :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0 \Leftrightarrow (y = \frac{b}{a}x \text{ ou } y = -\frac{b}{a}x).$$

• L'égalité de PYTHAGORE $c^2 = a^2 + b^2$ fournit une construction du foyer quand on dispose de l'hyperbole et de l'une de ses asymptotes. a est l'abscisse de A. b est l'ordonnée du point de la droite d'équation $y = \frac{b}{a}x$ d'abscisse a. c qui est l'hypothénuse d'un triangle rectangle de côtés a et b, peut donc être lu sur l'asymptote, puis « rabattu » au compas sur l'axe (Ox) comme le montre le dessin qui suit.

Nous résumons maintenant le cours sur l'hyperbole. L'étude de la tangente en un point de l'hyperbole sera traitée plus loin.



$a = OA = OA'$, $c = OF = OF'$
$c^2 = a^2 + b^2$, $c > a$ et $c > b$.
Axe focal (Ox) et axe non focal (Oy).
Sommets $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$.

Equation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$e = \frac{c}{a}$, $OF = OF' = eOA$.
Foyers $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$.

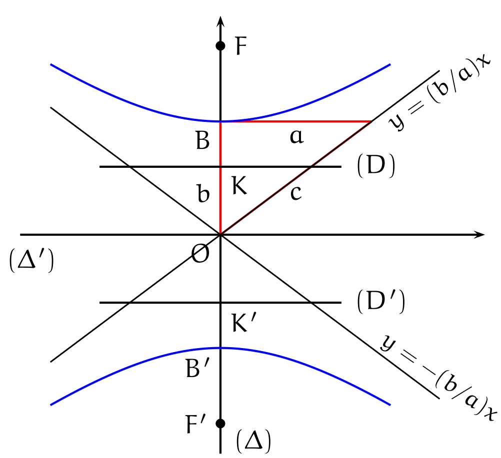
$OK = OK' = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$,

Directrices $(D)\ :\ x = \frac{a^2}{c}$ et $(D')\ :\ x = -\frac{a^2}{c}$.

Asymptotes d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$.

Contrairement à l'ellipse, dans la situation de référence exposée ci-dessus, on peut avoir $a > b$, $a = b$ ou $a < b$. « Faire passer l'hyperbole à la verticale » , c'est-à-dire prendre l'axe (Oy) pour axe focal, ne consiste plus en un échange des rôles de a et b mais en un changement de signe. C'est l'équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ou encore $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, qui correspond à un échange de coordonnées et donc à un échange d'axes.

Comme d'habitude, on n'effectue pas explicitement le changement de repère $x = Y$ et $y = X$, mais on adapte nos formules par simple lecture d'un dessin.



$b = OB = OB'$, $c = OF = OF'$
$c^2 = a^2 + b^2$, $c > a$ et $c > b$
Axe focal (Oy) et axe non focal (Ox).
Sommets $B(0, b)$ et $B'(0, -b)$.

Equation réduite $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$e = \frac{c}{b}$, $OF = OF' = eOB$.
Foyers $F(0, c)$ et $F'(0, -c)$.

$OK = OK' = \frac{b}{e} = \frac{b^2}{c}$,

Directrices $(D)\ :\ y = \frac{b^2}{c}$ et $(D')\ :\ y = -\frac{b^2}{c}$.

Asymptotes d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$.

Exercice 4. Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Nature et éléments caractéristiques des courbes d'équations **1)** $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$, **2)** $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=-1$, **3)**. $y=\dfrac{1}{x}$.

Solution.

1) Hyperbole de centre O. Axe focal (Ox) et axe non focal (Oy). $a=4$ et $b=3$. Sommets $A(4,0)$, $A'(-4,0)$.
$c=\sqrt{a^2+b^2}=5$ et donc, foyers $F(5,0)$ et $F'(-5,0)$. Excentricité $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{4}$.
$x_K=\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{16}{5}$ et donc, directrices $(D): x=\dfrac{16}{5}$ et $(D'): x=-\dfrac{16}{5}$.
Asymptotes $y=\dfrac{3}{4}x$ et $y=-\dfrac{3}{4}x$.

2) Hyperbole de centre O. Axe focal (Oy) et axe non focal (Ox). $a=4$ et $b=3$. Sommets $B(0,3)$, $B'(0,-3)$.
$c=\sqrt{a^2+b^2}=5$ et donc, foyers $F(0,5)$ et $F'(0,-5)$. Excentricité $e=\dfrac{c}{b}=\dfrac{5}{3}$.
$y_K=\dfrac{b^2}{c}=\dfrac{9}{5}$ et donc, directrices $(D): y=\dfrac{9}{5}$ et $(D'): y=-\dfrac{9}{5}$.
Asymptotes $y=\dfrac{3}{4}x$ et $y=-\dfrac{3}{4}x$.

3) On fait bien sûr tourner de $\dfrac{\pi}{4}$ le repère initial. Les formules de changement de repère s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{l} x=\cos(\frac{\pi}{4})X-\sin(\frac{\pi}{4})Y=\dfrac{X-Y}{\sqrt{2}}\\ y=\sin(\frac{\pi}{4})X+\cos(\frac{\pi}{4})Y=\dfrac{X+Y}{\sqrt{2}}\end{array}\right.,\text{ ou aussi }\left\{\begin{array}{l} X=\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}\\ Y=\dfrac{-x+y}{\sqrt{2}}\end{array}\right.,$$

où (x,y) désignent les coordonnées d'un point M dans le repère initial $\mathcal{R}$ et (X,Y) désignent les coordonnées du même point M dans le repère $\mathcal{R}'=(0,\overrightarrow{i}',\overrightarrow{j}')$ tel que $\overrightarrow{i}'=\cos(\frac{\pi}{4})\overrightarrow{i}+\sin(\frac{\pi}{4})\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{j}'=-\sin(\frac{\pi}{4})\overrightarrow{i}+\cos(\frac{\pi}{4})\overrightarrow{j}$.

$$M(x,y)\in\mathscr{H}\Leftrightarrow xy=1\Leftrightarrow\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\frac{X+Y}{\sqrt{2}}=1\Leftrightarrow\frac{X^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2}=1.$$

On en déduit les éléments métriques de $\mathscr{H}$. $a=b=\sqrt{2}$ puis $c=\sqrt{a^2+b^2}=2$ et enfin, $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$.
On en déduit maintenant les éléments caractéristiques de $\mathscr{H}$ dans $\mathcal{R}'$. Centre O. Axe focal (OX) d'équation $Y=0$ et axe non focal (OY) d'équation $X=0$. Sommets $A(\sqrt{2},0)_{\mathcal{R}'}$ et $A'(-\sqrt{2},0)_{\mathcal{R}'}$. Foyers $F(2,0)_{\mathcal{R}'}$ et $F'(-2,0)_{\mathcal{R}'}$.
Directrices $(D): X=\dfrac{a^2}{c}=1$ et $(D'): X=-1$. Asymptotes $Y=X$ et $Y=-X$.
On en déduit enfin les éléments caractéristiques de $\mathscr{H}$ dans $\mathcal{R}$. Centre O.
Axe focal $(\Delta): y=x$ et axe non focal $(\Delta'): y=-x$.
Sommets $A(\dfrac{\sqrt{2}-0}{\sqrt{2}},\dfrac{\sqrt{2}+0}{\sqrt{2}})_{\mathcal{R}}$ ou encore $A(1,1)$, puis $A'(-1,-1)$. Foyers $F(\sqrt{2},\sqrt{2})$ et $F'(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$.
Directrices $(D): \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}=1$ ou encore $y=-x+\sqrt{2}$ et $(D'): y=-x-\sqrt{2}$. Asymptotes d'équations respectives $x=0$ et $y=0$.

➢ Commentaire . *En 3), pour retrouver les coordonnées des différents points dans le repère initial, il fallait avoir les anciennes coordonnées x et y en fonction des nouvelles X et Y. Inversement, pour écrire les équations des différentes droites dans le repère initial, il fallait avoir les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes.*

Définition 4. Une hyperbole est **équilatère** si et seulement si ses asymptotes sont perpendiculaires.

Théorème 3. L'excentricité de l'hyperbole équilatère vaut $\sqrt{2}$.

Démonstration . Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole équilatère. Il existe un repère orthonormé dans lequel $\mathscr{H}$ admet pour équation $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Dans ce repère, les asymptotes de $\mathscr{H}$ ont pour équations respectives $y=\dfrac{b}{a}x$ et $y=-\dfrac{b}{a}x$. Ces asymptotes sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs vaut -1, ce qui fournit $\dfrac{b}{a}(-\dfrac{b}{a})=-1$ ou encore $\boxed{a=b}$.
Dans ce cas, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}a$, puis $\boxed{e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}}$. ❏

4.4 Paramétrisation de l'ellipse et de l'hyperbole

L'ellipse. Soit $\mathscr{E}$ une ellipse. Il existe un repère orthonormé dans lequel $\mathscr{E}$ admet pour équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Un point M de coordonnées (x,y) est sur l'ellipse si et seulement si il existe un réel t tel que $\dfrac{x}{a}=\cos(t)$ et en même temps $\dfrac{y}{b}=\sin(t)$. L'ellipse est donc l'ensemble des $(a\cos(t), b\sin(t))$ où t décrit $\mathbb{R}$. Une paramétrisation de l'ellipse de centre O et de demi-axes a et b est

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}x=a\cos(t)\\ y=b\sin(t)\end{array}\right..}$$

Plus généralement, une paramétrisation de l'ellipse de centre $\Omega(x_0,y_0)$ et de demi-axes a et b est

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}x=x_0+a\cos(t)\\ y=y_0+b\sin(t)\end{array}\right..}$$

En posant $u=\tan(\dfrac{t}{2})$, $t\in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[$, on obtient une paramétrisation rationnelle de l'ellipse de centre O et de demi-axes a et b privée du point $A'(-a,0)$:

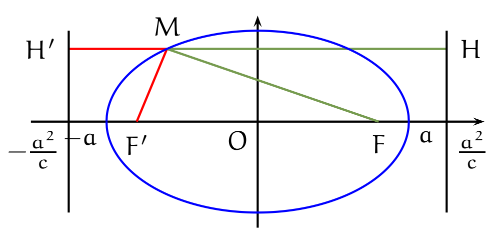
$$\left\{\begin{array}{l}x=a\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\\ y=b\dfrac{2u}{1+u^2}\end{array}\right.,\ u\in\mathbb{R}.$$

L'hyperbole. Puisque pour tout réel t, $\text{ch}^2(t)-\text{sh}^2(t)=1$ et que d'autre part, la fonction $t\mapsto \text{sh}(t)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, une paramétrisation de la branche d'hyperbole d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $x\geq 0$, est

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}x=a\,\text{ch}(t)\\ y=b\,\text{sh}(t)\end{array}\right..}$$

4.5 Définition bifocale de l'ellipse et de l'hyperbole

Avec les notations des paragraphes précédents,



Théorème 4. Tout point M de l'ellipse vérifie $MF+MF'=2a$.

Démonstration. Soit M un point de l'ellipse $(\mathscr{E})$. Alors,

$$\begin{aligned}MF+MF'&=eMH+eMH'=e(MH+MH')=eHH'\\ &=eKK'=e\times 2\frac{a}{e}=2a.\end{aligned}$$

❏

Théorème 5 (Définition bifocale de l'ellipse). L'ellipse est l'ensemble des points M tels que $MF+MF'=2a$.

Démonstration. On sait déjà que l'ellipse $(\mathscr{E})$ est contenue dans l'ensemble $(\Gamma)=\{M\in\mathcal{P}/\ MF+MF'=2a\}$. Soit $M(x,y)\in\mathcal{P}$.

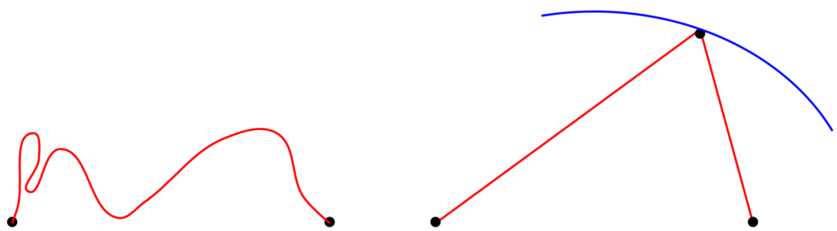
$$\begin{aligned}MF+MF'=2a&\Leftrightarrow\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a\\ &\Leftrightarrow(x-c)^2+y^2+(x+c)^2+y^2+2\sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2\\ &\Leftrightarrow\sqrt{(x-c)^2+y^2}\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a^2-x^2-y^2-c^2\\ &\Leftrightarrow((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2)=(2a^2-x^2-y^2-c^2)^2\text{ et }2a^2-x^2-y^2-c^2\geq 0\\ &\Leftrightarrow((x^2+y^2+c^2)-2cx)((x^2+y^2+c^2)+2cx)=((x^2+y^2+c^2)-2a^2)^2\\ &\quad\text{ et }2a^2-x^2-y^2-c^2\geq 0\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
MF + MF' = 2a &\Leftrightarrow -4c^2x^2 = -4a^2(x^2+y^2+c^2) + 4a^4 \text{ et } 2a^2 - x^2 - y^2 - c^2 \geq 0\\
&\Leftrightarrow (a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) \text{ et } 2a^2 - x^2 - y^2 - c^2 \geq 0\\
&\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1 \text{ et } 2a^2 - x^2 - y^2 - c^2 \geq 0\\
&\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ et } x^2+y^2 \leq a^2+b^2\\
&\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,
\end{aligned}$$

ce qui montre l'inclusion de (Γ) dans $(\mathscr{E})$ et achève la démonstration. Néanmoins, on peut se convaincre directement de l'équivalence : $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1)$ (I) $\Leftrightarrow$ $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et $x^2+y^2 \leq a^2+b^2)$ (II). (II) $\Rightarrow$ (I) est clair. Réciproquement, si (I) est vérifiée, on a vu que $x^2 \leq a^2$ et $y^2 \leq b^2$, et on a donc bien $x^2+y^2 \leq a^2+b^2$. ❏

Ce résultat fournit la **construction du jardinier**. On veut planter un parterre de fleurs de forme elliptique et d'abord le dessiner au sol. On plante deux pieux, distants l'un de l'autre de $2c$, puis on attache à chacun des deux pieux une corde de longueuer $2a > 2c$. A l'aide d'un troisième bâton, on tend la corde et on déplace ce bâton, la corde restant tendue. Dans son déplacement, ce bâton dessine sur le sol une ellipse de foyers les deux pieux et de grand axe $2a$. Si on trouve l'ellipse trop aplatie, on rapproche les deux pieux (ce qui rapproche $e = \frac{c}{a}$ de 0) et si on la trouve trop ronde, on les écarte (ce qui rapproche e de 1).



On montre de manière analogue le résultat suivant concernant l'hyperbole.

Théorème 6 (définition bifocale de l'hyperbole). L'hyperbole est l'ensemble des points M tels que $|MF - MF'| = 2a$. Plus précisément, la branche de l'hyperbole qui est plus proche de F que de F' est l'ensemble des points M tels que $MF' - MF = 2a$, et l'ensemble des points M tels que $MF - MF' = 2a$ est l'autre branche.

4.6 Tangente en un point d'une ellipse ou d'une hyperbole

Il existe un repère orthonormé dans lequel l'ellipse $(\mathscr{E})$ admet pour équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et donc aussi pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = a\cos(t)\\ y = b\sin(t)\end{array}\right.$. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\mathscr{E}$, puis soit t_0 l'unique réel de $]-\pi, \pi]$ tel que $x_0 = a\cos(t_0)$ et $y_0 = b\sin(t_0)$. Le vecteur dérivé en t_0 est

$$\overrightarrow{\frac{dM}{dt}}(t_0) = (-a\sin(t_0), b\cos(t_0)) = (-\frac{a}{b}y_0, \frac{b}{a}x_0).$$

Puisque les fonctions sinus et cosinus ne s'annulent pas simultanément, ce vecteur n'est jamais nul et l'ellipse admet une tangente (T_0) en M_0. De plus, pour $M(x, y)$ point donné du plan,

$$\begin{aligned}
M(x,y) \in (T_0) &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & -\frac{a}{b}y_0\\ y - y_0 & \frac{b}{a}x_0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} \times x_0(x - x_0) + \frac{a}{b} \times y_0(y - y_0) = 0\\
&\Leftrightarrow \frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0 \text{ (après division par } ab)\\
&\Leftrightarrow \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \Leftrightarrow \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi,

Théorème 7. La tangente à l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ en le point $M_0(x_0,y_0)$ admet pour équation cartésienne :

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1}.$$

De nouveau, cette tangente peut être obtenue à partir de la règle très générale, dite règle de dédoublement des termes exposée page 22.

Théorème 8. La tangente à l'ellipse en M_0 est bissectrice extérieure de l'angle de vecteur $\left(\overrightarrow{M_0F},\overrightarrow{M_0F'}\right)$.

Démonstration . Nous pouvons comme pour la parabole déterminer une équation cartésienne de cette bissectrice intérieure pour constater que l'on retrouve l'équation précédente. Nous allons néanmoins nous y prendre autrement en utilisant la définition bifocale de l'ellipse (théorème 5, page 13).

On choisit une paramétrisation dérivable $t\mapsto M(t)$, $t\in\mathbb{R}$, de l'ellipse (par exemple, $x=a\cos(t)$ et $y=b\sin(t)$). On sait que pour tout réel t, on a $FM(t)+F'M(t)=2a$. D'après la théorème 3, page 10 du chapitre « Courbes paramétrées 1ère partie » et puisque $FM(t)$ et $F'M(t)$ ne sont jamais nuls, en dérivant cette fonction constante, on obtient pour tout réel t :

$$\frac{1}{FM(t)}\overrightarrow{FM(t)}.\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)+\frac{1}{F'M(t)}\overrightarrow{F'M(t)}.\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)=0,$$

ou encore

$$\left(\frac{1}{FM(t)}\overrightarrow{FM(t)}+\frac{1}{F'M(t)}\overrightarrow{F'M(t)}\right).\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)=0.$$

Comme $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t)$ dirige la tangente en $M(t)$, que $\dfrac{1}{FM(t)}\overrightarrow{FM(t)}+\dfrac{1}{F'M(t)}\overrightarrow{F'M(t)}$ dirige la bissectrice intérieure de l'angle $\left(\overrightarrow{FM(t)},\overrightarrow{F'M(t)}\right)$, on a montré que la tangente est la perpendiculaire en $M(t)$ à la bissectrice intérieure de l'angle $\left(\overrightarrow{FM(t)},\overrightarrow{F'M(t)}\right)$ ou encore, est la bissectrice extérieure de ce même angle. ❑

⋗ **Commentaire** . *Ainsi, si un rayon sonore ou lumineux part de l'un des foyers et tape sur l'ellipse, il se réfléchit vers l'autre foyer.*

On montre de même le résultat suivant concernant l'hyperbole.

Théorème 9.

❶ La tangente à l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ en le point $M_0(x_0,y_0)$ admet pour équation cartésienne

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1}.$$

❷ La tangente en M_0 est bissectrice intérieure de l'angle de vecteur $\left(\overrightarrow{M_0F},\overrightarrow{M_0F'}\right)$.

5 Les coniques en polaires

(Γ) est la conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité $e\in]0,+\infty[$. On se place cette fois-ci dans un **repère orthonormé direct d'origine le foyer** F, d'axe des abscisses l'axe focal (Δ) de (Γ), tel que le point K ait une abscisse strictement positive. Si M est un point du plan, on note $[r,\theta]$ un couple de coordonnées polaires de M. On note d la distance du foyer F à la directrice (D) puis on pose $\boxed{p=ed}$ (p s'appelle le **paramètre de la conique**).
Dans le repère considéré, $|r|=FM$, $x_K=d$ et $x_M=r\cos(\theta)$. Par suite,

$$M\in(\Gamma)\Leftrightarrow FM=e\times d(M,(D))\Leftrightarrow |r|=e|r\cos(\theta)-d|\Leftrightarrow r=e(r\cos(\theta)-d)\text{ ou } r=-e(r\cos(\theta)-d)$$
$$\Leftrightarrow r=\frac{-ed}{1-e\cos(\theta)}\text{ ou } r=\frac{ed}{1+e\cos(\theta)}\Leftrightarrow r=-\frac{p}{1-e\cos(\theta)}\text{ ou } r=\frac{p}{1+e\cos(\theta)}.$$

(Γ) est donc la réunion des courbes (Γ_1) et (Γ_2) d'équations polaires respectives $r=\dfrac{p}{1+e\cos(\theta)}=f_1(\theta)$ et $r=-\dfrac{p}{1-e\cos(\theta)}=f_2(\theta)$. On note $M_1(\theta)$ (resp. $M_2(\theta)$) le point de coordonnées polaires $[f_1(\theta),\theta]$ (resp. $[f_2(\theta),\theta]$). $M_1(\theta)$ (resp. $M_2(\theta)$) est le point courant de (Γ_1) (resp. (Γ_2)). On note alors que

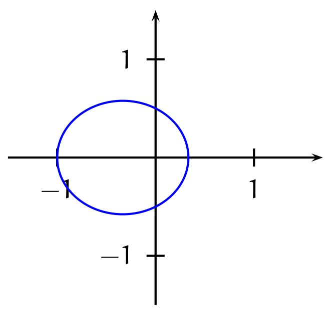
$$M_1(\theta+\pi) = [\frac{p}{1+e\cos(\theta+\pi)}, \theta+\pi] = [\frac{p}{1-e\cos(\theta)}, \theta+\pi] = [-\frac{p}{1-e\cos(\theta)}, \theta] = M_2(\theta).$$

Ainsi, puisque $M_2(\theta) = M_1(\theta+\pi)$, tout point de (Γ_2) est un point de (Γ_1). De même, puisque $M_1(\theta) = M_2(\theta-\pi)$, tout point de (Γ_1) est un point de (Γ_2). La courbe (Γ_1) et la courbe (Γ_2) sont donc une seule et même courbe à savoir la courbe (Γ).

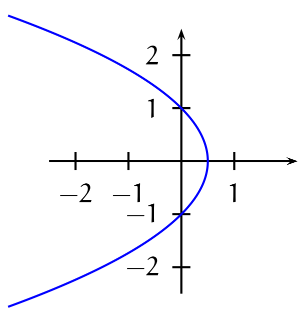
Théorème 10. Soit (Γ) la conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e. Soient d la distance de F à (D), puis $p = ed$ le paramètre de la conique (Γ). Dans un **repère orthonormé direct d'origine le foyer** F, d'axe des abscisses l'axe focal (Δ) de (Γ), tel que le point K ait une abscisse strictement positive, (Γ) a pour équation polaire $r = \frac{p}{1+e\cos(\theta)}$.

Exercice 5.
Après avoir déterminé leurs éléments caractéristiques, construire les courbes d'équations polaires respectives
1) $r = \frac{1}{2+\cos\theta}$, **2)** $r = \frac{1}{2+\cos(\theta)}$, **3)** $r = \frac{1}{1+2\cos(\theta)}$.

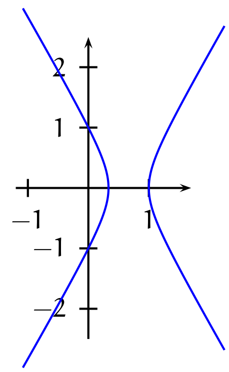
Solution.
1) $r = \frac{1/2}{1+1/2\cos(\theta)}$. Ellipse dont un des foyers est O et d'axe focal (Ox), d'excentricité $e = \frac{1}{2}$. Les sommets du grand axe sont les intersections de la courbe avec (Ox), à savoir $A = M(0) = [\frac{1}{3}, 0] = (\frac{1}{3}, 0)$ et $A' = M(\pi) = [1, \pi] = (-1, 0)$. Le centre de $\mathscr{E}$ est le milieu de $[A, A']$, $\Omega(-\frac{1}{3}, 0)$. Le deuxième foyer est $F' = 2\Omega - F = (-\frac{2}{3}, 0)$. Ensuite, $a = \frac{1}{2}AA' = \frac{2}{3}$ et $c = \frac{1}{2}FF' = \frac{1}{3}$. Donc, $b = \sqrt{a^2-c^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Les sommets du petit axe sont $B = \Omega + (0, b) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ et $B'(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$. Enfin, $\Omega K = \Omega K' = \frac{a}{e} = \frac{4}{3}$ et les directrices sont $(D) : x = x_\Omega + \frac{4}{3} = 1$ et $(D') : x = -\frac{5}{3}$.



2) $r = \frac{1}{1+\cos(\theta)}$. Parabole de foyer O et d'axe focal (Ox). Le sommet S de $\mathcal{P}$ est l'intersection avec (Ox), à savoir $M(0) = [\frac{1}{2}, 0] = (\frac{1}{2}, 0)$. Quand θ tend vers π, r tend vers $+\infty$ et la parabole est tournée vers les $x < 0$. $K = 2S - F = (1, 0)$ et donc directrice $(D) : x = 1$.



3) $r = \frac{1}{1+2\cos(\theta)}$. Hyperbole dont l'un des foyers est O, d'axe focal (Ox) et d'excentricité $e = 2$. Les sommets sont les intersections de la courbe avec (Ox), à savoir $A = M(0) = [\frac{1}{3}, 0] = (\frac{1}{3}, 0)$ et $A' = M(\pi) = [-1, \pi] = (1, 0)$. Le centre de $\mathscr{H}$ est le milieu de $[A, A']$, $\Omega(\frac{2}{3}, 0)$. Le deuxième foyer est $F' = 2\Omega - F = (\frac{4}{3}, 0)$. Ensuite, $a = \frac{1}{2}AA' = \frac{1}{3}$ et $c = \frac{1}{2}FF' = \frac{2}{3}$. Donc, $b = \sqrt{c^2-a^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. $\Omega K = \Omega K' = \frac{a}{e} = \frac{1}{6}$ et les directrices sont $(D) : x = x_\Omega + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ et $(D') : x = \frac{1}{2}$. Les asymptotes sont les droites passant par Ω et de coefficient directeur $\pm\tan(\frac{2\pi}{3}) = \pm\sqrt{3}$ (branches infinies obtenues pour $\cos(\theta) = -\dfrac{1}{2}$) ou aussi $\pm\dfrac{b}{a} = \pm\sqrt{3}$. Ce sont les droites d'équations $(y - \dfrac{2}{3}) = \pm\sqrt{3}x$.

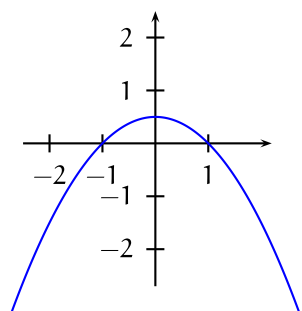


Exercice 6. Construire les courbes d'équations polaires respectives
1) $r = \dfrac{1}{1+\sin(\theta)}$, **2)** $r = \dfrac{1}{2-\cos(\theta)}$ **3)** $r = \dfrac{1}{2+\cos(\theta)+\sin(\theta)}$.

Solution.
1) Notons (Γ_1) la courbe d'équation polaire $r = \dfrac{1}{1+\sin(\theta)} = f_1(\theta)$. Pour $\theta \notin -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$, $\dfrac{1}{1+\sin(\theta)} = \dfrac{1}{1+\cos(\theta - \frac{\pi}{2})}$.
Soit alors (Γ_2) la courbe d'équation polaire $r = \dfrac{1}{1+\cos(\theta)} = f_2(\theta)$. Pour $\theta \notin -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$,

$$M_1(\theta + \frac{\pi}{2}) = [f_1(\theta + \frac{\pi}{2}), \theta + \frac{\pi}{2}] = [f_2(\theta), \theta + \frac{\pi}{2}] = r_{O,\pi/2}(M_2(\theta)).$$

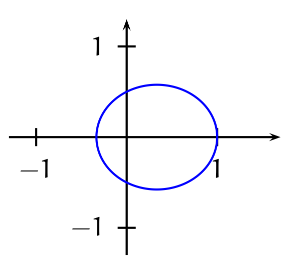
Donc, (Γ_1) est l'image de (Γ_2) dans le quart de tour direct de centre O. (Γ_2) est une parabole (construite plus haut) et il en est de même de (Γ_1).



2) Notons (Γ_1) la courbe d'équation polaire $r = \dfrac{1}{2-\cos(\theta)} = f_1(\theta)$ et (Γ_2) la courbe d'équation polaire $r = \dfrac{1}{2+\cos(\theta)} = f_2(\theta)$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$M_1(\theta + \pi) = [f_1(\theta + \pi), \theta + \pi] = [f_2(\theta), \theta + \pi] = s_O(M_2(\theta)).$$

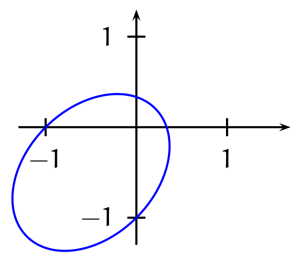
Donc, (Γ_1) est l'image de (Γ_2) dans la symétrie centrale de centre O. (Γ_2) est une ellipse (construite plus haut) et il en est de même de (Γ_1).



3) Notons (Γ_1) la courbe d'équation polaire $r = \dfrac{1}{2+\cos(\theta)+\sin(\theta)} = \dfrac{1/2}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta - \frac{\pi}{4})} = f_1(\theta)$ et (Γ_2) la courbe d'équation polaire $r = \dfrac{1/2}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta)} = f_2(\theta)$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$M_1(\theta+\frac{\pi}{4})=[f_1(\theta+\frac{\pi}{4}),\theta+\frac{\pi}{4}]=[f_2(\theta),\theta+\frac{\pi}{4}]=\mathrm{rot}_{O,\pi/4}(M_2(\theta)).$$

Donc, (Γ_1) est l'image de (Γ_2) dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. (Γ_2) est une ellipse et il en est de même de (Γ_1).



Exercice 7. Déterminer l'image du cercle unité par la fonction $f\ :\ z\mapsto\frac{1}{z^2+z+1}$.

Solution. Pour $z\in\mathbb{C}$,

$$z^2+z+1=0\Leftrightarrow z=j\text{ ou }z=j^2.$$

Posons donc $D=U\setminus\{j,j^2\}$ (où U désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1). D est l'ensemble des $e^{-i\theta}$ où θ décrit $\Delta=\mathbb{R}\setminus(\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi\mathbb{Z})$. Pour $\theta\in\Delta$,

$$f(e^{-i\theta})=\frac{1}{(e^{-i\theta})^2+e^{-i\theta}+1}=\frac{e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}+e^{-i\theta}}=\frac{1}{1+2\cos(\theta)}e^{i\theta}.$$

Ainsi, pour $\theta\in\Delta$, $f(e^{-i\theta})=\frac{1}{1+2\cos(\theta)}e^{i\theta}$, ou encore le point $M(\theta)$ d'affixe $f(e^{-i\theta})$ vérifie

$$\overrightarrow{OM(\theta)}=\frac{1}{1+2\cos(\theta)}\overrightarrow{u_\theta}.$$

$M(\theta)$ est le point de coordonnées polaires $[\frac{1}{1+2\cos(\theta)},\theta]$. L'ensemble cherché est l'ensemble des points de coordonnées polaires $[\frac{1}{1+2\cos(\theta)},\theta]$, où θ décrit Δ : c'est l'hyperbole d'équation polaire $r=\frac{1}{1+2\cos(\theta)}$ construite plus haut.

---

6 Les courbes du second degré

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R}=(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. On va étudier l'ensemble (Γ) d'équation :

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0\ (E),$$

où a, b, c, d, e et f sont six réels tels que $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

⊳ Commentaire.

◇ *Les nombres a, b, ..., ne sont pas uniquement définis, car si on multiplie les deux membres de (E) par un réel non nul et distinct de 1, on obtient une autre équation de (Γ).*

◇ *On ne peut même pas dire que a, b, ..., sont uniquement définis à une constante multiplicative près puisque $x^2+y^2+1=0$, $x^2+y^2+2=0$, $2x^2+4x+y^2+30=0$ ou $x^2+2xy+y^2+1=0$ sont quatre équations de l'ensemble vide, sans aucun rapport de proportionnalité entre les coefficients.*

◇ *Nous connaissons déjà des exemples de telles équations : $x^2+y^2-1=0$ (cercle) ou plus généralement $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ (ellipse), $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$, $xy-1=0$ (hyperboles), $x^2-y=0$ (parabole), $x^2-y^2=0$ (réunion des droites d'équations respectives $y=x$ et $y=-x$) ....*

Théorème 11. Dans tout repère (orthonormé direct ou pas), (Γ) a une équation de ce type.

Démonstration .

Si $\mathcal{R}'$ est un autre repère, on sait que les formules de changement de repère sont du type $\begin{cases} x = \alpha x' + \beta y' + \gamma \\ y = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' \end{cases}$ avec $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$. Dans $\mathcal{R}'$, (Γ) admet pour équation $a(\alpha x' + \beta y' + \gamma)^2 + \ldots = 0$ qui est du type $a' x'^2 + 2b' x' y' + \ldots = 0$ où $a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\alpha' + c\alpha'^2, \ldots$ Maintenant, on ne peut avoir $(a', b', c') = (0, 0, 0)$ car, par le changement de repère inverse, on obtiendrait alors $a = b = c = 0$ ce qui n'est pas. ❏

Réduction de l'équation (E) par changement(s) de repère(s). Le but de tous les calculs qui vont suivre jusqu'au tableau récapitulatif page 21, est double :

① trouver tous les types de courbes ayant une équation du type (E) et les classer ;

② dégager un plan d'étude d'une courbe du second degré pour pouvoir construire une telle courbe dont on a explicitement une équation.

Nous allons maintenant chercher un repère orthonormé direct $\mathcal{R}'$ dans lequel le terme $x'y'$ est affecté d'un coefficient égal à 0. Le problème est immédiatement résolu si $b = 0$. Dans ce qui suit, on suppose donc $b \neq 0$.

On se donne un réel θ puis $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}')$ où $\overrightarrow{i}' = \cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{j}' = -\sin(\theta)\overrightarrow{i} + \cos\theta\,\overrightarrow{j}$ (le repère $\mathcal{R}'$ se déduit du repère $\mathcal{R}$ par rotation de centre O et d'angle θ). Les formules de changement de repère s'écrivent

$$\begin{cases} x = \cos(\theta)x' - \sin(\theta)y' \\ y = \sin(\theta)x' + \cos(\theta)y' \end{cases}$$

où (x, y) (resp. (x', y')) sont les coordonnées d'un point M donné dans $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}'$). Il est clair que le coefficient de $x'y'$ est issu des termes de degré deux uniquement. Or, pour tout couple de réels (x, y),

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bxy + cy^2 &= a(\cos(\theta)x' - \sin(\theta)y')^2 + 2b(\cos(\theta)x' - \sin(\theta)y')(\sin(\theta)x' + \cos(\theta)y') \\ &\quad + c(\sin(\theta)x' + \cos(\theta)y')^2 \\ &= a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 \ (*) \end{aligned}$$

où on a posé $a' = a\cos^2(\theta) + 2b\cos(\theta)\sin(\theta) + c\sin^2(\theta)$, $2b' = (-2a + 2c)\cos(\theta)\sin(\theta) + 2b(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ et $c' = a\sin^2(\theta) - 2b\cos(\theta)\sin(\theta) + c\cos^2(\theta)$.

Lemme. On a $a'c' - b'^2 = ac - b^2$

Démonstration .

$$\begin{aligned} a'c' - b'^2 &= [\frac{a+c}{2} + (\frac{a-c}{2}\cos(2\theta) + b\sin(2\theta))][\frac{a+c}{2} - (\frac{a-c}{2}\cos(2\theta) + b\sin(2\theta))] \\ &\quad - [-\frac{a-c}{2}\sin(2\theta) + b\cos(2\theta)]^2 \\ &= \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - (b\sin(2\theta) + \frac{a-c}{2}\cos(2\theta))^2 - (b\cos(2\theta) - \frac{a-c}{2}\sin(2\theta))^2 \\ &= \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2(\cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta)) - b^2(\sin^2(2\theta) + \cos^2(2\theta)) \\ &= \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 - b^2 = ac - b^2. \end{aligned}$$

❏

Définition 5 (Discriminant d'une courbe du second degré). Le discriminant de la courbe d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ dans le repère $\mathcal{R}$ est le nombre $\Delta = ac - b^2$.

Théorème 12. Le signe de Δ (< 0, $= 0$ ou > 0) ne dépend pas de $\mathcal{R}$.

⋗ Commentaire .

◇ *Le lemme précédent montre déjà que ce nombre ne change pas si on effectue un changement de base orthonormée sans autre modification.*

◇ *Si on multiplie tous les coefficients de l'équation initiale par un réel λ non nul, il est clair que Δ est multiplié par $\lambda^2 > 0$. Dans ce cas, la valeur de Δ change mais pas son signe.*

◇ *Il est clair qu'un changement d'origine n'affecte pas les termes de degré 2, et donc n'affecte pas Δ.*

◇ *On peut montrer que quand (Γ) n'est pas vide, le signe de Δ est indépendant de quelque repère que ce soit, mais ne dépend que de la courbe (Γ). Cette constatation nous permettra de classer plus loin les coniques en trois **genres**.*

⋄ *« Le signe du discriminant de l'ensemble vide » peut quant à lui prendre plusieurs valeurs (malheureusement), comme on le verra plus loin.*

Revenons à l'égalité $(*)$ en cherchant à annuler le coefficient b'.
Le coefficient $2b'$ de $x'y'$ vaut $(-2a+2c)\cos(\theta)\sin(\theta)+2b(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)) = (c-a)\sin(2\theta)+2b\cos(2\theta)$. Puisque $b\neq 0$,

$$2b' = \sqrt{(c-a)^2+4b^2}(\cos(\theta_0)\cos(2\theta)+\sin(\theta_0)\sin(2\theta)) = \sqrt{(c-a)^2+4b^2}\cos(2\theta-\theta_0),$$

où θ_0 est un réel tel que $\cos(\theta_0) = \dfrac{2b}{\sqrt{(c-a)^2+4b^2}}$ et $\sin(\theta_0) = \dfrac{c-a}{\sqrt{(c-a)^2+4b^2}}$. En prenant $\theta = \dfrac{\theta_0}{2}+\dfrac{\pi}{4}$, le coefficient de $x'y'$ est nul.

Un cas particulier important pour la pratique est le cas $a = c$ (les coefficients de x^2 et de y^2 sont les mêmes). Dans ce cas, on peut prendre $\theta_0 = 0$ et donc $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Théorème 13. Soit (Γ) l'ensemble d'équation $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$, $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ dans le repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. Il existe un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{i}',\overrightarrow{j}')$ (de même origine) dans lequel (Γ) a une équation de la forme $a'x'^2+b'y'^2+2c'x'+2d'y'+e'=0$, avec $a'\neq 0$ ou $b'\neq 0$.

Cherchons maintenant à faire disparaître le plus possible de termes de degré 1 par un nouveau changement de repère. Le discriminant de la courbe vaut maintenant $\Delta = a'b'-0^2 = a'b'$.

Cas ❶ : Si $\Delta = a'b'\neq 0$, le changement d'origine $\left\{\begin{array}{l} x' = -\dfrac{c'}{a'}+X \\ y' = -\dfrac{d'}{b'}+Y \end{array}\right.$ nous amène à une nouvelle équation du type $a'X^2+b'Y^2 = K$ où K est un réel, dans laquelle on ne trouve plus de termes de degré 1.
Cas ❷ : Sinon, on a $a'b' = 0$. Quite à commencer par un échange de x' et y', on peut supposer que $a' = 0$ et $b'\neq 0$. le changement d'origine $\left\{\begin{array}{l} x' = X \\ y' = -\dfrac{d'}{b'}+Y \end{array}\right.$ nous amène alors à une nouvelle équation du type $Y^2 = KX+L$ où K et L sont des réels.

Etude du cas ❶. (Γ) a pour équation $a'X^2+b'Y^2 = K$, $K\in\mathbb{R}$.

- Si $K\neq 0$, l'équation s'écrit $\dfrac{X^2}{a'/K}+\dfrac{Y^2}{b'/K} = 1$. (Γ) est alors l'ensemble vide si $a'/K<0$ et $b'/K<0$, une hyperbole si $(a'/K)(b'/K)<0$ et une ellipse (éventuellement un cercle) si $a'/K>0$ et $b'/K>0$.
- Si $K = 0$, l'équation s'écrit $a'X^2+b'Y^2 = 0$. Cet ensemble est un point si $a'b'>0$ (le point $X = 0$ et $Y = 0$). Si $a'b'<0$, $a'X^2+b'Y^2 = 0 \Leftrightarrow Y^2-(\sqrt{-\dfrac{b'}{a'}})^2X^2 = 0 \Leftrightarrow (Y-\sqrt{-\dfrac{b'}{a'}}X)(Y+\sqrt{-\dfrac{b'}{a'}}X) = 0$. Cet ensemble est une réunion de deux droites sécantes.

Etude du cas ❷. (Γ) a pour équation $Y^2 = KX+L$, $(K,L)\in\mathbb{R}^2$.

- Si $K\neq 0$, l'équation s'écrit encore $Y^2 = K(X+\dfrac{L}{K})$, et on reconnait l'équation d'une parabole de sommet $(-L/K,0)$.
- Si $K = 0$, l'équation s'écrit $Y^2 = L$. (Γ) est donc soit vide si $L<0$, soit la droite d'équation $Y = 0$ si $L = 0$, soit la réunion des deux droites strictement parallèles d'équations respectives $Y = \sqrt{L}$ et $Y = -\sqrt{L}$ si $L>0$.

Théorème 14 (les différentes courbes du second degré). La courbe d'équation $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$, $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ peut être : une ellipse (voire un cercle, voire un point), une parabole, une hyperbole, une réunion de deux droites (sécantes, strictement parallèles ou confondues) ou l'ensemble vide.

Dans l'étude précédente, nous avons classé ces différents cas. Le cas $\Delta = 0$ était le cas ❷. Le cas ❶ était quant à lui le cas $\Delta\neq 0$ pouvant se subdiviser en les deux sous-cas $\Delta>0$ ce qui équivaut à a' et b' non nuls et de même signe et $\Delta<0$, ce qui équivaut à a' et b' non nuls et de signes contraires. En distinguant ces deux sous-cas dans la discussion faite plus haut, on peut énoncer la définition et les tableaux ci-dessous.

Définition 6 (genre d'une conique). Une conique de discriminant strictement positif est une conique du **genre ellipse**.
Une conique de discriminant nul est une conique du **genre parabole**.
Une conique de discriminant strictement négatif est une conique du **genre hyperbole**.

Classification des courbes du second degré		
Coniques du genre ellipse $\Delta = ac - b^2 > 0$	Coniques du genre parabole $\Delta = ac - b^2 = 0$	Coniques du genre hyperbole $\Delta = ac - b^2 < 0$
❶ ellipse ❷ cercle ❸ point ❹ ensemble vide	❶ parabole ❷ réunion de deux droites strictement parallèles ❸ une droite ❹ ensemble vide	❶ hyperbole ❷ réunion de deux droites sécantes

Les courbes du second degré s'appellent aussi coniques, la quasi totalité d'entre elles résultant de l'intersection d'une cône de révolution et d'un plan. Les coniques qui ont pu être définies par foyer, directrice et excentricité, (à savoir l'ellipse, la parabole et l'hyperbole) s'appelent les **coniques propres**. Les autres sont dites **coniques impropres**.

Exemples d'équations de		
coniques du genre ellipse $\Delta = ac - b^2 > 0$	coniques du genre parabole $\Delta = ac - b^2 = 0$	coniques du genre hyperbole $\Delta = ac - b^2 < 0$
❶ $2x^2 + y^2 = 1$ ❷ $x^2 + y^2 = 1$ ❸ $x^2 + y^2 = 0$ ❹ $x^2 + y^2 = -1$	❶ $y^2 = x$ ❷ $x^2 = 1$ ❸ $x^2 = 0$ ❹ $x^2 = -1$	❶ $x^2 - y^2 = 1$ ou $xy = 1$ ❷ $x^2 - y^2 = 0$

Plan d'étude d'une courbe du second degré.

Dans un repère orthonormé donné, (Γ) est la courbe d'équation
$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

① Calculer $\Delta = ac - b^2$ puis conclure sur le genre de (Γ) et sur le type de courbe envisageable.

② Si $b \neq 0$, faire tourner le repère autour de O d'un angle θ tel que, dans le repère $(O, \overrightarrow{i}', \overrightarrow{j}')$,
le coefficient $2b\cos(2\theta) + 2(c - a)\sin(2\theta)$ de $x'y'$ soit nul.
Plus particulièrement, si $b \neq 0$ et $a = c$, tourner de $\dfrac{\pi}{4}$.

③ a) Si l'équation est du type $a'x^2 + b'y^2 + 2c'x + 2d'y + e' = 0$, $a'b' \neq 0$,
faire deux transformations canoniques, une en x et une en y, puis changer d'origine.
On tombe sur $a'X^2 + b'Y^2 = K$. Conclure.

③ b) Si l'équation est du type $a'x^2 + b'y^2 + 2c'x + 2d'y + e' = 0$, $a'b' = 0$,
faire une transformation canonique (en x ou en y).
On tombe sur $Y^2 = KX + L$ ou $X^2 = KY + L$.
Si $K = 0$, conclure et si $K \neq 0$, mettre K en facteur, puis changer d'origine et conclure.

Exercice 8. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}$.
Après en avoir déterminé la nature et les éléments caractéristiques, construire la courbe (Γ) d'équation cartésienne $x^2 - 2xy + y^2 + x + y + 1 = 0$. En donner une paramétrisation.

Solution. $\Delta = ac - b^2 = 1.1 - (-1)^2 = 0$. (Γ) est une conique du genre parabole et donc, soit une parabole, soit une réunion de deux droites strictement parallèles, soit une droite, soit l'ensemble vide.

On tourne le repère $\mathcal{R}$ de $\dfrac{\pi}{4}$ autour de O. Pour cela, on pose $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{x' - y'}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{x' + y'}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$, ou encore $\left\{\begin{array}{l} x' = \dfrac{x + y}{\sqrt{2}} \\ y' = \dfrac{-x + y}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$. On note $\mathcal{R}'$ le nouveau repère.

$$M(x, y)_{\mathcal{R}} \in (\Gamma) \Leftrightarrow (x - y)^2 + (x + y) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2y'^2 + \sqrt{2}x' + 1 = 0 \Leftrightarrow y'^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x' + \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

(Γ) est donc une parabole de paramètre $p = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

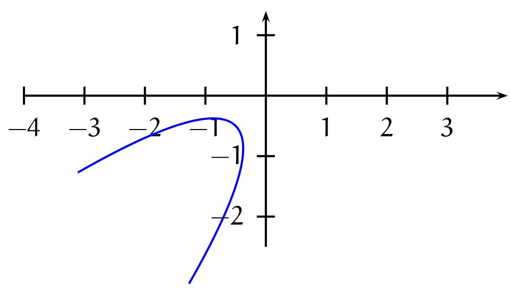
Eléments de (Γ) dans $\mathcal{R}'$.
Le sommet de (Γ) est $S(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)_{\mathcal{R}'}$. Son axe focal (Δ) est la droite d'équation $y'=0$ et (Γ) est tournée vers les $x'<0$. Sa tangente au sommet (T) est la droite (Sy') d'équation $x'=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Son foyer F est le point $(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)_{\mathcal{R}'}+(-\frac{1}{4\sqrt{2}},0)_{\mathcal{R}'}$ ou encore $F(-\frac{5}{4\sqrt{2}},0)_{\mathcal{R}'}$. Sa directrice est la droite (D) d'équation $x'=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}=-\frac{3}{4\sqrt{2}}$.

Une paramétrisation de (Γ) dans $\mathcal{R}'$ est $\left\{\begin{array}{l} x'=-\sqrt{2}t^2-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y'=t \end{array}\right.$.

Eléments de (Γ) dans $\mathcal{R}'$.
Le sommet de (Γ) est $S(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. Son axe focal (Δ) est la droite d'équation $y=x$. Sa tangente au sommet (T) est la droite d'équation $x+y+1=0$. Son foyer F est le point $(-\frac{5}{8},-\frac{5}{8})$. Sa directrice est la droite (D) d'équation $x+y+\frac{3}{4}=0$.

Une paramétrisation de (Γ) dans $\mathcal{R}'$ est $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2}t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}-t)=-t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}t-\frac{1}{2} \\ y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2}t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}+t)=-t^2+\frac{1}{\sqrt{2}}t-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Construction de (Γ).
On peut placer S, l'axe focal et la tangente au sommet. Puis, calculer un ou deux autres points (par exemple, $x=-1$ fournit $y^2+3y+1=0$ et donc, $y=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$) et tracer. C'est le plus simple et probablement le mieux.
On peut aussi avoir conscience que (Γ) est la réunion des graphes des fonctions $x\mapsto\frac{1}{2}(-2x+1\pm\sqrt{-8x-3})$ (en écrivant l'équation sous la forme $y^2-(2x-1)y+x^2+x+1=0$).
On peut aussi faire apparaître le repère $\mathcal{R}'$ et y construire la courbe d'équation $y'^2=-\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+\frac{1}{\sqrt{2}})$. Enfin, on peut aussi tracer (Γ) en utilisant sa paramétrisation.



Exercice 9. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}$.
Après en avoir déterminé la nature et l'équation réduite, construire la courbe (Γ) d'équation cartésienne $91x^2+18\sqrt{3}xy+73y^2+(64-100\sqrt{3})x-(100+64\sqrt{3})y-1436=0$.

Solution. $\Delta=ac-b^2=91.73-(9\sqrt{3})^2=6400>0$. (Γ) est une conique du genre ellipse et donc, soit une ellipse (éventuellement un cercle, voire un point), soit l'ensemble vide.
On tourne le repère $\mathcal{R}$ d'un angle θ autour de O. Pour cela, on pose $\left\{\begin{array}{l} x=\cos(\theta)x'-\sin(\theta)y' \\ y=\sin(\theta)x'+\cos(\theta)y' \end{array}\right.$. Les termes de degré 2 s'écrivent

$$91x^2+18\sqrt{3}xy+73y^2=91(\cos(\theta)x'-\sin(\theta)y')^2+18\sqrt{3}(\cos(\theta)x'-\sin(\theta)y')(\sin(\theta)x'+\cos(\theta)y')+73(\sin(\theta)x'+\cos(\theta)y')^2.$$

Dans cette dernière expression le coefficient de $x'y'$ vaut :

$$-2.91\cos(\theta)\sin(\theta)+18\sqrt{3}(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta))+2.73\sin(\theta)\cos(\theta)=18\sqrt{3}\cos(2\theta)-18\sin(2\theta)=36\cos(2\theta+\frac{\pi}{6}).$$

Pour $\theta=\frac{\pi}{6}$, ce coefficient est nul, et de plus

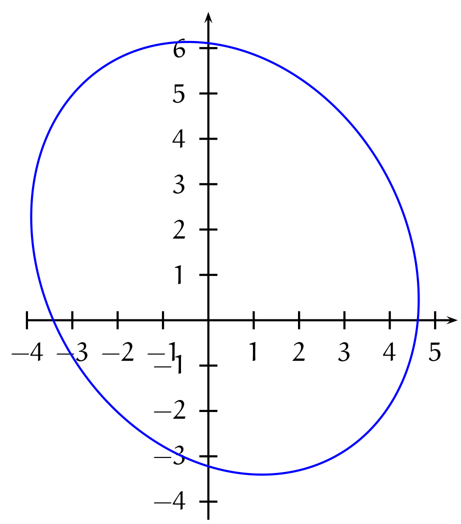
$$
\begin{aligned}
91x^2+18\sqrt{3}xy+73y^2 &= (91\cos^2(\theta)+18\sqrt{3}\cos(\theta)\sin(\theta)+73\sin^2(\theta))x'^2\\
&\quad+(91\sin^2(\theta)-18\sqrt{3}\sin(\theta)\cos(\theta)+73\cos^2(\theta))y'^2\\
&=100x'^2+64y'^2.
\end{aligned}
$$

On pose donc $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x'-y')\\ y=\frac{1}{2}(x'+\sqrt{3}y')\end{array}\right.$. On note $\mathcal{R}'$ le nouveau repère.

$$
\begin{aligned}
M(x,y)_{\mathcal{R}}\in(\Gamma) &\Leftrightarrow 100x'^2+64y'^2+(32-50\sqrt{3})(\sqrt{3}x'-y')-(50+32\sqrt{3})(x'+\sqrt{3}y')-1436=0\\
&\Leftrightarrow 100x'^2+64y'^2-200x'-128y'-1436=0 \Leftrightarrow 25x'^2+16y'^2-50x'-32y'-359=0\\
&\Leftrightarrow 25(x'-1)^2+16(y'-1)^2=400 \Leftrightarrow \frac{(x'-1)^2}{16}+\frac{(y'-1)^2}{25}=1.
\end{aligned}
$$

(Γ) est donc une ellipse d'équation réduite $\dfrac{X^2}{16}+\dfrac{Y^2}{25}=1$.

Construction de (Γ).



Régle de dédoublement des termes.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

On considère la courbe (Γ) d'équation $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$. On suppose avoir choisi a, b, ... de sorte que cette courbe soit une conique propre (ellipse, parabole ou hyperbole). On se donne une paramétrisation $t\mapsto(x(t),y(t))$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et régulière (cela est possible dans tous les cas de figure), de la courbe (Γ). Ainsi, pour tout réel t, on a

$$
ax^2(t)+2bx(t)y(t)+cy^2(t)+2dx(t)+2ey(t)+f=0.
$$

Dérivons cette égalité. On obtient après regroupement des termes

$$
x'(t)(2ax(t)+2by(t)+2d)+y'(t)(2bx(t)+2cy(t)+2e)=0\ (*).
$$

Donnons nous alors un réel t_0, puis posons $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$ et $M_0(x_0,y_0)$. Le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_0)$ n'étant pas nul, il dirige la tangente à (Γ) en (x_0,y_0). La relation $(*)$ montre alors que le vecteur $\overrightarrow{n}(ax_0+by_0+d,bx_0+cy_0+e)$ est normal à la tangente (T_0) à (Γ) en M_0. On peut donc déterminer une équation de (T_0) :

$$
\begin{aligned}
M(x,y)\in(T_0) &\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}.\overrightarrow{n}=0 \Leftrightarrow (ax_0+by_0+d)(x-x_0)+(bx_0+cy_0+e)(y-y_0)=0\\
&\Leftrightarrow axx_0+b(xy_0+yx_0)+cyy_0+dx+ey-ax_0^2-2bx_0y_0-cy_0^2-dx_0-ey_0=0\\
&\Leftrightarrow axx_0+b(xy_0+yx_0)+cyy_0+dx+ey+dx_0+ey_0+f=0\\
&\Leftrightarrow axx_0+b(xy_0+yx_0)+cyy_0+d(x+x_0)+e(y+y_0)+f=0.
\end{aligned}
$$

Cette dernière équation se déduit de l'équation de la courbe de manière tout à fait mécanique grâce à la règle dite *règle de dédoublement des termes.* Cette règle marche pour toutes les courbes du second degré et se généralise en deuxième année au plan tangent à une surface du second degré (sphères, paraboloïdes, ellipsoïdes, hyperboloïdes, ...).

Règle de dédoublement des termes

$$x^2 = x \times x \longrightarrow xx_0$$
$$y^2 = y \times y \longrightarrow yy_0$$
$$2xy = x \times y + y \times x \longrightarrow xy_0 + yx_0$$
$$2x = x + x \longrightarrow x + x_0$$
$$2y = y + y \longrightarrow y + y_0$$